

Intégration sur un intervalle quelconque – TD₂

Intégrales convergentes et intégrabilité

Exercice 1 :

Justifier que les intégrales suivantes existent et donner leurs valeurs.

1. $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt.$

2. $\int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt.$

3. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(t) dt.$

5. $\int_1^e \frac{1}{t \times \sqrt{\ln(t)+1}} dt.$

6. $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{3+\cos(t)^2} dt.$

7. $\int_0^1 t^2 \times \sqrt{1-t^2} dt.$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x)) dx.$

Réponse

Toutes les intégrales sont de la forme $\int_a^b f(t) dt$ où f est une fonction continue sur le **segment** $[a, b]$ (avec a et b réels tels que $a < b$). Donc toutes les intégrales existent.

1. On pose : $\forall t \in [0, 1], u(t) = t$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et : $\forall t \in [0, 1], u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$.

Par la formule d'intégration par parties, on a

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = [t \times \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = \ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

Or,

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 1 - [\text{Arctan}(t)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Donc,

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

2. On linéarise :

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \times \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \times \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

3. Arctan!!!

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

4. On pose : $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], u(t) = t$ et $v(t) = \text{Arcsin}(t)$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et : $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Par la formule d'intégration par parties, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(t) dt = [t \times \text{Arcsin}(t)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{12} - \left[-\sqrt{1-t^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

5. *Rédaction 1 : changement de variable.* On applique le changement de variable $u = \ln(t)$, $du = \frac{1}{t} dt$ (la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$ et à valeurs dans $[0, 1]$). On a

$$\int_1^e \frac{1}{t \times \sqrt{\ln(t)+1}} dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln(t)+1}} \times \frac{1}{t} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}} du = \left[2\sqrt{u+1} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Rédaction 2 : on repère la dérivée d'une composée de fonctions. On a

$$\int_1^e \frac{1}{t \times \sqrt{\ln(t)+1}} dt = \left[2\sqrt{\ln(t)+1} \right]_1^e = 2\sqrt{2} - 2.$$

6. On a

$$\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{3 + \cos(t)^2} dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \times \operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2 \times \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Bien sûr, on peut ne pas trouver de primitive directement (comme dans la question 5). Dans ce cas, on peut utiliser le changement de variable $u = \sin(t)$.

7. On a appliqué le changement de variable $t = \cos(u)$. La fonction $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $[0, 1]$ (on a $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$). De plus, $dt = -\sin(u) du$. On a alors,

$$\int_0^1 t^2 \times \sqrt{1-t^2} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos(u)^2 \times \sqrt{1-\cos(u)^2} \times (-\sin(u)) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 \times \sqrt{1-\cos(u)^2} \sin(u) du$$

Or, pour tout $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(u) \geq 0$, d'où,

$$\cos(u)^2 \times \sqrt{1-\cos(u)^2} \sin(u) = \cos(u)^2 \times |\sin(u)| \sin(u) = (\cos(u) \times \sin(u))^2 = \frac{1}{4} \times \sin(2u)^2 = \frac{1}{8} \times (1 - \cos(4u)).$$

Donc,

$$\int_0^1 t^2 \times \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} \times (1 - \cos(4u)) du = \frac{1}{8} \times \left[u - \frac{\sin(4u)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

8. On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x)}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x) + \sin(x)) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x)) dx.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin(x) \right) = \sqrt{2} \times \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

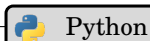
En appliquant le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$, $du = -dx$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x) + \sin(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2} \times \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sqrt{2}) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) dx = \frac{\pi \times \ln(2)}{8} - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln(\cos(-u)) du.$$

Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx = \frac{\pi \times \ln(2)}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(u)) du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x)) dx = \frac{\pi \times \ln(2)}{8}.$$

Pour le plaisir, un programme Python pour calculer une valeur approchée de cette dernière intégrale par la méthode des trapèzes.



Python

```
1 import numpy as np
2
3 def trapeze(f,a,b,n):
4     I=0
5     for k in range(n):
6         I=I+(b-a)/n*(f(a+k*(b-a)/n)+f(a+(k+1)*(b-a)/n))/2
7     return I
8
9 print(trapeze(lambda x:np.log(1+np.tan(x)),0,np.pi/4,10**5))
```

Exercice 2 :

Déterminer la nature des intégrales suivantes et lorsqu'une intégrale converge, donner sa valeur :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^t) \times (1+e^{-t})} dt.$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt.$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$
4. $\int_0^{+\infty} t^n \times e^{-t} dt \quad (n \in \mathbb{N}).$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{1+x^2} dx$
6. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x \times (x+r)} dx \quad (a > 0, r > 0)$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx.$
8. $\int_0^{+\infty} \cos(t) \times e^{-\lambda \times t} \quad (\lambda > 0).$
9. $\int_0^{+\infty} \sin(t) \times e^{-\lambda \times t} \quad (\lambda > 0).$
10. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt.$

Réponse

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1+e^t) \times (1+e^{-t})}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{(1+e^t)^2} \times e^t dt = \left[\frac{-1}{1+e^t} \right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^t) \times (1+e^{-t})} dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^t) \times (1+e^{-t})} dt = \frac{1}{2}.$$

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. *L'intervalle est ouvert !* On fixe $c \in]0, +\infty[$ et on étudie la convergence des intégrales $\int_0^1 f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$. Je choisis $c = 1$.

Soit $x \in]0, 1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \left[-2e^{-\sqrt{t}} \right]_x^1 = 2e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 - 2e^{-1}.$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Soit $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \left[-2e^{-\sqrt{t}} \right]_1^x = 2e^{-1} - 2e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2e^{-1}.$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Ainsi,

$$\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2e^{-1} + 2e^{-1} = 2$$

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

- Cas 1 : $n \leq 1$. On a $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{\ln(x)}{x^n}\right)$.

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $+\infty$.

Par théorème de comparaison, f n'est pas intégrable en $+\infty$. Autrement dit, l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ diverge

Comme f est positive sur $[1, +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

- Cas 2 : $n \geq 2$. On a $\frac{\ln(x)}{x^n} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ (croissances comparées).

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$).

Par théorème de comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Donc, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Dans la suite, on suppose que $n \geq 2$.

On note $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}}$. On a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^n}$.

De plus, $u(x) \times v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ et $u(x) \times v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (croissances comparées).

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \left[-\frac{1}{n-1} \frac{\ln(x)}{x^{n-1}} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{n-1} \frac{1}{x^n} dx = - \left[\frac{1}{(n-1) \times (n-1)} \frac{1}{x^{n-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

4. On note $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

► La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, par croissances comparées, $t^n e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge absolument, donc, converge.

► Soit $n \geq 1$.

On note $u(t) = t^n$ et $v(t) = -e^{-t}$. On a alors $u'(t) = n \times t^{n-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$.

On remarque que $u(t) \times v(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et, par croissances comparées, $u(t) \times v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge, on peut intégrer par parties et,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \left[-t^n \times e^{-t} \right]_0^{+\infty} + n \times \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Donc, $I_n = n \times I_{n-1}$.

Par récurrence, on montre que $I_n = n! \times I_0$.

De plus,

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

Ainsi,

$$I_n = n!.$$

5. La fonction $f : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt = \left[\frac{\text{Arctan}(t)^2}{2} \right]_0^x = \frac{\text{Arctan}(x)^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{8}.$$

Ainsi,

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \times (t+r)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_a^x \frac{1}{t \times (t+r)} dt = \int_a^x \frac{1}{r} \times \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+r} \right) dt = \frac{1}{r} \times [\ln(t) - \ln(t+r)]_a^x = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{x}{x+r}\right) + \frac{1}{r} \ln\left(\frac{a+r}{a}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{a+r}{a}\right)$$

car $\frac{x}{x+r} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1 avec $\ln(1) = 0$. Ainsi,

$$\text{L'intégrale } \int_a^{+\infty} \frac{1}{t \times (t+r)} dt \text{ converge et } \int_a^{+\infty} \frac{1}{t \times (t+r)} dt = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{a+r}{a}\right).$$

7. La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. On étudie la convergence des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt$ et

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt$ (je choisis $\frac{\pi}{4}$, on peut choisir n'importe quel point dans l'intervalle $]0, \pi[$).

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On a

$$\int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt = \left[\sqrt{\sin(2t)} \right]_x^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \sqrt{\sin(2x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Donc, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt$ converge et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt = 1$.

Soit $x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. On a

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt = \left[\sqrt{\sin(2t)} \right]_{\frac{\pi}{4}}^x = \sqrt{\sin(2x)} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -1.$$

Donc, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt$ converge et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt = -1$. Ainsi,

$$\text{l'intégrale } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt \text{ converge et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}} dt = 0$$

8.9. La fonction $f : t \mapsto e^{it} \times e^{-\lambda \times t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t > 0$,

$$\left| e^{it} \times e^{-\lambda \times t} \right| = e^{-\lambda \times t}.$$

Or, $\lambda > 0$, donc la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ (intégrale de référence). D'où, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{it} \times e^{-\lambda \times t} dt$ converge. Donc, en prenant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(t) \times e^{-\lambda \times t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t) \times e^{-\lambda \times t} dt$ convergent.

Soit $0 < x < X$ des réels, on a :

$$\int_x^X e^{it} \times e^{-\lambda \times t} dt = \left[\frac{e^{(i-\lambda) \times t}}{i-\lambda} \right]_x^X = \frac{e^{(i-\lambda) \times X}}{i-\lambda} - \frac{e^{(i-\lambda) \times x}}{i-\lambda}.$$

D'où en passant à la limite quand x tend vers 0, on a :

$$\int_0^X e^{it} \times e^{-\lambda \times t} dt = \frac{e^{(i-\lambda) \times X}}{i-\lambda} - \frac{1}{i-\lambda}.$$

De plus, $\left| \frac{e^{(i-\lambda) \times X}}{i-\lambda} \right| = \frac{e^{-\lambda \times X}}{|i-\lambda|} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ (car $\lambda > 0$). D'où,

$$\int_0^{+\infty} e^{it} \times e^{-\lambda \times t} dt = -\frac{1}{i-\lambda} = \frac{\lambda+i}{1+\lambda^2}.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) \times e^{-\lambda \times t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{it} \times e^{-\lambda \times t} dt \right) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t) \times e^{-\lambda \times t} dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{it} \times e^{-\lambda \times t} dt \right) = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

10. Intégrale de Riemann convergente car $\frac{1}{2} < 1$, de plus,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = [-2\sqrt{1-t}]_0^x = -2\sqrt{1-x} + 2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2.$$

Donc,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = 2.$$

Exercice 3 :

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} (t-1) \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt.$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$
4. $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt.$
5. $\int_0^{+\infty} \ln(t) \times e^{-t} dt.$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt.$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt.$
8. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a \times (t-1)^b} dt \quad ((a, b) \in \mathbb{R}^2).$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt \quad ((a, b) \in \mathbb{R}^2).$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt.$
11. $\int_0^1 \frac{1}{\sin(t)} dt.$

Réponse

IMPORTANT!

f est intégrable sur $I \iff$ l'intégrale $\int_I f(t) dt$ CVA $\iff$ l'intégrale $\int_I |f(t)| dt$ CV $\implies$ l'intégrale $\int_I f(t) dt$ CV.

1. ► La fonction $t \mapsto (t-1) \times \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

► De plus, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ (car $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$).

La fonction constante égale à 1 n'est pas intégrable en $+\infty$. En effet, $\int_1^x |1| dt = x-1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, par théorème de comparaison, la fonction f n'est pas intégrable en $+\infty$.

Autrement dit, l'intégrale $\int_1^{+\infty} (t-1) \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ ne converge pas absolument.

Or, pour tout $t \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{t} \leq 1$, donc $|f(t)| = f(t) \geq 0$.

Ainsi,

$$\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} (t-1) \times \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \text{ ne converge pas.}$$

Remarque : attention à bien vérifier que f est positive. Le théorème de comparaison permet uniquement de conclure à propos de la nature de $\int_a^b |f(t)| dt$ a priori.

2. ► La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

► On a $\frac{t}{1+t^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann convergente car $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, la fonction f est intégrable en $+\infty$, donc

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt$ converge.

3. ► La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

► *Intégrabilité en $+\infty$*

On a $t \mapsto e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ (utiliser la croissance comparée : $u \times e^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$).

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann convergente car $2 > 1$).

Par les théorèmes de comparaison, la fonction f est intégrable sur en $+\infty$.

► *Intégrabilité en $-\infty$*

On a $t \mapsto e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow -\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $-\infty$.

Je le montre une fois ici, vous pouvez utiliser le résultat sans démonstration. Soit $\alpha > 1$ un entier pair. Pour tout $x \leq -1$,

$$\int_x^{-1} \left| \frac{1}{t^\alpha} \right| dt = \frac{1}{\alpha-1} \times \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} + 1 \right) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-\alpha}.$$

Par théorème de comparaison, la fonction f est intégrable en $-\infty$.

Ainsi,

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

4. ► La fonction $f : t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

► *Intégrabilité en 0.*

On a $f(t) = \underset{t \rightarrow 0}{O}(1)$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0, 1]$, (en effet : $\int_x^1 |1| dt = 1 - x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$).

Donc, par théorème de comparaison, la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge.

► *Intégrabilité en $+\infty$.*

On a $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ car $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge.

Ainsi,

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge (en fait on a même montré que f est intégrable sur $]0, +\infty[$).

5. ► La fonction $t \mapsto \ln(t) \times e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

► *Intégrabilité en 0*

Comme $e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$, on a $\ln(t) \times e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$.

La fonction $\ln$ est intégrable en 0 (intégrale de référence).

Par théorème de comparaison, la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$.

► *Intégrabilité en $+\infty$*

Par le théorème des croissances comparées, on a $f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(e^{-\frac{t}{2}} \right)$.

La fonction $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de référence et $\frac{1}{2} > 0$).

Par théorème de comparaison, la fonction f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc

l'intégrable $\int_0^{+\infty} \ln(t) \times e^{-t} dt$ converge.

6. ► La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

► *Intégrabilité en 0*

On a (équivalent usuel) : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1$. Donc f se prolonge par continuité en 0, et on pose $f(0) = 1$.

Donc, la fonction f est intégrable en 0.

► ► *Intégrabilité en $+\infty$*

Par le théorème des croissances comparées, $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann convergente sur $[1, +\infty[$ car $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

D'où, f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ converge.}$$

7. ► La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

► ► *Intégrabilité en 0*

On a (équivalent usuel) : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t^{\frac{3}{2}}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann convergente car $\frac{1}{2} < 1$).

Par théorème de comparaison, f est intégrable en 0.

► *Intégrabilité en $+\infty$*

On a (croissances comparées) : $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^{\frac{5}{4}}} \right)$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{5}{4}}}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann convergente car $\frac{5}{4} > 1$).

Par théorème de comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

D'où, f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Ainsi

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt \text{ converge.}$$

8. *indication* : on a $\frac{1}{t^a \times (t-1)^b} \underset{t \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{(t-1)^b}$ et $\frac{1}{t^a \times (t-1)^b} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{a+b}}$.

On reconnaît des intégrales de Riemann, on en déduit donc que :

- f est intégrable en 0 si, et seulement si, $b < 1$.
- f est intégrable en $+\infty$ si, et seulement si, $a + b > 1$.

Donc, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $b < 1$ et $a + b > 1$.

Comme l'intégrande est positive,

l'intégrale converge si, et seulement si $b < 1$ et $a + b > 1$.

9. *indication* : on a $\frac{t^a}{1+t^b} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \begin{cases} t^a & \text{si } b > 0 \\ \frac{t^a}{2} & \text{si } b = 0 \\ t^{a-b} & \text{si } b < 0 \end{cases}$ et $\frac{t^a}{1+t^b} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} t^{a-b} & \text{si } b > 0 \\ \frac{t^a}{2} & \text{si } b = 0 \\ t^a & \text{si } b < 0. \end{cases}$

Lorsque $b = 0$, on en déduit que l'intégrale diverge.

Lorsque $b > 0$, on en déduit que l'intégrale converge si, et seulement si $a > -1$ et $a - b < -1$.

Lorsque $b < 0$, on en déduit que l'intégrale converge si, et seulement si $a - b > -1$ et $a < -1$.

10. *Indication* : pour la convergence de l'intégrale sur $]0, 1]$, on utilise le théorème de comparaison.

Pour montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$, on utilise une intégration par parties.

11. ► La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, 1]$.
- On a (équivalent usuel) : $\frac{1}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann divergente sur $]0, 1]$ car $1 \leq 1$).
- Par théorème de comparaison, f n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. Or f est positive, donc

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(t)} dt \text{ diverge.}$$

Exercice 4 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ fixé.

- Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a \times t} - e^{-b \times t}}{t} dt$ converge (on ne demande pas de donner sa valeur). Dans la suite on note I sa valeur.
- Déterminer les trois limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$, $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{a \times X}^{b \times X} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
- En déduire la valeur de I .

Réponse

1. ► La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-a \times t} - e^{-b \times t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

► Étude en 0.

On sait que $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + o(u)$.

Donc,

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} b - a + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} b - a.$$

D'où, f est prolongeable par continuité en 0, et donc, f est intégrable en 0.

► Étude en $+\infty$.

Par croissances comparées, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

2. ► Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$.

La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et, en reconnaissant un équivalent, usuel $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$.

Donc, g est prolongeable par continuité en 0 et est par conséquent intégrable en 0.

On en déduit que $\int_0^1 g(t) dt$ converge.

D'où,

$$\int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_{a \times x}^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \int_{b \times x}^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 g(t) dt = 0.$$

- Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

On a :

$$\int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{1}{t} dt = \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{1}{t} dt = \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + [\ln(t)]_{a \times x}^{b \times x} = \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Donc,

$$\int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

► Déterminons $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{a \times X}^{b \times X} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

La fonction $h : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme précédemment, on en déduit que h est intégrable en $+\infty$.

D'où,

$$\int_{a \times X}^{b \times X} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{b \times X} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{a \times X} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.$$

3. Soit $0 < x < X$.

On a :

$$\int_x^X \frac{e^{-a \times t} - e^{-b \times t}}{t} dt = \int_x^X \frac{e^{-a \times t} - 1}{t} dt - \int_x^X \frac{e^{-b \times t} - 1}{t} dt.$$

Dans la première intégrale, on applique le changement de variable $u = a \times t$. On a :

$$\int_{a \times x}^{a \times X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du.$$

Dans la deuxième intégrale, on applique le changement de variable $u = b \times t$. On a :

$$\int_{b \times x}^{b \times X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du.$$

Donc,

$$\int_x^X \frac{e^{-a \times t} - e^{-b \times t}}{t} dt = \int_{a \times x}^{a \times X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du - \int_{b \times x}^{b \times X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du = \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{b \times X}^{a \times X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du.$$

Donc,

$$\int_x^X \frac{e^{-a \times t} - e^{-b \times t}}{t} dt = \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{b \times X}^{a \times X} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{b \times X}^{a \times X} \frac{1}{u} du = \int_{a \times x}^{b \times x} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{b \times X}^{a \times X} \frac{e^{-u}}{u} du - \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

On fait tendre x vers 0, puis X vers $+\infty$, par **Q2**, il vient :

$$I = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exercice 5 :

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

2. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$.

Montrer que $I = J$.

3. En déduire la valeur de I .

Réponse

1. ► La fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

► On sait que :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x).$$

D'où,

$$\ln(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty} + \underbrace{\ln(1 + o(1))}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}.$$

Donc,

$$\ln(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(x) + o(\ln(x)), \quad \text{puis} \quad \ln(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x).$$

Or, $\ln$ est intégrable en 0 (intégrale de référence), donc, par théorème de comparaison,

$$\text{la fonction } x \mapsto \ln(\sin(x)) \text{ est intégrable sur }]0, \frac{\pi}{2}].$$

2. On a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Donc, on peut utiliser le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$. On a $x = \frac{\pi}{2} - u$, $dx = -du$ et $\frac{x}{u} \mid \frac{0}{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}}{0}$

D'où,

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos(u)) \times (-1) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u)) du.$$

Remarque : comme I est convergente, le théorème de changement de variable assure que l'intégrale obtenue après changement de variable est convergente.

Ainsi,

$$I = J.$$

3. ► Par linéarité des intégrales convergentes,

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x) \times \cos(x)) dx.$$

$$\text{Or, } \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

D'où,

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) - \ln(2) dx \stackrel{*}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx - \frac{\pi \times \ln(2)}{2}.$$

L'égalité $\stackrel{*}{=}$ mérite une justification. En effet, on applique ici la linéarité de l'intégrale, ce qui fait apparaître deux intégrales : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) dx$; sont-elles convergentes ? Pour la deuxième, aucun problème, on intègre une constante sur un segment. Pour la première, on peut remarquer que :

$$\ln(\sin(2x)) = \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) + \ln(2),$$

où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx$ converge (elle est égale à $I + J$) et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) dx$ converge (intégrale de sup). Donc, par linéarité des intégrales convergentes, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx$ converge.

► On applique le changement de variable $u = 2x$ où $x \mapsto 2x$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On a $du = 2 dx$ et

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	π

Donc, par la relation de Chasles

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \right) = \frac{1}{2} \left(I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \right).$$

Dans la seconde intégrale, on applique le changement de variable $v = u - \frac{\pi}{2}$ (où $u \mapsto u - \frac{\pi}{2}$ qui est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$) avec $dv = du$ et

u	$\frac{\pi}{2}$	π
v	0	$\frac{\pi}{2}$

On a alors :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + v\right)\right) dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(v)) dv = J = I$$

Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx = \frac{1}{2}(I + I) = I.$$

Or $I = J$, donc,

$$2I = I + J = I - \frac{\pi \times \ln(2)}{2}$$

Ainsi,

$$I = J = -\frac{\pi \times \ln(2)}{2}$$

Remarque : on trouve un résultat négatif, c'est cohérent, l'intégrande est négative et les bornes sont dans le bon ordre.

Exercice 6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de I_n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer I_{n+1} en fonction de n et de I_n .
3. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse

1. La fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2n > 1$).

Donc, par théorème, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ converge.}$$

2. On a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} 1 \times \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

On note $u(t) = t$ et $v(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$.

On a : $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -\frac{2t \times n}{(1+t^2)^{n+1}}$.

De plus, $u(t) \times v(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et $u(t) \times v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $2n-1 > 0$).

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[t \times \frac{1}{(1+t^2)^n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t \times \frac{2t \times n}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale (les intégrales en jeu convergent), on a :

$$I_n = 2n \times (I_n - I_{n+1}).$$

Donc,

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

3. On a :

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} = \frac{2n-3}{2(n-1)} \times \frac{2n-5}{2(n-2)} I_{n-2} = \frac{2n-3}{2(n-1)} \times \frac{2n-5}{2(n-2)} \times \cdots \times \frac{1}{2 \times 1} I_1.$$

Or,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, en multipliant numérateur et dénominateur par : $(2n-2) \times (2n-4) \times \cdots \times 2 = 2(n-1) \times 2(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, on a :

$$\frac{2n-3}{2(n-1)} \times \frac{2n-5}{2(n-2)} \times \cdots \times \frac{1}{2 \times 1} = \frac{(2n-2) \times (2n-3) \times (2n-4) \times \cdots \times 2 \times 1}{(2(n-1) \times 2(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1)^2} = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1} \times (n-1)!)^2}.$$

Ainsi,

$$I_n = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1} \times (n-1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7 :

- Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{t-1}{t \times \ln(t)}$ est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- Montrer $\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.
- Montrer $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ln(2)$.

Réponse

- La fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

De plus,

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{t-1}{1 \times (t-1)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1.$$

Donc, f est prolongeable par continuité en 1, donc, f est intégrale en 1 (faux problème).

Ainsi,

$$f \text{ est intégrale sur } \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

2. Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt = - \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt.$$

De plus, par la question précédente, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt$ converge, c'est-à-dire,

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt.$$

Or, $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$, donc, par composition des limites,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x^2} \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt.$$

Ainsi, par opération sur les limites,

$$\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0 \xrightarrow{x \rightarrow 1} - \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt = 0.$$

3. On a :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1+1}{t \times \ln(t)} dt = \underbrace{\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \times \ln(t)} dt}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} + \int_x^{x^2} \frac{1}{t \times \ln(t)} dt.$$

De plus,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \times \ln(t)} dt = \left[\ln(|\ln(t)|) \right]_x^{x^2} = \ln(|\ln(x^2)|) - \ln(|\ln(x)|) = \ln(2|\ln(x)|) - \ln(|\ln(x)|) = \ln(2) + \ln(|\ln(x)|) - \ln(|\ln(x)|) = \ln(2).$$

Donc,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln(2).$$

Exercice 8 :

Soit $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt$ la fonction définie sur $]0, 1[$.

Justifier que F est bien définie et déterminer la limite F en 0 et en 1.

Réponse

► Soit $x \in]0, 1[$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t-t^3}}$ est continue sur le segment $[x^2, x]$, donc $F(x)$ existe. Donc,

F est bien définie.

► La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t-t^3}}$ est continue sur $]0, 1[$. De plus, pour tout $t \in]0, 1[$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t} \times (1-t) \times (1+t)}$. D'où, $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1-t}}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ (intégrale de Riemann convergente car $\frac{1}{2} < 1$) et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ (Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

Par théorème de comparaison, f est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Donc, f est intégrable sur $]0, 1[$. D'où, les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt$ convergent.

Par la relation de Chasles, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt - \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt = - \int_{x^2}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt + \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt$. D'où,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 1}{\longrightarrow} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt = 0 \quad \text{et} \quad F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-t^3}} dt = 0$$

Les limites de F en 0 et 1 sont nulles.

Exercice 9 :

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de F .
- Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos(x)}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
- Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{\sin(t)-t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$ et déterminer la limite de $\int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \ln(x)$ en 0.
- En déduire un équivalent simple de F au voisinage de 0.

Réponse

- Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et, pour tout $t \in [x, +\infty[$, on a : $\left| \frac{\sin(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$. Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ (intégrale de Riemann convergente sur $[x, +\infty[$ car $2 > 1$ et $x > 0$). Par théorème de comparaison, la fonction f est intégrable sur $[x, +\infty[$. Donc, $F(x)$ existe.

Supposons $x = 0$. Dans ce cas, f continue sur $]0, 1]$ et $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$. Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann avec $1 \geq 1$). Par théorème de comparaison, f n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. De plus f est positive sur $]0, 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ diverge et F n'est pas définie en 0. En en déduit que F n'est pas définie sur $] -\infty, 0]$.

Ainsi,

L'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

- Soient $X > x > 0$ des réels. Pour tout $t \in [x, X]$, on pose $u(t) = -\cos(t)$ et $v(t) = \frac{1}{t^2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$

sur $[x, X]$, et pour tout $t \in [x, X]$, on a $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = -\frac{2}{t^3}$. D'où, par la formule d'intégration par parties,

$$\int_x^X \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^2} \right]_x^X - \int_x^X \frac{2 \cos(t)}{t^3} dt = \frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\cos(X)}{X^2} - \int_x^X \frac{2 \cos(t)}{t^3} dt.$$

La fonction $\cos$ est bornée, donc $\frac{\cos(X)}{X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$. De plus, la fonction $t \mapsto \frac{2 \cos(t)}{t^3}$ est continue par morceaux sur $[x, +\infty[$ et est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui est intégrable sur $[x, +\infty[$. On en déduit que $t \mapsto \frac{2 \cos(t)}{t^3}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, et on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \frac{\cos(x)}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2 \cos(t)}{t^3} dt \quad \text{et} \quad \left| \int_x^{+\infty} \frac{2 \cos(t)}{t^3} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{2 |\cos(t)|}{t^3} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt \leq \left[-\frac{1}{t^2} \right]_x^{+\infty} \leq \frac{1}{x^2}.$$

ZUT!!! Cette majoration montre que $\int_x^{+\infty} \frac{2 \cos(t)}{t^3} dt = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et nous voulions un $\frac{1}{x^2}$... C'est reparti pour une intégration par parties pour augmenter la puissance de $\frac{1}{t}$ dans l'intégrale !

On a :

$$\int_x^X \frac{2 \cos(t)}{t^3} dt = \left[\frac{2 \sin(t)}{t^3} \right]_x^X - \int_x^X \frac{-6 \sin(t)}{t^4} dt = \frac{2 \sin(X)}{X^3} - \frac{2 \sin(x)}{x^3} + \int_x^X \frac{6 \sin(t)}{t^4} dt.$$

Or, $\frac{\sin(X)}{X^3} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, la fonction $t \mapsto \frac{6 \sin(t)}{t^4}$ est continue par morceaux sur $[x, +\infty[$ et vérifie $\frac{6 \sin(t)}{t^4} = O\left(\frac{1}{t^4}\right)$ où la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ (intégrale de Riemann). On en déduit que $t \mapsto \frac{6 \sin(t)}{t^4}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, et on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{2 \cos(t)}{t^3} dt = -\frac{2 \sin(x)}{x^3} + \int_x^{+\infty} \frac{6 \sin(t)}{t^4} dt \quad \text{et} \quad \left| \int_x^{+\infty} \frac{6 \sin(t)}{t^4} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{6 |\sin(t)|}{t^4} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{6}{t^4} dt \leq \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{t^3} \right]_x^X \leq \frac{1}{x^3}.$$

Donc, $\int_x^{+\infty} \frac{6 \sin(t)}{t^4} dt = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. De plus, $\frac{2 \sin(x)}{x^3} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. D'où,

$$F(x) = \frac{\cos(x)}{x} + \underbrace{\frac{2 \sin(x)}{x^3} - \int_x^{+\infty} \frac{6 \sin(t)}{t^4} dt}_{= o\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Donc,

$$F(x) = \frac{\cos(x)}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3. La fonction g est continue sur $[0, 1]$. De plus, $g(t) = \frac{t + o(t^2) - t}{t^2} = \frac{o(t^2)}{t^2} = o(1)$ Donc, $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Donc,

g est prolongeable par continuité en 0.

Par linéarité de l'intégrale, on a : pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \ln(x) = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \int_x^1 g(t) dt.$$

De plus, g est intégrable sur $]0, 1]$ (car continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0). Donc,

$$\int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 g(t) dt.$$

4. On a : $F(x) = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \in \mathbb{R}$ et d'après la question précédente, on a : $\frac{\int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt}{-\ln(x)} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

D'où, $\int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$. Donc,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x).$$

Exercice 10 :

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t) \times t^x} dt$.
- Calculer $f(1)$.
- Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Réponse

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t) \times t^x} dt$ converge.

La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{(1+t) \times t^x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

De plus, $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ est intégrable en $+\infty$ si, et seulement si, $x > 1$ (intégrale de Riemann).

Donc, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 1$.

Comme g est positive, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale. Donc,

f est définie sur $]0, +\infty[$.

- On a :

$$f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) \right]_1^{+\infty} = \ln(2).$$

- Soit $x > 0$. Par linéarité de l'intégrale,

$$f(x+1) + f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t) \times t^{x+1}} + \frac{1}{(1+t) \times t^x} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t) \times t^x} \times \left(\frac{1}{t} + 1\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} dt = \left[\frac{t^{-x}}{-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

- Méthode 1* : Soit $0 < x < y$. Pour tout $t \geq 1$, $\ln(t) \geq 0$, donc, $x \times \ln(t) \leq y \times \ln(t)$.

Par croissance de l'exponentielle, $0 < t^x \leq t^y$.

Donc, $\frac{1}{(1+t) \times t^x} \geq \frac{1}{(1+t) \times t^y}$.

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont en bon ordre), $f(x) \geq f(y)$.

Donc, f est décroissante.

De plus, l'intégrande est positive, donc, par positivité de l'intégrale, f est positive.

Par le théorème de la limite monotone, f possède une limite finie ℓ en $+\infty$.

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$ dans l'égalité de Q3, il vient : $2\ell = 0$, donc, $\ell = 0$.

Ainsi,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Méthode 2

Pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$,

d'où, $0 \leq \frac{1}{(1+t) \times t^x} \leq \frac{1}{t^x}$.

Par croissance de l'intégrale, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1}$.

D'où, par théorème d'encadrement,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

5. Par **Q3** et décroissance de f (même en ayant utilisé la méthode 2 dans la question précédente, on a besoin de montrer la décroissance de f ici),

$$\frac{1}{x} = f(x+1) + f(x) \leq 2f(x).$$

De plus, pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} = f(x) + f(x-1) \geq 2f(x).$$

Donc,

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}.$$

Or, $\frac{1}{2(x-1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Donc, par théorème d'encadrement,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Exercice 11 :

Soit $I = \int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$.

1. Trouver trois réels a , b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.
2. L'intégrale I converge-t-elle ?
3. Calculer I .

Réponse

1. On multiplie l'égalité demandée par x et on évalue en 0, on trouve $a = 1$.
On multiplie l'égalité demandée par $(1+x)^2$ et on évalue en -1 , on trouve $c = 1$.
On a :

$$\frac{1}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + b \times x \times (x+1) + x}{(1+b) \times x^2 + (2+b) \times x + 1}.$$

En identifiant, on prend $b = -1$.

Donc,

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. La fonction $t \mapsto t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est continue sur $]0, 1]$.

De plus, pour tout $t \in]0, 1]$,

$$1 - t \leq t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq 1.$$

Donc, $t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$.

La fonction $t \mapsto t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0.

Donc,

l'intégrale I converge.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\int_{\frac{1}{N}}^1 t \times \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} t \times \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt.$$

Or, pour $t \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$, on a : $k < \frac{1}{t} < k+1$. Donc,

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} t \times \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} t \times k dt = \frac{k}{2} \times \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2k+1}{k \times (k+1)^2}.$$

Donc, par **Q1**,

$$\int_{\frac{1}{N}}^1 t \times \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N} + \sum_{k=2}^N \frac{1}{k^2} \right).$$

Or, on sait que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donc, en faisant tendre N vers $+\infty$, on a :

$$\int_0^1 t \times \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 12 :

Soit, pour $n \geq 1$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$.

1. Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \rightarrow \infty$ ¹.
2. En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du$. Puis, en posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1 .
3. Calculer I_n .

Réponse

1. ► La fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^4)^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4n}}$.

Or, $n \geq 1$, donc, $4n > 1$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{4n}}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann).

Par théorème de comparaison, f_n est intégrable en $+\infty$.

Donc,

l'intégrale I_n converge.

► Pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}_{=f(x)}$.

De plus, $1+x^4 \geq 1$, donc, pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$, $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \underbrace{\frac{1}{1+x^4}}_{f_1(x)}$.

La fonction f_1 est continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par théorème de la limite monotone,

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

Or, $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} 0 dx$, donc,

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

On peut appliquer le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, autrement dit, $x = \frac{1}{u}$ avec $dx = -\frac{1}{u^2} du$ et $\frac{x}{u} \bigg|_{+\infty}^{+\infty} = \frac{0}{0}$.

D'où,

$$I_1 = - \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}} \times \frac{1}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1} du.$$

D'où, par linéarité des intégrales convergentes et en utilisant les deux expressions de I_1 , on a :

$$I_1 + I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4} du + \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du = \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du.$$

Donc,

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du.$$

La fonction $u \mapsto u - \frac{1}{u}$ est strictement croissant et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

On peut appliquer le changement de variable $v = u - \frac{1}{u}$ avec $dv = 1 + \frac{1}{u^2} du = \frac{1+u^2}{u^2} du$ et $\frac{u}{v} \bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$.

1. À traiter après le cours sur les intégrales paramétrées.

On a :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} \times \frac{u^2}{1+u^2} \times \frac{1+u^2}{u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} \times \frac{1+u^2}{u^2} du.$$

De plus, $v^2 = \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 = u^2 + \frac{1}{u^2} - 2 = \frac{1+u^4}{u^2} - 2$.

Donc,

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+v^2} dv = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^{n+1}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^4-x^4}{(1+x^4)^{n+1}} dx.$$

Par linéarité des intégrales convergentes (je vous laisse vérifier que les deux intégrales obtenues sont bien convergentes) :

$$I_{n+1} = I_n - \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)^{n+1}} dx = I_n - \int_0^{+\infty} x \times \frac{x^3}{(1+x^4)^{n+1}} dx.$$

On intègre par parties : $u(x) = x$ et $v(x) = -\frac{1}{4n} \frac{1}{(1+x^4)^n}$. On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{x^3}{(1+x^4)^{n+1}}$.

On a : $u(x) \times v(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{4n} \times \frac{1}{x^{4n+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que :

$$I_{n+1} = I_n - \underbrace{\left[x \times -\frac{1}{4n} \frac{1}{(1+x^4)^n} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{4n} \frac{1}{(1+x^4)^n} dx = I_n - \frac{1}{4n} I_n = \frac{4n-1}{4n} I_n.$$

Donc,

$$I_n = \frac{4n-5}{4(n-1)} \times I_{n-1} = \frac{(4n-5)(4n-9)}{4^2(n-1) \times (n-2)} \times I_{n-2} = \dots = \frac{(4n-5)(4n-9) \times \dots \times 7 \times 3}{4^{n-1}(n-1) \times (n-2) \times 2 \times 1} \times I_1.$$

Donc,

$$I_n = \frac{(4n-5)(4n-9) \times \dots \times 7 \times 3}{4^{n-1}(n-1)!} \times \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Intégrabilité (exercices théoriques)

Exercice 13 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que f et f' sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Réponse

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0).$$

Or, f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ converge.

D'où, f possède une limite finie en $+\infty$ et cette limite est $\ell = \int_0^{+\infty} f'(t) dt + f(0)$. On en déduit que $|f|$ tend vers $|\ell|$ en $+\infty$.

Montrons que $\ell = 0$. Par l'absurde, on suppose $|\ell| > 0$. Dans ce cas, il existe $A \geq 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, $|f(x)| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$.

D'où, pour tout $x \geq A$, on a : $\int_1^x |f(t)| dt \geq \int_1^x \frac{|\ell|}{2} dt \geq \frac{|\ell|}{2} \times (x-1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. (car $|\ell| > 0$). On en déduit que l'intégrale

$\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ diverge. Contradiction car f est supposée intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, $\ell = 0$. On en déduit que

f tend vers 0 en $+\infty$.

Remarque : on a aussi montré que $\int_0^{+\infty} f'(t) dt = -f(0)$.

Remarque 2 : autre rédaction. Si $\ell \neq 0$, alors $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$. Or la fonction constante égale à ℓ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Contradiction car f est supposée intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 14 :

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction décroissante.

1. On suppose que f est intégrable sur $]0, 1]$. Déterminer la limite de $x \times f(x)$ quand x tend vers 0.
2. On suppose que f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Déterminer la limite de $x \times f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Réponse

1. La fonction f est décroissante, donc, pour tout $t \in]0, x]$ on a : $f(x) \leq f(t)$.

Par croissance de l'intégrale (les intégrales convergent car f est intégrable sur $]0, 1]$ et les fonctions constantes sont intégrables sur l'intervalle bornée $]0, 1]$), on a :

$$\underbrace{\int_0^x f(x) dt}_{=x \times f(x)} \leq \int_0^x f(t) dt$$

De même, pour tout $t \in [x, 2x]$, $f(t) \leq f(x)$.

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq \underbrace{\int_x^{2x} f(x) dt}_{=x \times f(x)}$$

Or, f est intégrable sur $]0, 1]$, donc $\int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_x^1 f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. D'où,

$\int_x^{2x} f(x) dt = \int_x^0 f(x) dt + \int_0^{2x} f(x) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement,

$$x \times f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

2. Comme dans la question précédente, on utilise la décroissance de f pour montrer que : pour tout $x \geq 1$,

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq x \times f(x) \leq 2 \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt.$$

La fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $\int_x^{2x} f(t) dt = \int_1^{2x} f(t) dt - \int_1^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f(t) dt - \int_1^{+\infty} f(t) dt = 0$.

De même, $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Par théorème d'encadrement, on a :

$$x \times f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 15 :

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et f possède une limite finie ℓ en $-\infty$.

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+1) - f(t) dt$ converge et donner sa valeur.

Réponse

► Soit $x \geq 0$. Par linéarité, on a :

$$\int_0^x f(t+1) - f(t) dt = \int_0^x f(t+1) dt - \int_0^x f(t) dt.$$

Le changement de variable $u = t + 1$ donne : $\int_0^x f(t+1) dt = \int_1^{x+1} f(u) du = \int_1^{x+1} f(t) dt$.

D'où,

$$\int_0^x f(t+1) - f(t) dt = \int_1^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = - \int_0^1 f(t) dt + \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt.$$

Or, $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, donc,

$$\int_0^x f(t+1) - f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} - \int_0^1 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = - \int_0^1 f(t) dt.$$

D'où, $\int_0^{+\infty} f(t+1) - f(t) dt$ converge et $\int_0^{+\infty} f(t+1) - f(t) dt = - \int_0^1 f(t) dt$.

► Soit $x \leq 0$. Comme ci-dessus, on a :

$$\int_x^0 f(t+1) - f(t) dt = - \int_x^{x+1} f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \ell$, il existe $A \geq 0$ tel que, pour tout $t \leq A$, on a : $|f(t) - \ell| \leq \varepsilon$.

Dans la suite, on suppose que $x \leq A - 1$. Alors, pour tout $t \in [x, x+1]$, on a : $t \leq A$. Donc,

$$\left| \int_x^{x+1} f(t) dt - \ell \right| = \left| \int_x^{x+1} f(t) - \ell dt \right| \leq \int_x^{x+1} |f(t) - \ell| dt \leq \int_x^{x+1} \varepsilon dt \leq \varepsilon.$$

D'où, $\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$.

Donc, $\int_{-\infty}^0 f(t+1) - f(t) dt$ converge et $\int_{-\infty}^0 f(t+1) - f(t) dt = -\ell + \int_0^1 f(t) dt$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+1) - f(t) dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+1) - f(t) dt = -\ell + \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = -\ell$.

Changements de variable et intégrations par parties

Exercice 16 :

Soient p et q deux réels tels que $p^2 < q$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2p \times t + q} dt$.

Réponse

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $t^2 + 2p \times t + q = (t+p)^2 + q - p^2 > 0$ car $p^2 < q$. Donc la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + 2p \times t + q}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$: intégrale de Riemann convergente car $2 > 1$. Donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2p \times t + q} dt$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2p \times t + q} dt = \frac{1}{q - p^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{t+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)^2 + 1} dt.$$

On applique le changement de variable $u = \frac{t+p}{\sqrt{q-p^2}}$: la fonction $t \mapsto \frac{t+p}{\sqrt{q-p^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante (fonction affine). De plus, $du = \frac{1}{\sqrt{q-p^2}} dt$. Comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2p \times t + q} dt$ converge, par la formule de changement de variables, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2p \times t + q} dt = \frac{1}{\sqrt{q-p^2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{\sqrt{q-p^2}} \times [\text{Arctan}(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{q-p^2}}.$$

Exercice 17 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 (x \times \ln(x))^n dx$.

Réponse

► La fonction $f : x \mapsto (x \times \ln(x))^n$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, par croissances comparées, $x \times \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Donc, on peut prolonger f par continuité en 0. Ainsi, l'intégrale étudiée existe. On note I_n sa valeur.

► Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v(x) = (\ln(x))^n$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$. De plus, $u(x) \times v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (croissances comparées) et $u(x) \times v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. Donc, par intégration par parties :

$$I_n = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times (\ln(x))^n \right]_0^1}_{=0} - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n \times (\ln(x))^{n-1} dt = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n \times (\ln(x))^{n-1} dt.$$

On remarque que la puissance sur $\ln(x)$ a diminuée de 1. On intègre par parties jusqu'à obtenir $\ln(x)^0$.

► Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v_1(x) = (\ln(x))^{n-1}$. Les fonctions u et v_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$. De plus, $u(x) \times v_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $u(x) \times v_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. Donc, par intégration par parties :

$$\int_0^1 x^n \times (\ln(x))^{n-1} dt = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times (\ln(x))^{n-1} \right]_0^1}_{=0} - \frac{n-1}{n+1} \int_0^1 x^n \times (\ln(x))^{n-2} dt = -\frac{n-1}{n+1} \int_0^1 x^n \times (\ln(x))^{n-2} dt.$$

D'où,

$$I_n = \frac{n \times (n-1)}{(n+1)^2} \int_0^1 x^n \times (\ln(x))^{n-2} dt.$$

► On a alors

$$I_n = (-1)^n \times \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 1}{(n+1)^n} \int_0^1 x^n \times (\ln(x))^0 dt = (-1)^n \times \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Exercice 18 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^{+\infty} x^n \times e^{-x} dx$.

Réponse

► La fonction $f : x \mapsto x^n \times e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, par croissances comparées, $x^n \times e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ sur $x \rightarrow +\infty$. Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, comme f est continue, f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On note $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \times e^{-x} dx$. Pour $n = 0$, on a $I_0 = 1$ (intégrale de référence).

► Soit $n \geq 1$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $u(x) = x^n$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus, par croissances comparées, $u(x) \times v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et on a $u(0) \times v(0) = 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n \times e^{-x} dx$ converge. Donc, par

intégration par parties :

$$I_n = \underbrace{\left[x^n \times (-e^{-x}) \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} n \times x^{n-1} \times (-e^{-x}) dx = n \times I_{n-1}.$$

D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times I_0 = n!$. Cette égalité est encore vraie pour $n = 0$.

Exercice 19 :

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx$.

Réponse

► La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$ est continue sur $]0, 1[$. De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$ et la fonction $\ln$ est intégrable sur $]0, 1[$. Par théorème de comparaison, f est intégrable sur $]0, 1[$. Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx$ converge.

► Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $u(x) = -\frac{1}{x+1}$ et $v(x) = \ln(x)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$. Or, $u(x) \times v(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$.

AIE!!! On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées. Pour contourner ce problème, on va se ramener à une intégrale sur un segment puis on passera à la limite après avoir intégré par parties sur ce segment.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Par intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, 1]$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx = \left[\frac{-\ln(x)}{x+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{-1}{x \times (x+1)} dx = \frac{\ln(\varepsilon)}{\varepsilon+1} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x \times (x+1)} dx.$$

De plus,

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x \times (x+1)} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x) - \ln(x+1)]_{\varepsilon}^1 = -\ln(2) - \ln(\varepsilon) + \ln(\varepsilon+1).$$

Donc,

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx = \frac{\ln(\varepsilon)}{\varepsilon+1} - \ln(2) - \ln(\varepsilon) + \ln(\varepsilon+1) = \frac{-\varepsilon \times \ln(\varepsilon)}{\varepsilon+1} - \ln(2) + \ln(\varepsilon+1).$$

D'où, par croissance comparée, en passant à la limite quand ε tend vers 0, on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx = -\ln(2).$$