

Mécanique en référentiel galiléen (MPSI)

L'objectif de ce chapitre est de réinvestir les notions de mécanique vues en première année. Ce sera l'occasion de rediscuter de cinématique, de dynamique de translation du point et de rotation d'un solide autour d'un axe fixe. L'aspect énergétique sera finalement abordé. Un des objectifs de la mise en équation d'un mouvement est d'obtenir une équation différentielle du mouvement ; la résolution (analytique ou numérique) de telles équations sera réalisée en TD, de même que l'étude des régimes forcés.

A. Cinématique du point

A.1 Référentiel et système

Toute réflexion ayant pour but l'étude d'un mouvement nécessite de définir deux choses fondamentales :

- ▶ d'une part le système auquel on s'intéresse,
- ▶ et d'autre part, un référentiel d'étude.

Définition M0.1 - Référentiel

Un référentiel est constitué d'un point associé à un objet auquel sont associés trois axes fixes (constituant en général un repère orthonormé) et d'une horloge permettant de se repérer dans le temps. Le choix d'un référentiel est nécessaire pour l'étude d'un mouvement.

A.2 Grandeurs cinématiques

Pour décrire l'évolution d'un système, il est nécessaire de se doter d'outils de description, indépendamment des causes qui créent le mouvement du système : c'est l'objet de la cinématique.

Définition M0.2 - Grandeurs cinématiques

Les trois grandeurs utilisées sont le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$. Ils sont définis de la manière suivante :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad (1)$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ mesure les variations du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ au cours du temps. Les variations temporelles du vecteur vitesse $\vec{v}$ sont représentées par le vecteur accélération $\vec{a}$. On peut déterminer la vitesse $\vec{v}$ et la position $\overrightarrow{OM}$ du système par intégration successives du vecteur accélération $\vec{a}$.

A.3 Systèmes de coordonnées

Pour décrire correctement une situation, il faut choisir un système de coordonnées adapté. Il en existe trois : cartésien, cylindro-polaire et sphérique. Ils sont détaillés dans le *document dédié*.

B. Dynamique newtonienne

B.1 Actions mécaniques

En mécanique du point, les actions mécaniques sont modélisées par des vecteurs forces. On peut les classer en deux groupes. Les forces de contact qui nécessitent un contact en le système qui crée la force et celui qui la subit. Les forces à distance résultent quant à elles de l'action de champ.

Forces à distance	Forces de contact
le poids $m\vec{g}$	la tension d'un câble, fil ...
la force électrique $q\vec{E}$	la réaction d'un support, les forces de frottements
la force magnétique $q\vec{v} \times \vec{B}$	la force de rappel du ressort $-k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{AM}$

TABLE 1 – Actions mécaniques

B.2 Principe fondamental de la dynamique

C'est la loi fondamentale de la mécanique newtonienne.

Théorème M0.1 - Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, le principe fondamental de la dynamique (ou deuxième loi de Newton ou principe de la résultante cinétique) permet de relier les causes du mouvement (forces) aux outils de description du mouvement (cinématique).

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (2)$$

Théorème M0.2 - Principe d'inertie

Dans le cas particulier où la somme des forces extérieures appliquées au système est nulle, le vecteur accélération $\vec{a}$ est nul, ce qui implique que $\vec{v} = \text{cst}$. Le système est alors en translation uniforme ou statique. Ceci constitue le principe d'inertie ou première loi de Newton.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Translation uniforme ou immobilité} \quad (3)$$

B.3 Principes des actions réciproques

Théorème M0.3 - Principe des actions réciproques

On considère deux systèmes A et B en interaction. Si A exerce sur B une force $\vec{F}_{A/B}$ alors B exerce en retour une force sur A, notée $\vec{F}_{B/A}$, telle que :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} \quad (4)$$

Cette loi porte différents noms : principe des actions réciproques, principe action/réaction ou troisième loi de Newton.

B.4 Mouvement de translation circulaire

Lors des mouvement de translation circulaire d'un point, il est parfois plus commode d'utiliser les grandeurs dédiées qui vont être rappelées ici.

B.4.1 Moment cinétique

Définition M0.3 - Moment cinétique

Un point de masse m , animé d'un vecteur vitesse $\vec{v}$, en mouvement autour d'un point O dispose d'un moment cinétique $\vec{L}_O$ défini comme :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v} \quad (5)$$

B.4.2 Moment d'une force

Définition M0.4 - Moment d'une force

Une force $\vec{F}$ appliqué à un solide en mouvement autour d'un point O possède un moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ tel que :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$$

Le moment d'une force quantifie l'aptitude de la force à faire tourner le solide autour du point O.

Il est parfois plus commode de modéliser une action mécanique impliquant une rotation par un couple de forces, noté $\vec{\Gamma}$ ou $\vec{C}$, de même dimension que le moment d'une force.

B.4.3 Dynamique de translation circulaire

Théorème M0.4 - Loi du moment cinétique

La loi du moment cinétique est le principe fondamental de la dynamique appliqué pour les mouvements de translation circulaire (ou de rotation pour les solides). Elle indique que :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

C. Énergétique du point

C.1 Travail et puissance d'une action mécanique

Définitions M0.5 - Travail et puissance d'un force

- Le travail d'une force $\vec{F}$ (en Joules J) le long d'un chemin AB, notée $W_{AB}(\vec{F})$ est la circulation du vecteur-force sur ce chemin :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{AB} \vec{F} d\vec{\ell} \quad (6)$$

- La puissance d'une force $\mathcal{P}(\vec{F})$ (en Watt W) est le produit scalaire du vecteur force par le vecteur vitesse :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (7)$$

Dans le cas particulier (mais fréquent) du poids $m\vec{g}$, le travail se réduit à $W_{AB}(m\vec{g}) = \pm mg\Delta h_{AB}$, où Δh_{AB} représente la différence d'altitude entre A et B. En ce qui concerne le signe, une rapide réflexion sur le caractère moteur ou résistif du poids permet de trancher.

C.2 Énergies d'un système mécanique

Un système de masse m animé d'une vitesse v possède une énergie cinétique E_c telle que :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8)$$

Une énergie potentielle E_p est associée aux forces conservatives : une force est conservative quand son travail ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions initiales et finales. On en détaille quelques unes dans le tableau C.2. On rappelle que ces énergies potentielles sont définies à une constante près.

Force	Expression de la force	Énergie potentielle	Référence la plus simple : $E_p = 0$
pesanteur	$\vec{F} = m\vec{g}$	$E_p = \pm mgz$	au point le plus bas
élastique	$-k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{AM}$	$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$	pour $\ell = \ell_0$
gravitationnelle	$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$	$E_p = -G\frac{Mm}{r}$	pour $r \rightarrow \infty$
électrostatique	$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$	$E_p = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$	pour $r \rightarrow \infty$

TABLE 2 – Énergies potentielles

La somme des énergies potentielles et cinétique porte le nom d'énergie mécanique E_m :

$$E_m = E_c + \sum E_p \quad (9)$$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)	Théorème de l'énergie mécanique (TEM)
$\Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A} = \sum W_{AB}(\vec{F}_{\text{ext}})$	$\Delta E_m = E_{m_B} - E_{m_A} = \sum W_{AB}(\vec{F}_{\text{nc}})$
Théorème de la puissance cinétique (TPC)	Théorème de la puissance mécanique (TPM)
$\frac{d\mathcal{P}_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}})$	$\frac{d\mathcal{P}_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{nc}})$

TABLE 3 – Théorèmes de l'énergie et de la puissance

C.3 Théorèmes de l'énergie

Les théorèmes de l'énergie et de la puissance découlent du principe fondamental de la dynamique. On peut les utiliser sous forme intégrale, entre deux points A et B : on parle alors de théorème de l'énergie. On peut aussi les utiliser sous forme instantanée, au point M : on parle alors de théorème de la puissance.

Le théorème de l'énergie mécanique distingue les forces conservatives $\vec{F}_c$, auxquelles on peut associer une énergie potentielle E_p , des forces non-conservatives $\vec{F}_{\text{nc}}$ ne dérivant pas d'une énergie potentielle.

Les théorèmes de l'énergie et de la puissance indiquent que, si l'énergie cinétique (resp. mécanique) d'un système varie, c'est dû aux travaux des efforts mécaniques (resp. non conservatifs) appliqués au système. Dans un système conservatif, l'énergie mécanique est conservée.

D. Champ de force centrale conservatif

D.1 Force centrale conservative

Une force est qualifiée de centrale si elle s'écrit sous la forme : $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$. Elle est donc radiale et ne dépend que de r .

Cette force est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle E_p : $\delta W = -dE_p$.

Les forces gravitationnelles, coulombiennes ou élastiques sont des forces centrales conservatives.

D.2 Invariants du mouvement

Moment cinétique L'application directe de la loi du moment cinétique indique que : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$

$$\text{soit } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = r\vec{u}_r \times F\vec{u}_r = \vec{0}.$$

On en déduit donc que le moment cinétique du point M dans son mouvement autour de O est constant, c'est un invariant du mouvement : $\vec{L}_O = \vec{cst}$. Le mouvement est donc plan, orthogonalement à $\vec{L}_O$.

Le moment cinétique vaut, après calculs : $L_O = \left\| m.\vec{v} \times O\vec{M} \right\| = mr^2\dot{\theta}$. La quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est constante, constitue une intégrale première du mouvement et est appelée constante des aires¹.

1. C est la double de la vitesse aréolaire, c'est-à-dire l'aire parcourue par le vecteur rayon pendant dt

Énergie mécanique Il existe une énergie potentielle E_p associée à la force centrale, puisqu'elle est conservative. Ainsi donc, le système est conservatif et son énergie mécanique est une constante du mouvement : $E_m = \text{cste}$.

On peut détailler l'expression de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2)$. Le premier terme représente la partie "radiale" de l'énergie cinétique, la seconde la partie "rotation". Cette expression dépend des deux paramètres que sont r et θ . On peut le transformer en un système à 1 degré de liberté en faisant intervenir la constante des aires. L'énergie mécanique est alors :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p(r) + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \\ E_m &= E_{p,\text{eff}}(r) + E_c \end{aligned}$$

L'étude peut désormais se faire uniquement à 1D, de paramètre r .

D.3 Cas d'un champ de force centrale conservatif newtonien

Un champ de force est dit newtonien si la norme F de la force se présente sous la forme $F = \frac{k}{r^2}$, et l'énergie potentielle $E_p = \frac{k}{r}$. C'est notamment le cas des forces d'interaction électrostatique et gravitationnelle. On peut ainsi exprimer l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$: $E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{k}{r} + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$.

Deux possibilités sont envisageables : $k < 0$ la force est attractive et $k > 0$ la force est répulsive. On rappelle la méthode d'utilisation des graphiques d'énergie potentielle : les valeurs de r accessibles par le point M sont celles qui satisfont à la règle triviale : $E_m \geq E_{p,\text{eff}}(r)$.

Dans les discussions qui suivent, on note E_0 la valeur initiale de l'énergie mécanique.

— $k > 0$ la force est répulsive

Quelle que soit la valeur de E_0 , la particule M peut se rapprocher de O à la distance minimale d'approche r_1 . Les valeurs possibles de r sont donc comprises dans l'intervalle $[r_1; +\infty[$: on parle d'un *état de diffusion* ou d'*état libre*. Les trajectoires des particules sont des branches d'hyperboles.

C'est par exemple le cas lors de la déviation d'un noyau d'Hélium (particule α) par un atome d'or : c'est la diffusion de RUTHERFORD (1911).

Pour déterminer la valeur de r_1 , on utilise la condition $E_{p,\text{eff}}(r_1) = E_0$.

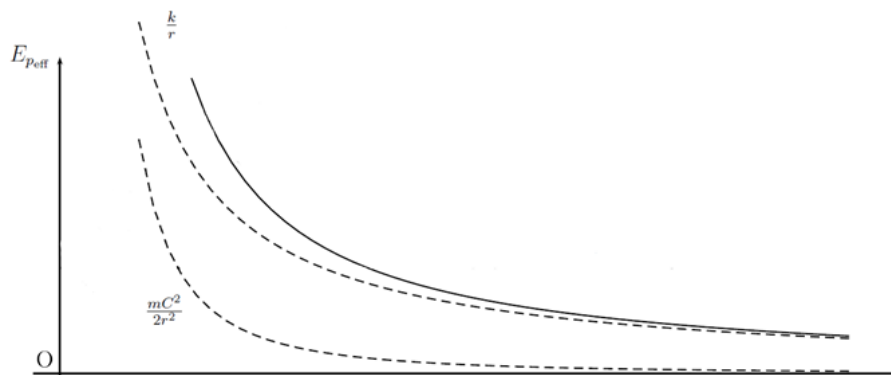


FIGURE 1 – Profil d'énergie potentielle $E_{p,\text{eff}}(r)$ pour $k > 0$

— $k < 0$ la force est attractive

On remarque deux points particuliers :

1. Le point pour lequel l'énergie potentielle $E_{p,\text{eff}}(r)$ passe par un minimum noté $E_{p,\text{min}}$. Cette valeur correspond au rayon noté $r_0 = \frac{mC^2}{|k|}^2$.
2. Le point pour lequel l'énergie potentielle $E_{p,\text{eff}}(r)$ s'annule. Cette valeur correspond au rayon noté $r_1 = \frac{r_0}{2}$.

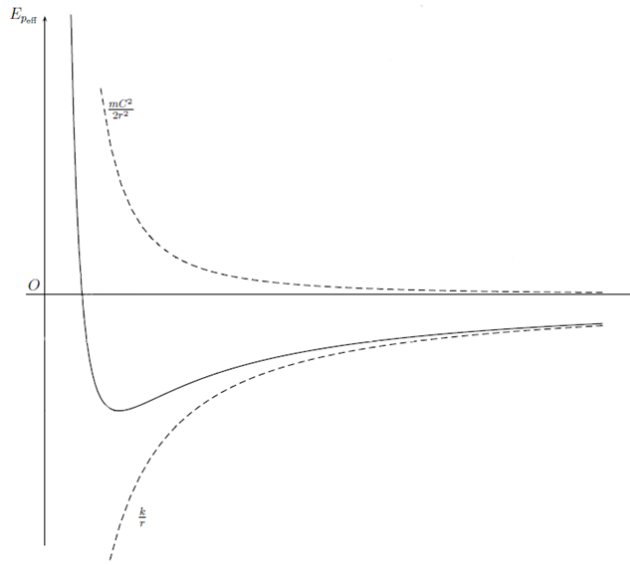


FIGURE 2 – Profil d'énergie potentielle $E_{p,\text{eff}}(r)$ pour $k < 0$

Suivant les valeurs de E_0 , on a les situations regroupées dans le tableau 4.

$E_0 > 0$	$E_0 < 0$	
	$E_{p,\text{min}} < E_0 < 0$	$E_0 = E_{p,\text{min}}$
M est dans un <i>état de diffusion</i> .	M est dans un <i>état lié</i> .	M est dans un <i>état lié</i> .
M peut s'approcher de O à une distance minimale d'approche, puis s'éloigner à l'infini. Il peut donc se libérer de l'attraction de O	r reste compris entre deux valeurs, il reste fini. M est piégé par l'attraction de O.	r ne prend qu'une seule valeur : r_0 . M est piégé par l'attraction de O.
Trajectoire hyperbolique ou parabolique	Trajectoire elliptique	Trajectoire circulaire

TABLE 4 – Types de trajectoire dans le cas attractif

D.4 Lois de KÉPLER

Les lois de KÉPLER sont des lois utilisées en astronomie, régissant le mouvement des planètes. Ces lois sont au nombre de 3 : les deux premières sont datées de 1609 et la troisième de 1618. C'est donc pour leur caractère historique qu'elles figurent ici.

Loi1 Les centres des planètes (satellites) décrivent des ellipses dont l'un des foyer est occupé par le soleil (astre attracteur).

-
2. Pour déterminer r_0 , on annule la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à r .
 3. Pour déterminer r_1 , on annule l'énergie potentielle.

Cette loi est cohérente avec la planéité des trajectoires démontrée plus haut. De plus, le fait que les trajectoires soient des ellipses est en adéquation avec les profils d'énergie potentielle.

Loi2 Les rayons vecteurs balayent des aires égales en des temps égaux.

Cette loi est la traduction de la loi des aires, introduisant la constante des aires C .

Loi3 Le rapport des carrés des périodes de révolution sur les cubes des demi grands axes sont indépendants de la planète.

E. Solide en rotation autour d'un axe fixe

E.1 Moment d'inertie J

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, on définit le moment d'inertie J par rapport à cet axe et homogène à une masse multipliée par une longueur au carrée. J s'exprime donc en kg.m^2 .

Cette grandeur inertielle rend compte de la répartition de la masse autour de l'axe de rotation. Plus J est faible, plus la masse est regroupée autour de l'axe de rotation.

E.2 Équivalence et bilan

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, on peut faire un parallèle important avec un système en translation rectiligne, si on maîtrise le tableau d'équivalence 5 donné ci-contre.

	Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
Grandeurs cinématiques	position x , vitesse $\dot{x}$ ou v , accélération $\ddot{x}$	position θ , vitesse $\dot{\theta}$ ou ω , accélération $\ddot{\theta}$
Grandeur inertielle	masse m	moment d'inertie J
Actions mécaniques	force $\vec{F}$	couple $\vec{C}$ ou moment de force $\vec{M}$
PFD	$m.\ddot{x} = \sum F$	$J.\ddot{\theta} = \sum C$
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$
Puissance des actions	$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}$	$\mathcal{P} = \vec{C}.\vec{\omega}$

TABLE 5 – Équivalence Translation rectiligne - Rotation autour d'un axe fixe