

CHAPITRE 5

DIAGONALISATION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES

I	Éléments propres	4
I.1	Éléments propres d'un endomorphisme	4
I.2	Propriétés	6
I.3	Éléments propres d'une matrice	7
II	Rappels sur les polynômes	12
II.1	Définitions	12
II.2	Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	14
II.3	Racines	15
II.4	Ordre de multiplicité d'une racine	16
II.5	Somme et produit des racines d'un polynôme	18
II.6	Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$	19
II.7	Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$	20
II.8	Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$	20
III	Éléments propres en dimension finie	22
III.1	Recherche des valeurs propres : le polynôme caractéristique	22
III.2	Ordre de multiplicité d'une valeur propre	26
III.3	Polynôme caractéristique et sous-espace stable	29
III.4	Recherche des vecteurs propres	30
IV	Diagonalisation	32
IV.1	Endomorphisme diagonalisable	32
IV.2	Caractérisations des endomorphismes diagonalisables	33
IV.3	Matrices diagonalisables	35
IV.4	Applications de la diagonalisation	38
	Calcul des puissances d'une matrice	38
	Résolution d'un système de suites récurrentes (sur un exemple)	39
	Résolution d'un système différentiel à coefficients constants (sur un exemple)	40
V	Annexe	41
V.1	À la fin de ce chapitre,...	41
V.2	Testons l'IA sur ce chapitre	42

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;
- l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v . Notation $\text{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe. Si un polynôme P annule u , toute valeur propre de u est racine de P . Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
b) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u . Coefficients de degrés 0 et $n - 1$. Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique. Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité. Théorème de Cayley-Hamilton.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités. La démonstration n'est pas exigible.
c) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E . Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes différentiels à coefficients constants. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$. Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Traduction matricielle.
	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Position du problème

- L'étude de systèmes récurrents linéaires ou de systèmes différentiels linéaires se ramène à l'étude d'un endomorphisme f ou de sa matrice A dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .
- On peut alors être amené, ou bien à déterminer les puissances de A , ou bien à déterminer l'inverse de A . Il est important de bien choisir la base $\mathcal{B}$ de sorte que les calculs soient les plus simples possibles.
- Le cas idéal est celui où la matrice A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires. Dans ce cas : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $f(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$. Autrement dit, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les droites vectorielles $\text{Vect}(e_i)$ sont stables par f , c'est-à-dire : $f(\text{Vect}(e_i)) = \text{Vect}(f(e_i)) \subset \text{Vect}(e_i)$.

- Les calculs sont alors très simples : soit $x \in E$ qu'on décompose dans la base $\mathcal{B}$. On a alors :

$$\bullet \quad x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k \text{ et } f(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \lambda_k \cdot e_k.$$

$$\bullet \quad \text{Plus généralement, pour tout } p \in \mathbb{N}, f^p(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \lambda_k^p \cdot e_k \text{ et } A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$

- Si les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont non nuls, alors f est un automorphisme et A est inversible.

$$\text{De plus, } f^{-1}(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{1}{\lambda_k} \cdot e_k \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

- L'objectif de ce chapitre est de donner des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une telle base $\mathcal{B}$ et de déterminer les vecteurs qui forment cette base.

I. Éléments propres

I.1. Éléments propres d'un endomorphisme



Définition 5.1 – Valeur propre, vecteur propre et sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de f** lorsqu'il existe $x \in E$ tel que x est non nul et $f(x) = \lambda.x$. De plus, on dit qu'un tel x est **un vecteur propre associé à la valeur propre λ** .

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f . Le **sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ** est :

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda.\text{Id}_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda.x\}.$$

Remarque 5.1

On a aussi : $E_\lambda(f) = \text{Ker}(\lambda.\text{Id}_E - f)$.

Exemple 5.1 – Homothéties

Soit h une homothétie de E , c'est-à-dire, $h = \lambda.\text{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Tout vecteur $x \neq 0$ est un vecteur propre de h pour la valeur propre λ et $E_\lambda(h) = E$.

Exemple 5.2 – Projections et symétries

On suppose que $E = F \oplus G$ où $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$.

Soit p la *projection* sur F parallèlement à G .

Les vecteurs non nuls de F sont des vecteurs propres de p pour la valeur propre 1 : en effet,

$$\forall x \in F \setminus \{0_E\}, p(x) = x = 1.x.$$

Les vecteurs non nuls de G sont des vecteurs propres de p pour la valeur propre 0 : en effet,

$$\forall x \in G \setminus \{0_E\}, p(x) = 0_E = 0.x.$$

De plus, $E_1(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \text{Im}(p) = F$ et $E_0(p) = \text{Ker}(p) = G$.

Soit s la *symétrie* par rapport à P parallèlement à D .

Les vecteurs non nuls de F sont des vecteurs propres de s pour la valeur propre 1.

$$\forall x \in F \setminus \{0_E\}, s(x) = x = 1.x$$

Les vecteurs non nuls de G sont des vecteurs propres de s pour la valeur propre -1 .

$$\forall x \in G \setminus \{0_E\}, s(x) = -x = (-1).x$$

De plus, $E_1(s) = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$ et $E_{-1}(s) = \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = G$.

Remarque 5.2

- ▶ Les sous-espaces propres de f sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'une application linéaire). De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f , alors $E_\lambda(f)$ est l'ensemble composé du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ .
- ▶ L'équation $f(x) = \lambda.x$ d'inconnue $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelée **équation aux éléments propres**.
- ▶ **Il existe une infinité de vecteurs propres associés à une valeur propre.**
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.
On considère x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . On a donc, $f(x) = \lambda.x$
Pour tout $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, on a, $\alpha.x \neq 0_E$ et, par linéarité de f : $f(\alpha.x) = \alpha.f(x) = \alpha.(\lambda.x) = \lambda.(\alpha.x)$
Donc, le vecteur $\alpha.x$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .
- ▶ **Un vecteur propre est associé à une unique valeur propre.**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que x soit un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et la valeur propre μ : autrement dit, $x \neq 0_E$, $f(x) = \lambda.x$ et $f(x) = \mu.x$.
D'où, $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x = f(x) - f(x) = 0_E$. Or, $x \neq 0_E$. Donc, $\lambda = \mu$.
- ▶ **Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les sous-espaces propres de f sont stables par f et pour toute valeur propre λ de f , l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$ induit par f est une homothétie de rapport λ .**
En effet, l'endomorphisme $f - \lambda.\text{Id}_E$ est un polynôme en f donc commute avec f . Donc, $E_\lambda(f)$ est stable par f .
De plus, pour tout $x \in E_\lambda(f)$, on a $f_{E_\lambda(f)}(x) = f(x) = \lambda.x$. L'endomorphisme induit $f_{E_\lambda(f)}$ est une homothétie de rapport λ .
- ▶ Les vecteurs propres d'un endomorphisme f sont :
 - soit les vecteurs non nuls du noyau de f ,
 - soit les vecteurs non nuls qui ne changent pas de direction sous l'action de f .

Théorème 5.1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$ non nul. On note $D = \text{Vect}(x_0)$. La droite vectorielle D est stable par f si, et seulement si, x_0 est un vecteur propre de f .

Démonstration

($\Rightarrow$) Supposons la droite D stable par f .

On a $x_0 \in D$, donc, $f(x_0) \in D = \text{Vect}(x_0)$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda.x_0$. Comme $x_0 \neq 0_E$, on en déduit que x_0 est un vecteur propre de f .

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que x_0 est un vecteur propre de f . Il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda.x_0$.

Soit $x \in D = \text{Vect}(x_0)$. Alors $x = \mu.x_0$ où $\mu \in \mathbb{K}$. Par linéarité de f , on a $f(x) = f(\mu.x_0) = \mu.f(x_0) = \mu.(\lambda.x_0) = (\lambda \times \mu).x_0 \in D$. Donc, $f(D) \subset D$. Donc, D est stable par f . □

Exercice 5.1

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $D \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall f \in E, D(f) = f'$$

Résolution

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$D(f) = \lambda.f \iff f' = \lambda.f \iff f \in \text{Vect}(e_\lambda)$$

où $e_\lambda : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\lambda \times t} \end{matrix}$. La fonction e_λ n'est pas la fonction nulle, donc λ est une valeur propre de D et e_λ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Tout complexe λ est valeur propre de D et $E_\lambda(D) = \text{Vect}(e_\lambda)$.

I.2. Propriétés

Proposition 5.1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences :

Le scalaire λ est une valeur propre de $f \iff \text{Ker}(f - \lambda.\text{Id}_E) \neq \{0_E\} \iff f - \lambda.\text{Id}_E$ est non injectif.

En particulier, 0 est valeur propre de f si, et seulement si, $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ si, et seulement si, f est non injectif.

Démonstration

► La seconde équivalence a été montrée dans le chapitre 1.

► Montrons la première.

($\Rightarrow$) Supposons que λ est une valeur propre de f . Alors il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda.x$. D'où, $(f - \lambda.\text{Id}_E)(x) = 0_E$. Donc, $\text{Ker}(f - \lambda.\text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(f - \lambda.\text{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Alors il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $(f - \lambda.\text{Id}_E)(x) = 0_E$. D'où, $f(x) = \lambda.x$. Comme x est non nul, x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . $\square$

Théorème 5.2

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f .

Si g est un endomorphisme de E qui commute avec f , alors $E_\lambda(f)$ est stable par g .

Démonstration

Soit $x \in E_\lambda(f)$. Montrons que $g(x) \in E_\lambda(f)$.

Comme f et g commutent, on a : $f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.

Or, $x \in E_\lambda(f)$, donc $f(x) = \lambda.x$.

Par linéarité de g , on a donc $f \circ g(x) = g(\lambda.x) = \lambda.g(x)$. D'où, $g(x) \in E_\lambda(f)$. Donc, $g(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$. Ainsi, $E_\lambda(f)$ est stable par g . $\square$

Théorème 5.3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes.

Les espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$ sont en somme directe.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on considère u_i un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i . La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

Démonstration

► Par récurrence sur p . On note H_p : « si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de f deux à deux distinctes, alors les espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$ sont en somme directe. »

Initialisation. $p = 1$. Il n'y a rien à faire.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose H_p vraie et on montre H_{p+1} . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes. Montrons que la somme $E_{\lambda_1}(f) + \dots + E_{\lambda_p}(f) + E_{\lambda_{p+1}}(f)$ est directe.

Soit $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}) \in E_{\lambda_1}(f) \times \dots \times E_{\lambda_p}(f) \times E_{\lambda_{p+1}}(f)$ tel que $u_1 + \dots + u_p + u_{p+1} = 0_E$.

On applique f à cette égalité, il vient : $f(u_1) + \dots + f(u_p) + f(u_{p+1}) = f(0_E) = 0_E$.

D'où, par définition de $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$, on a : $\lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_p.u_p + \lambda_{p+1}.u_{p+1} = 0_E$. Or,

$$\lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_p.u_p + \lambda_{p+1}.u_{p+1} = \lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_p.u_p - \lambda_{p+1}.(u_1 + \dots + u_p) = (\lambda_1 - \lambda_{p+1}).u_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p+1}).u_p.$$

Donc, $(\lambda_1 - \lambda_{p+1}).u_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p+1}).u_p = 0_E$. Or, par hypothèse, la somme $E_{\lambda_1}(f) + \dots + E_{\lambda_p}(f)$ est directe.

Donc, $(\lambda_1 - \lambda_{p+1}).u_1 = \dots = (\lambda_p - \lambda_{p+1}).u_p = 0_E$. Or, les λ_k sont distincts deux à deux. Donc, $u_1 = \dots = u_p = 0_E$.

D'où, $u_{p+1} = u_1 + \dots + u_p + u_{p+1} = 0_E$.

Ainsi, la somme $E_{\lambda_1}(f) + \dots + E_{\lambda_p}(f) + E_{\lambda_{p+1}}(f)$ est directe. Donc, H_{p+1} est vraie. Ce qui achève la récurrence.

► Les vecteurs $u_1 \in E_{\lambda_1}(f), \dots, u_p \in E_{\lambda_p}(f)$ sont non nuls et la somme $\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$ est directe, donc la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. $\square$

Exercice 5.2

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des complexes distincts deux à deux. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $e_\lambda : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\lambda \times t} \end{matrix}$.

Montrer que la famille $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_p})$ est libre.

Résolution

Appliquer le théorème précédente : e_{λ_k} est associé à la valeur propre λ_k .

Proposition 5.2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$.

Alors, f possède au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs propres associés. Alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Donc $p \leq n$. $\square$

Remarque 5.3

On affinera ce résultat plus tard.

I.3. Éléments propres d'une matrice

Définition 5.2 – Valeur propre, vecteur propre et sous-espace propre d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de A** lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que : X est non nul et $A \times X = \lambda.X$.

De plus, on dit qu'un tel X est **un vecteur propre associé à la valeur propre λ** .

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A . Le **sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ** est : $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda.I_n)$.

Remarque 5.4

- En identifiant vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on remarque que les éléments propres de A sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A : c'est-à-dire l'application $\begin{matrix} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & A \times X \end{matrix}$
- Un scalaire λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $\text{Ker}(A - \lambda.I_n) \neq \{0\}$. Ce qui est équivalent à dire que la matrice carrée $A - \lambda.I_n$ n'est pas inversible.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des valeurs propres de A vue comme une matrice à coefficients réels est inclus dans l'ensemble des valeurs propres de A vue comme une matrice à coefficients complexes. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $A \times X = \lambda.X$. Cette égalité est encore vraie dans $\mathbb{C}$. On en déduit que λ est une valeur propre de A vue comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 5.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients **réels**.

En voyant A comme une matrice à coefficients complexes, on a l'équivalence : λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A .

Démonstration

On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que λ soit une valeur propre de A , vue comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $A \times X = \lambda \cdot X$. Alors, en conjuguant cette égalité, on a :

$$\bar{A} \times \bar{X} = \bar{\lambda} \times \bar{X}.$$

Comme les coefficients de A sont réels, on a $A \times \bar{X} = \bar{\lambda} \times \bar{X}$. De plus, $X \neq 0$ donc $\bar{X} \neq 0$.

Donc $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A vue comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La réciproque est claire (appliquer ce qui précède avec λ remplacé par $\bar{\lambda}$). □

Proposition 5.4

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \det(\lambda \cdot I_n - A) = 0 \iff \text{rg}(\lambda \cdot I_n - A) < n.$$

Démonstration

Il suffit de nier les équivalences bien connues :

$$\lambda \cdot I_n - A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{Ker}(\lambda \cdot I_n - A) = \{0\} \iff \det(\lambda \cdot I_n - A) \neq 0 \iff \text{rg}(\lambda \cdot I_n - A) = n.$$

□

Remarque 5.5 – Cas d'une matrice diagonale

Si $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, alors $\det(\lambda \cdot I_n - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_i)$.

Donc, les valeurs propres de A sont $a_1, \dots, a_n$.

Les valeurs propres d'une matrice diagonale se lisent sur sa diagonale.

Remarque 5.6 – Cas d'une matrice triangulaire

Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure alors $\det(\lambda \cdot I_n - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_i)$.

Donc, les valeurs propres de A sont $a_1, \dots, a_n$.

Si A est une matrice triangulaire inférieure, on trouve le même résultat.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur sa diagonale.



Exercice 5.3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- Déterminer les éléments propres de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \alpha.J + \beta.I_n$.

Résolution

- Calculons $\det(\lambda.I_n - J)$.

On a :

$$\det(\lambda.I_n - J) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda-n) \times \lambda^{n-1}.$$

Donc, les valeurs propres de J sont 0 et n .

On résout les équations aux éléments propres. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$J \times X = 0.X \iff \dots \iff X = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$E_0(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$J \times X = n.X \iff \dots \iff X = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$E_n(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathbb{K}^n$. On a :

$$A \times X = \lambda.X \iff (\alpha.J + \beta.I_n).X = \lambda.X \iff \alpha.J \times X = (\lambda - \beta).X$$

Cas 1 : $\alpha \neq 0$. On a :

$$A \times X = \lambda.X \iff J \times X = \left(\frac{\lambda - \beta}{\alpha} \right).X.$$

On en déduit que λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\frac{\lambda - \beta}{\alpha}$ est valeur propre de J .

Donc, les valeurs propres de A vérifient $\frac{\lambda - \beta}{\alpha} = 0$ ou $\frac{\lambda - \beta}{\alpha} = n$.

Donc, les valeurs propres de A sont $\lambda = \beta$ et $\lambda = \alpha \times n + \beta$.

D'autre part, les équivalences précédentes montrent que :

$$E_\beta(A) = E_0(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{\alpha \times n + \beta}(A) = E_n(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Cas 2 : $\alpha = 0$. Dans ce cas, $A = \beta \cdot I_n$ est diagonale. La seule valeur propre de A est alors β et $E_\beta(A) = \text{Ker}(A - \beta \cdot I_n) = \mathbb{K}^n$.

Théorème 5.4

On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et $\mathcal{B}$ une base de E .

On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Un scalaire λ est une valeur propre de f , si et seulement si, λ est une valeur propre de A .

Le vecteur x est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ si, et seulement si, X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ .

Démonstration

Par théorème, on a :

$$x \in E_\lambda(f) \iff f(x) = \lambda \cdot x \iff A \times X = \lambda \cdot X \iff X \in E_\lambda(A).$$

De plus, $x \neq 0_E$ si, et seulement si, $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que λ est une valeur propre de f , si et seulement si, λ est une valeur propre de A . De plus, x est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ si, et seulement si X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ . $\square$

Corollaire 5.1

Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration

Deux matrices semblables A et B semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Donc, par la proposition précédente λ est valeur propre de A si, et seulement si λ est valeur propre de f si, et seulement si, λ est valeur propre de B . $\square$

Remarque 5.7 – Rappel : matrices semblables

On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1} \times A \times P$.

Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant et même rang. La réciproque est fausse (voir exemple ci-dessous).

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et A' sont semblables si, et seulement si, il existe $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telles que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Si A et A' sont semblables, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les matrices $A - \lambda \cdot I_n$ et $A' - \lambda \cdot I_n$ sont semblables. En effet, dans ce cas il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1} \times A \times P$. D'où, $A' - \lambda \cdot I_n = P^{-1} \times A \times P - P^{-1} \times \lambda \cdot I_n \times P = P^{-1} \times (A - \lambda \cdot I_n) \times P$.

💡 Exemple 5.3

► Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables. En effet, $\det(A - I_3) = 1 \neq 0 = \det(A' - I_3)$:

1 n'est pas valeur propre de A mais est valeur propre de A' . (Remarque : on a $\det(A) = \det(A') = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3$ et $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A') = 3$).

► Montrons que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A . Autrement dit, en notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et donc, $f(e_1) = -e_3$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = e_2$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs définis par $e'_1 = e_2$, $e'_2 = e_3$ et $e'_3 = e_1$. La famille $\mathcal{B}'$ est bien une base de

$\mathbb{R}^3$. De plus, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$. Ainsi, les matrices A et A' représentent le même endomorphisme dans

deux bases différentes, donc A et A' sont semblables.



Proposition 5.5

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de A deux à deux distinctes.

Les espaces propres $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_p}(A)$ sont en somme directe.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on considère X_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i . La famille $(X_1, \dots, X_p)$ est libre.

Démonstration

On note f_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . On a par définition, $E_{\lambda}(A) = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n) = \text{Ker}(f_A - \lambda \cdot \text{Id}_{f_A}) = E_{\lambda}(f_A)$. Il suffit donc d'appliquer le théorème 5.3 page 6 à f_A . $\square$



Proposition 5.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors, A possède au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration

Même démonstration que la proposition 5.2 page 7 $\square$

👁 Remarque 5.8

On affinera ce résultat plus tard.

II. Rappels sur les polynômes

II.1. Définitions



Définition 5.3 – Polynôme

On appelle **polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$** , toute expression de la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k,$$

où $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \in \mathbb{K}$ et X est un symbole formel appelé **indéterminée du polynôme**.

Les éléments $a_0, \dots, a_n$ sont appelés les **coefficients de P** .

L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.

Remarque 5.9

- En identifiant les éléments λ de $\mathbb{K}$ aux polynômes λX^0 , on a l'inclusion $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[X]$. Les polynômes λX^0 , avec $\lambda \in \mathbb{K}$, sont appelés **polynômes constants**.
- Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.
- Le **polynôme nul** est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On le note 0.



Définition 5.4 – Addition de polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Quitte à compléter le polynôme P ou Q avec des coefficients nuls, on peut supposer que $n = m$.

On définit la **somme de P et Q** par :

$$P + Q = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k.$$



Définition 5.5 – Multiplication par un scalaire

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On définit le **produit de P par le scalaire λ** :

$$\lambda.P = \sum_{k=0}^n \lambda \times a_k X^k.$$



Définition 5.6 – Multiplication de polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ deux polynômes. On définit le produit de P et Q par :

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$$

où

$$c_k = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} a_i \times b_j = \sum_{l=0}^k a_l \times b_{k-l}.$$

Remarque 5.10 – Puissance de polynômes

On pose $P^0 = 1$ et on définit par récurrence la puissance k -ième de P , avec $k \in \mathbb{N}$, par : $P^{k+1} = P^k \times P$. On a : $P^k = \underbrace{P \times \cdots \times P}_{k \text{ fois}}$.

Proposition 5.7

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k \times Q^{n-k} \quad (\text{Formule du binôme de Newton})$$

et

$$P^n - Q^n = (P - Q) \times \sum_{k=0}^{n-1} P^k \times Q^{n-1-k}.$$

Démonstration

La formule de binôme de démontre par récurrence. La factorisation de montre en développant le membre de gauche de l'égalité (un télescope apparaît). □

Définition 5.7 – Composition de polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$. On définit la **composée de P par Q** par :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k.$$

Remarque 5.11

Le polynôme composé $P \circ Q$ est aussi noté $P(Q)$.

On écrira alors aussi $P(X)$ pour désigner le polynôme P et préciser qu'il est exprimé avec l'indéterminée X .

Définition 5.8 – Degré d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme non nul.

► On appelle **degré de P** le plus grand indice k tel que $a_k \neq 0$. On note cet indice $\deg(P)$.

On adopte la convention : $\deg(0) = -\infty$.

► Le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé **coefficient dominant de P** .

► Lorsque le coefficient dominant de P est 1, on dit que P est un **polynôme unitaire**.

Proposition 5.8 – Degré et opérations sur $\mathbb{K}[X]$

Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- ▶ On a : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- ▶ Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- ▶ Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $a_{\deg(P)} + b_{\deg(P)} \neq 0$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- ▶ Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $a_{\deg(P)} + b_{\deg(P)} = 0$, alors $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- ▶ Si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$.
- ▶ On a : $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- ▶ Si $\deg(Q) \geq 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Définition 5.9 – Polynôme dérivé

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On appelle **polynôme dérivé de P** le polynôme P' défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^n k \times a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \times a_{k+1} X^k.$$

Définition 5.10 – Dérivée d'ordre supérieur

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit par récurrence le **polynôme dérivé d'ordre k de P** par :

$$P^{(0)} = P \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P^{(k+1)} = (P^{(k)})'.$$

Proposition 5.9 – Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors en notant n le degré de P , on a :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

II.2. Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 5.11 – Diviseur

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On dit que B **divise** A , ou que B est un **diviseur** de A , ou que A est un **multiple** de B , lorsqu'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times C$. On note alors $B|A$.

Théorème 5.5 – Division euclidienne

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

Il existe unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

On appelle Q le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B .

Démonstration

► **Existence** : Si A est le polynôme nul alors $(Q, R) = (0, 0)$ convient.

On montre le résultat pour les polynômes A non nul en procédant par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n : « pour tout polynôme de degré n , il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times Q + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$ ».

On note $B = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ où $b_m \neq 0$ est le coefficient dominant de P .

Hérédité. $n = 0$. Soit A un polynôme de degré inférieur à 0.

- Si $\deg(B) \geq 1$, alors $(Q, R) = (0, A)$ convient.
- Si $\deg(B) = 0$, alors $m = 0$ et $B = b_m \in \mathbb{K}^*$. D'où, $(Q, R) = \left(\frac{A}{B}, 0\right)$ convient.

Donc, H_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Soit A un polynôme de degré $n+1$.

- Si $\deg(A) < \deg(B)$, alors $(Q, R) = (0, A)$ convient.
- Supposons $\deg(A) \geq \deg(B)$. On note a_{n+1} le coefficient dominant de A . Le polynôme :

$$A - \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} \times B$$

est de degré inférieur ou égal à n . Par hypothèse de récurrence, il existe, $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A - \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} \times B = Q_1 \times B + R_1.$$

avec $\deg(R_1) < \deg(B)$. Ainsi, en posant $R = R_1$ et $Q = Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m}$, on a

$$A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

► **Unicité** : Soient $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$A = B \times Q_1 + R_1, \quad A = B \times Q_2 + R_2, \quad \deg(R_1) < \deg(B) \quad \text{et} \quad \deg(R_2) < \deg(B).$$

Alors, $(Q_1 - Q_2) \times B = R_2 - R_1$.

Supposons par l'absurde $Q_1 \neq Q_2$. Alors, $\deg(Q_1 - Q_2) \in \mathbb{N}$ et par propriété des degrés,

$$\deg((Q_1 - Q_2) \times B) = \underbrace{\deg(Q_1 - Q_2) + \deg(B)}_{n \in \mathbb{N}} \geq \deg(B).$$

Or, $\deg((Q_1 - Q_2) \times B) = \deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$. Absurde. Ainsi $Q_1 = Q_2$. Puis $R_1 = R_2$.

Remarque 5.12

► Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Le polynôme B divise A si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

► Si A et $B \neq 0$ sont deux polynômes à coefficients réels, alors les restes et les quotients de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ sont les mêmes.

II.3. Racines

Soient $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On note $P(\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i \times \alpha^i$.

**Définition 5.12 – Racine d'un polynôme**

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α **est une racine, ou un zéro, de P dans $\mathbb{K}$** lorsque $P(\alpha) = 0$.

 Remarque 5.13

Soit P un polynôme à **coefficients réels**. Si α est racine de P , vu comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, alors $\bar{\alpha}$ est racine de P .

 Théorème 5.6

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. L'élément α est une racine de P si, et seulement si, $(X - \alpha)$ divise P .

Démonstration

Si le polynôme P est nul, l'équivalence est claire. Dans la suite, on suppose $P \neq 0$ et on note $n \in \mathbb{N}$ le degré de P .

($\Rightarrow$) On suppose que α est racine de P . Par la formule de Taylor pour les polynômes (Proposition 5.9 page 14), on a :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = (X - \alpha) \times \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{k-1}}_{\in \mathbb{K}[X]}.$$

Donc, $X - \alpha$ divise P .

($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose que $X - \alpha$ divise P . D'où, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha) \times Q$. Donc $P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \times Q(\alpha) = 0$.

Donc, α est racine de P . □

II.4. Ordre de multiplicité d'une racine**Définition 5.13 – Ordre de multiplicité d'une racine**

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle **ordre de multiplicité de α** le plus grand entier m tel que $(X - \alpha)^m$ divise P .

On dit alors que α est **racine d'ordre m** de P .

 Remarque 5.14

Une racine de P est une racine d'ordre de multiplicité au moins 1 de P .

Lorsque $m \geq 2$, on dit que α est **racine multiple** de P .

Lorsque $m = 1$, on dit que α est **racine simple** de P .

Lorsque $m = 2$, on dit que α est **racine double** de P .

Lorsque $m = 3$, on dit que α est **racine triple** de P ...

 Théorème 5.7

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) α est racine de multiplicité **au moins** m de P ,
- (ii) $(X - \alpha)^m$ divise P ,
- (iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.

 Théorème 5.8

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) α est racine de multiplicité m de P ,
- (ii) $(X - \alpha)^m$ divise P et $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P ,
- (iii) il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m \times Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$,

(iv) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Théorème 5.9

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

α est racine de multiplicité m de P , vu comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ si, et seulement si, $\bar{\alpha}$ est racine de multiplicité m de P .

Théorème 5.10

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, n scalaires deux à deux distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, α_k est racine de multiplicité au moins m_k de P si, et seulement si, $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$ divise P .

Démonstration

► Supposons que $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$ divise P . Soit $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $(X - \alpha_l)^{m_l}$ divise $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$. Par transitivité de la relation de divisibilité, $(X - \alpha_l)^{m_l}$ divise P . Par définition de la multiplicité d'une racine, α_l est racine de multiplicité au moins m_l de P : ceci est vrai, pour tout $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

► Pour montrer la réciproque, on procède par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note H_n : « pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, tous scalaires deux à deux distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$, si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, α_k est racine de multiplicité au moins m_k de P alors, $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$ divise P ».

Initialisation : si $n = 1$, il n'y a rien à faire : c'est la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n vraie et montrons H_{n+1} .

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n + 1$ scalaires deux à deux distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ et $m_1, \dots, m_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, α_k est racine de multiplicité au moins m_k de P .

Par hypothèse de récurrence, $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$ divise P : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que,

$$P = Q \times \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

On évalue l'égalité précédente en α_{n+1} :

$$P(\alpha_{n+1}) = Q(\alpha_{n+1}) \times \prod_{k=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_k)^{m_k}.$$

Or, les α_i sont distincts deux à deux, donc $\prod_{k=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_k)^{m_k} \neq 0$. Donc α_{n+1} est racine de Q . Notons r sa multiplicité en tant que racine du polynôme Q . Par définition de la multiplicité, on a :

$$Q = (X - \alpha_{n+1})^r \times Q_1 \quad \text{avec} \quad Q_1(\alpha_{n+1}) \neq 0.$$

Donc,

$$P = (X - \alpha_{n+1})^r \times Q_1 \times \underbrace{\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}}_{=Q_2}$$

où le polynôme Q_2 vérifie $Q_2(\alpha_{n+1}) \neq 0$. Ainsi, α_{n+1} est racine de multiplicité exactement r de P . Donc $m_{n+1} \leq r$ et :

$$P = \underbrace{Q_1 \times (X - \alpha_{n+1})^{r-m_{n+1}}}_{\in \mathbb{K}[X]} \times \prod_{k=1}^{n+1} (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Ainsi, $\prod_{k=1}^{n+1} (X - \alpha_k)^{m_k}$ divise P . Donc H_{n+1} est vraie. Ce qui achève la récurrence.

Corollaire 5.2

Un polynôme de degré n possède au plus n racines distinctes comptées avec multiplicité.

Corollaire 5.3

Si un polynôme $\mathbb{K}_n[X]$ possède au moins $n + 1$ racines distinctes deux à deux, alors ce polynôme est nul.

 Exemple 5.4

- La fonction sinus n'est pas nulle et s'annule une infinité de fois. Ce n'est donc pas une fonction polynomiale.
- Soit f et g deux fonctions polynomiales telles que $f \times g = 0$. Alors $f = 0$ ou $g = 0$.

II.5. Somme et produit des racines d'un polynôme**Définition 5.14 – Polynôme scindé**

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ **non constant**.

► On dit que P est **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ éléments de $\mathbb{K}$ (non nécessairement distincts deux à deux) tels que :

$$P = \lambda.(X - \alpha_1) \times \dots \times (X - \alpha_n).$$

On dit que les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les **racines de P comptées avec multiplicité**.

► On dit que P est **scindé à racines simples sur** $\mathbb{K}$ s'il est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont de multiplicité 1.

 Remarque 5.15

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les racines deux à deux distinctes de P et $m_1, \dots, m_q$ leur multiplicité respective. On a alors

$$P = \lambda. \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

**Théorème 5.11**

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul.

Le polynôme P est scindé si, et seulement si, son degré est égal à la somme des multiplicités de ses racines dans $\mathbb{K}$.

**Théorème 5.12**

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ et de degré n :

$$P = a_n.(X - \alpha_1) \times \dots \times (X - \alpha_n).$$

où les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de P comptées avec multiplicité.

Alors,

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n = (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n}.$$

💡 Exemple 5.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$. où $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$ est l'ensemble des racines n -ème de l'unité. On retrouve les relations :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = (-1)^{n+1}.$$

📖 Remarque 5.16 – Réécriture du théorème 5.12

On reprend les notations de la proposition précédente. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines deux à deux distinctes de P et $m_1, \dots, m_p$ leur multiplicité respective. On a alors $P = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{m_i}$ et

$$\sum_{i=1}^q m_i \times \lambda_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^q \lambda_i^{p_i} = (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n}.$$

📖 Remarque 5.17 – Cas particulier d'un polynôme de degré 2

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et $a \neq 0$. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{K}$ et on note r_1 et r_2 les racines de P comptées avec multiplicité (on peut avoir $r_1 = r_2$). On a alors :

$$P = aX^2 + bX + c = a \times (X - r_1) \times (X - r_2).$$

D'où,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 \times r_2 = \frac{c}{a}$$

II.6. Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$



Définition 5.15 – Polynômes irréductibles

On dit qu'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est **irréductible** lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) P est non constant ($\deg(P) \geq 1$).

(ii) S'il existe $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que $P = A \times B$, alors A ou B est constant.

💡 Exemple 5.6

- Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- Si un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré supérieur à 2 possède une racine, alors il n'est pas irréductible. La réciproque est fausse.
Le polynôme $X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1) \times (X^2 - \sqrt{2}X + 1)$ n'est pas irréductible et ne possède pas de racine réelle.
- Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 est irréductible, si et seulement si, il n'a pas de racine réelle.
- Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 n'est jamais irréductible (théorème des valeurs intermédiaires).
- $X^2 + 1 = (X - i) \times (X + i)$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$, mais pas de $\mathbb{C}[X]$.

II.7. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 5.13 – d'Alembert-Gauß

Un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 5.14

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Théorème 5.15 – Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Tout polynôme P non nul de $\mathbb{C}[X]$ se factorise de façon unique, à l'ordre des facteurs près, sous la forme :

$$P = \lambda \cdot \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)^{m_k}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $q \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont les racines complexes deux à deux distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_q$.

Corollaire 5.4 – Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

II.8. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 5.16 – Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme P non nul de $\mathbb{R}[X]$ se factorise de façon unique, à l'ordre des facteurs près, sous la forme :

$$P = \lambda \cdot \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)^{m_k} \times \prod_{j=1}^r (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{s_j}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(q, r) \in \mathbb{N}^2$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont les racines réelles deux à deux distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_q$, $s_1, \dots, s_r$ sont des entiers naturels non nuls et les polynômes $(X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{s_j}$ sont à coefficients réels et ne possèdent pas de racines réelles ($\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$).

Corollaire 5.5 – Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant négatif.

Exercice 5.4

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^n - 1$.

Résolution

► On commence par factoriser dans $\mathbb{C}[X]$: autrement dit, on cherche les racines de P .

$$P(z) = 0 \iff z^n = 1.$$

Les solutions de cette équation sont les racines n -ième de l'unité : $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. De plus, le coefficient dominant de P

est 1. Donc,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

► **Pour factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines complexes (non réelles) conjuguées.** On commence donc par chercher quelles sont les racines réelles de P . Un nombre complexe non nul est réel si, et seulement si, son argument est congru à 0 modulo π . D'où,

$$\xi_k \in \mathbb{R} \iff \frac{2k \times \pi}{n} \equiv 0[\pi] \iff 2k \equiv 0[n] \iff \begin{cases} k=0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ k=0 \text{ ou } k=\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \text{ car } k \in [0, n-1]$$

On remarque qu'il y a deux cas à traiter.

- **Cas 1 : n pair.** On écrit alors $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Les deux racines réelles de P sont $\xi_0 = 1$ et $\xi_p = -1$. Pour $k \in [1, p-1]$, ξ_k est une racine de P et donc, comme P est à coefficients réels, $\overline{\xi_k}$ aussi. De plus, $\overline{\xi_k} = \xi_{n-k}$, et $n-k \in [p+1, n-1]$. Ainsi, les n racines de P sont : $1, -1, \xi_1, \overline{\xi_1}, \dots, \xi_{p-1}$ et $\overline{\xi_{p-1}}$. Donc,

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= (X-1) \times (X+1) \times \prod_{k=1}^{p-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \times \prod_{k=1}^{p-1} \left(X - e^{\frac{-2ik\pi}{n}} \right) \\ &= (X-1) \times (X+1) \times \prod_{k=1}^{p-1} \left(\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \times \left(X - e^{\frac{-2ik\pi}{n}} \right) \right). \end{aligned}$$

Or, $e^{\frac{2ik\pi}{n}} + e^{\frac{-2ik\pi}{n}} = 2 \cos\left(\frac{2k \times \pi}{n}\right)$. Donc,

$$X^n - 1 = (X-1) \times (X+1) \times \prod_{k=1}^{p-1} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k \times \pi}{n}\right) X + 1 \right).$$

- **Cas 2 : n impair.** On écrit alors $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. L'unique racine réelle de P est $\xi_0 = 1$. Pour $k \in [1, p]$, ξ_k est une racine de P et donc, comme P est à coefficients réels, $\overline{\xi_k}$ aussi. De plus, $\overline{\xi_k} = \xi_{n-k}$, et $n-k \in [p+1, n-1]$. Ainsi, les n racines de P sont : $1, \xi_1, \overline{\xi_1}, \dots, \xi_p$ et $\overline{\xi_p}$. Donc, en procédant comme dans le cas 1, on a :

$$X^n - 1 = (X-1) \times \prod_{k=1}^p \left(\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \times \left(X - e^{\frac{-2ik\pi}{n}} \right) \right).$$

Donc,

$$X^n - 1 = (X-1) \times \prod_{k=1}^p \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k \times \pi}{n}\right) X + 1 \right).$$

III. Éléments propres en dimension finie

Dans cette partie, on suppose E de **dimension finie** $n \geq 1$.

III.1. Recherche des valeurs propres : le polynôme caractéristique



Proposition 5.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\det(\lambda \cdot \text{Id}_E - f) = 0$.

Démonstration

Comme E est de dimension finie et f est un endomorphisme de E , on a : $\det(\lambda \cdot \text{Id}_E - f) = 0$ si, et seulement si, $\lambda \cdot \text{Id}_E - f$ est non bijectif si, et seulement si, $\lambda \cdot \text{Id}_E - f$ est non injectif.

Par la proposition 5.1 page 6, on a : $\lambda \cdot \text{Id}_E - f$ non injectif si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f . $\square$



Remarque 5.18

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{B}$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors, la matrice de $\lambda \cdot \text{Id}_E - f$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\lambda \cdot I_n - A$ et

$$\det(\lambda \cdot \text{Id}_E - f) = \det(\lambda \cdot I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}_{(n)}.$$

On s'intéresse alors à l'application $\lambda \mapsto \det(\lambda \cdot \text{Id}_E - f)$.



Proposition 5.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application $x \mapsto \det(x \cdot \text{Id}_E - f)$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$ de degré n et :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \det(x \cdot \text{Id}_E - f) = x^n - \text{Tr}(f) \times x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \times \det(f).$$

Démonstration

► On commence par montrer que : pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $x \mapsto \det(x \cdot B - A)$ est polynomiale de degré inférieur n . On procède par récurrence sur n .

Initialisation. $n = 1$. On a $B = (b)$ et $A = (a)$ où a et b sont dans $\mathbb{K}$. Alors $\det(x \cdot B - A) = x \times b - a$ et le résultat est vrai.

Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang $n - 1 \in \mathbb{N}^*$. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On développe le déterminant $\det(x \cdot B - A)$ par rapport à la première ligne, on a :

$$\det(x \cdot B - A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \times (x \times b_{1,j} - a_{1,j}) \times \Delta_{1,j}(x).$$

où $\Delta_{1,j}(x)$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la j -ème colonne de $x \cdot B - A$. Par hypothèse de récurrence, les fonctions $\Delta_{1,1}, \dots, \Delta_{1,n}$ sont polynomiales de degré inférieur à $n - 1$. Donc, $x \mapsto \det(x \cdot B - A)$ est polynomiale de degré inférieur n . Ce qui achève la récurrence.

► Montrons par récurrence sur n que : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $x \mapsto \det(x \cdot I_n - A)$ est polynomiale de degré n et que les coefficients devant x^n et x^{n-1} sont respectivement 1 et $-\text{Tr}(A)$.

Initialisation. $n = 1$. On a $A = (a)$ où $a \in \mathbb{K}$. D'où $\det(x \cdot I_n - A) = x - a$ et $\text{Tr}(A) = a$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang $n - 1 \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On développe le déterminant

$\det(x.I_n - A)$ par rapport à la dernière ligne, on a :

$$\det(x.I_n - A) = (x - a_{n,n}) \times \Delta_{n,n}(x) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} \times (-a_{n,j}) \times \Delta_{n,j}(x). \quad (1)$$

où $\Delta_{n,j}(x)$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la j -ème colonne de $x.I_n - A$.

- Soit $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\Delta_{n,j}(x)$ est le déterminant d'une matrice dont la j -ème ligne ne dépend pas de x . En développant $\Delta_{n,j}(x)$ par rapport à la j -ème ligne et en appliquant le premier point de la démonstration, on déduit que $\Delta_{n,j}$ est polynomiale de degré inférieur à $n-2$.
- On note A_1 la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et colonne de A . On a, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\Delta_{n,n}(x) = \det(x.I_{n-1} - A_1)$. Par hypothèse de récurrence, la fonction $\Delta_{n,n}$ est polynomiale de degré $n-1$ et les coefficients de x^{n-1} et x^{n-2} sont respectivement 1 et $-\text{Tr}(A_1)$.

De (1), on déduit alors que $x \mapsto \det(x.I_n - A)$ est polynomiale de degré n et les coefficients devant x^n et x^{n-1} sont ceux de :

$$(x - a_{n,n}) \times (x^{n-1} - \text{Tr}(A_1) \times x^{n-2}) = x^n - (a_{n,n} + \text{Tr}(A_1)) \times x^{n-1} + a_{n,n} \times \text{Tr}(A_1) \times x^{n-2}.$$

Or, $a_{n,n} + \text{Tr}(A_1) = \text{Tr}(A)$. Ce qui achève la récurrence.

► Soit $\mathcal{B}$ une base de E . On note A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(x.\text{Id}_E - f) = \det(x.I_n - A)$. En appliquant le point précédent, on déduit que la fonction $x \mapsto \det(x.\text{Id}_E - f)$ est polynomiale de degré n et que les coefficients de x^n et x^{n-1} sont respectivement 1 et $-\text{Tr}(A) = -\text{Tr}(f)$.

► Le coefficient constant de $x \mapsto \det(x.\text{Id}_E - f)$ est la valeur en 0 de cette fonction et on a : $\det(0.\text{Id}_E - f) = \det(-f) = (-1)^n \times \det(f)$. □



Définition 5.16 – Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le **polynôme caractéristique de l'endomorphisme f** est le polynôme :

$$\chi_f(X) = \det(X.\text{Id}_E - f).$$

Le polynôme $\chi_f(X)$ est unitaire et,

$$\chi_f(X) = X^n - \text{Tr}(f)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \times \det(f).$$



Théorème 5.17 – Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \chi_f(\lambda) = 0.$$

Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres de f est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique de f .

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } f &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\}, f(x) = \lambda.x \\ &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\}, (\lambda.\text{Id}_E - f)(x) = 0_E \\ &\iff \text{Ker}(\lambda.\text{Id}_E - f) \neq \{0_E\} \\ &\iff \lambda.\text{Id}_E - f \text{ est non injective.} \end{aligned}$$

Or, $\lambda.\text{Id}_E - f$ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc, $\lambda.\text{Id}_E - f$ est non injective si, et seulement si, $\lambda.\text{Id}_E - f$ est non bijective. Ce qui est équivalent à $\det(\lambda.\text{Id}_E - f) = 0$. Ainsi,

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \chi_f(\lambda) = 0.$$



Définition 5.17 – Spectre d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le **spectre de f** est l'ensemble des valeurs propres de f . On le note $\text{Sp}(f)$ (ou parfois $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$).

**Proposition 5.12**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de f est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique χ_f dans $\mathbb{K}$.

Démonstration

Conséquence du théorème 5.17 page 23. □

Remarque 5.19

Comme χ_f est de degré n , on retrouve que f ne peut posséder plus de n valeurs propres distinctes.

**Exercice 5.5**

On suppose que $E = F \oplus G$ où F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension respectives $r \geq 1$ et $q \geq 1$ (on a donc $\dim(E) = n = r + q$).

- Déterminer le polynôme caractéristique de la projection p sur F parallèlement à G .
- Déterminer le polynôme caractéristique de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .

Résolution

- Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre de 1 (respectivement de 0) sur la diagonale est égal à la dimension de F (respectivement de G). D'où

$$\chi_p = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & X-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_{(n)} = (X-1)^r \times X^q.$$

- Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le nombre de 1 (respectivement de -1) sur la diagonale est égal à la dimension de F (respectivement de G). D'où

$$\chi_s = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & X-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X+1 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X+1 \end{vmatrix}_{(n)} = (X-1)^r \times (X+1)^q.$$

Remarque : Les expressions de χ_p et χ_s trouvées sont encore valable lorsque $r = 0$ ou $q = 0$.



Définition 5.18 – Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le **polynôme caractéristique de la matrice** A est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme canoniquement associé à A . Autrement dit,

$$\chi_A = \det(X.I_n - A).$$

Le polynôme $\chi_A(X)$ est unitaire et,

$$\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \times \det(A).$$

Remarque 5.20 – Cas particulier d'une matrice carrée de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a) \times (X-d) - b \times c = X^2 - \underbrace{(a+d)}_{=\text{Tr}(A)}X + \underbrace{a \times d - b \times c}_{=\det(A)}$$



Définition 5.19 – Spectre d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le **spectre de la matrice** A est l'ensemble des valeurs propres de A . On le note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.



Proposition 5.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.

Démonstration

En notant f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . On a : $\chi_A = \chi_f$ et donc $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$. Ainsi, d'après la proposition 5.12 page 24, le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A dans $\mathbb{K}$. $\square$

Remarque 5.21 – Prudence!

► Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ On a :

$$\chi_A = \det(X I_n - A) = \begin{vmatrix} X-2 & -5 & 0 \\ 2 & X+1 & -1 \\ 2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = \dots = (X-2) \times (X^2 - 2X + 5) = (X-2) \times (X-1-2i) \times (X-1+2i)$$

Ainsi,

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2\} \quad \text{et} \quad \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2, 1+2i, 1-2i\}.$$

Il faudra faire attention si dans l'exercice on travaille dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Le spectre de A peut changer en fonction du cas où on se trouve.

► Plus généralement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et l'inclusion peut-être stricte.

Corollaire 5.6

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

- Tout endomorphisme possède au moins une valeur propre.
- Toute matrice possède au moins une valeur propre.

Démonstration

- Le polynôme χ_f est de degré supérieur à 1 et, par le théorème de d'Alembert-Gauß, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Une telle racine est une valeur propre de f .
- On a de même $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$. □

**Proposition 5.14**

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
En particulier, deux matrices semblables ont le même spectre.

Démonstration

Soient A et A' deux matrices semblables.

Par définition, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = P^{-1} \times A \times P$. D'où, $X I_n - A' = P^{-1} \times (X I_n - A) \times P$. Les matrices $X I_n - A'$ et $X I_n - A$ sont donc semblables, et elles ont donc le même déterminant.

Donc, $\chi_{A'} = \det(X I_n - A') = \det(X I_n - A) = \chi_A$.

De plus, le spectre de A (respectivement de A') est l'ensemble des racines de χ_A (respectivement de $\chi_{A'}$). Donc, A et A' ont le même spectre. □

Remarque 5.22 – Prudence !

La réciproque est fausse. Prenons $A = I_3$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B ne sont pas semblables (dans le cas contraire, les matrices $A - I_3 = 0_3$ et $B - I_3 \neq 0$ sont semblables, ce qui n'est pas) et on a $\chi_A = \chi_B = (X - 1)^3$ et $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) = \{1\}$.

**Proposition 5.15**

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration

On a $(X I_n - A)^\top = X I_n - A^\top$. D'où, $\det((X I_n - A)^\top) = \det(X I_n - A^\top)$. Or, une matrice et sa transposée ont le même déterminant. Donc, $\chi_A = \det(X I_n - A) = \det(X I_n - A^\top) = \chi_{A^\top}$. □

III.2. Ordre de multiplicité d'une valeur propre**Définition 5.20 – Ordre de multiplicité d'une valeur propre**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de f (respectivement de A) est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de f (respectivement de A).

Remarque 5.23

Soit λ une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$ ou de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si l'ordre de multiplicité de λ est 1, alors on dit que λ est valeur propre simple.
- Si l'ordre de multiplicité de λ est 2, alors on dit que λ est valeur propre double.
- Si l'ordre de multiplicité de λ est 3, alors on dit que λ est valeur propre triple.

Théorème 5.18 – Cas particulier des matrices triangulaires ou diagonales

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire ou diagonale.

Les coefficients diagonaux de A sont ses valeurs propres apparaissant avec leur multiplicité.

Démonstration

► Soit A une matrice triangulaire supérieure. C'est-à-dire une matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est alors :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$$

On en déduit que le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire supérieure est scindé et que les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux.

► Si A est triangulaire inférieure alors $A^\top$ est triangulaire supérieure. Or les polynômes caractéristiques de A et $A^\top$ sont les mêmes donc, le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire inférieure est scindé et les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux.

► Une matrice diagonale est triangulaire supérieure. Donc, le polynôme caractéristique d'une matrice diagonale est scindé et les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux. $\square$

Théorème 5.19

Soit f un endomorphisme de E^a (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

L'endomorphisme f (respectivement la matrice A) admet au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité.

a . On rappelle que E est dimension finie n .

Démonstration

L'ensemble des valeurs propres de f (respectivement A) est l'ensemble des racines de χ_f (respectivement χ_A) et la multiplicité de chaque valeur propre λ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f (respectivement χ_A). Il suffit alors d'appliquer le corollaire 5.2 page 18. $\square$

Remarque 5.24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre de A . Alors, $\bar{\lambda}$ est racine de χ_A de même multiplicité.

On note m la multiplicité de la valeur propre λ . On sait alors λ est racine de χ_A de multiplicité m . Or, comme A est à coefficients réels, le polynôme χ_A est aussi à coefficients réels. Donc, $\bar{\lambda}$ est racine de χ_A de multiplicité m .

Théorème 5.20

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme caractéristique χ_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$: c'est-à-dire, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_p$ des entiers naturels non nuls tels que :

$$\chi_f = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Alors,

$$\text{Tr}(f) = \sum_{i=1}^p m_i \times \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(f) = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{m_i}.$$

Autrement dit,

- La trace de f est égale à la somme des valeurs propres de f comptées avec multiplicité.
- Le déterminant de f est égal au produit des valeurs propres de f comptées avec multiplicité.

Démonstration

Appliquer le théorème 5.12 page 18 et utiliser la définition 5.16 page 23

□

Remarque 5.25 – Réécriture de la proposition précédente à l'aide de $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme caractéristique χ_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$. Autrement dit :

$$\chi_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

où, pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, m_λ est la multiplicité de la valeur propre λ . Alors,

$$\text{Tr}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} m_\lambda \times \lambda \quad \text{et} \quad \det(f) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \lambda^{m_\lambda}.$$

Théorème 5.21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors,

- La trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
- Le déterminant de A est égal au produit des valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Remarque 5.26 – Prudence !

- Tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est scindé. La proposition précédente peut donc toujours être appliquée lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'hypothèse « le polynôme caractéristique est scindé » est fondamentale !

Soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0[\pi]\} \stackrel{\text{Notation}}{=} \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta}) \times (X - e^{-i\theta}).$$

On a donc :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset \quad \text{et} \quad \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}.$$

- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, χ_A n'est pas scindé et le spectre de A est vide.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, χ_A est scindé, les valeurs propres sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ et on a bien :

$$\text{Tr}(A) = 2 \cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \quad \text{et} \quad \det(A) = 1 = e^{i\theta} \times e^{-i\theta}.$$

III.3. Polynôme caractéristique et sous-espace stable



Proposition 5.16

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par f (avec $F \neq \{0_E\}$). On note f_F l'endomorphisme de F induit par f .

Alors, le polynôme caractéristique χ_{f_F} de f_F divise le polynôme caractéristique de χ_f de f . Autrement dit, $\chi_{f_F} \mid \chi_f$.

Démonstration

Si $F = E$, alors le résultat est clair ($f_F = f$). Dans la suite, on suppose $F \neq E$.

On note $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ la dimension de F .

Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base adaptée à F (c'est-à-dire, $\mathcal{B}_1$ est une base de F). On sait que la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. De plus, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_F)$. Par la formule du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs, on a :

$$\chi_f = \chi_M = \det(X \cdot \text{Id}_E - M) = \begin{vmatrix} X \cdot I_p - A & -B \\ 0 & X \cdot I_{n-p} - C \end{vmatrix} = \det(X \cdot I_p - A) \times \det(X \cdot I_{n-p} - C) = \chi_A \times \det(X \cdot I_{n-p} - C) = \chi_{f_F} \times \det(X \cdot I_{n-p} - C).$$

Donc, χ_{f_F} divise χ_f . □

Remarque 5.27

En particulier, le spectre de f_F est inclus dans le spectre de f :

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f_F) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f).$$

Attention ! En général, l'inclusion réciproque est fausse...

Exemple 5.7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On considère l'(hyper)plan d'équation $x_1 + x_3 = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. On le note F . Les vecteurs e_2 et $e_1 - e_3$ appartiennent à F et ne sont pas colinéaires (car la famille (e_1, e_2, e_3) est libre). La famille $(e_2, e_1 - e_3)$ est donc une famille libre composée de $2 = \dim(F)$ vecteurs de F . C'est donc une base de F .

De plus, par lecture de la matrice, $f(e_2) = 2e_1 + e_2 - 2e_3$ et $f(e_1 - e_3) = e_1 - 4e_2 - e_3$. On en déduit que $f(e_2) \in F$ et $f(e_1 - e_3) \in F$. D'où, $f(F) = f(\text{Vect}(e_2, e_1 - e_3)) = \text{Vect}(f(e_2), f(e_1 - e_3)) \subset F$. Donc, F est stable par f et la matrice de f_F dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_2, e_1 - e_3)$ est $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. D'où,

$$\chi_{f_F} = \begin{vmatrix} X-1 & 4 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 + 8 = X^2 - 2X + 9.$$

D'autre côté,

$$\chi_f = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & -1 \\ 2 & X-1 & -2 \\ -1 & 2 & X-2 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + (X-2)L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2X-6 & (X-3) \times (X-1) \\ 0 & X+3 & 2(X-3) \\ -1 & 2 & X-2 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 2X-6 & (X-3) \times (X-1) \\ X+3 & 2(X-3) \end{vmatrix}.$$

Pour obtenir la dernière égalité, on a développé le déterminant par rapport à la première colonne. Or,

$$\begin{vmatrix} 2X-6 & (X-3) \times (X-1) \\ X+3 & 2(X-3) \end{vmatrix} = (X-3) \times \begin{vmatrix} 2(X-3) & X-1 \\ X+3 & 2 \end{vmatrix} = (X-3) \times (4X-12-X^2-2X+3) = (X-3) \times (-X^2+2X-9).$$

Donc, $\chi_f = (X-3) \times (X^2-2X+9)$ et on a bien $\chi_{f_F} | \chi_f$.

Théorème 5.22

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f de multiplicité m_λ . Alors,

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m_\lambda.$$

Démonstration

- D'après la remarque 5.2 page 5, l'endomorphisme $\tilde{f}$ de $E_\lambda(f)$ induit par f est une homothétie de rapport λ . La matrice de $\tilde{f}$ dans n'importe quelle base de $E_\lambda(f)$ est donc λI_p où p est la dimension de $E_\lambda(f)$. D'où, $\chi_{\tilde{f}} = (X-\lambda)^p$. Par la proposition précédente, on a : $\chi_{\tilde{f}} = (X-\lambda)^p$ divise χ_f . D'où, $p \leq m_\lambda$. Donc, $\dim(E_\lambda(f)) = p \leq m_\lambda$.
- De plus, λ est une valeur propre de f , donc $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$. Donc, $1 \leq \dim(E_\lambda(f))$. □

Remarque 5.28 – Le sous-espace propre d'une valeur propre simple est de dimension 1

Dans le cas où λ est valeur propre simple de f , alors, par définition, λ est racine simple de χ_f . Donc, par la proposition précédente, $\dim(E_\lambda(f)) = 1$.

Remarque 5.29 – Prudence !

L'inégalité $\dim(E_\lambda(f)) < m_\lambda$ peut être stricte !

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+3 & +3 & -2 \\ -1 & X-1 & +2 \\ -2 & -4 & X+4 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + (X+3)L_2}{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} = \begin{vmatrix} 0 & X \times (X+2) & 2(X+2) \\ -1 & X-1 & +2 \\ 0 & -2(X+1) & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \times (X+2) & 2(X+2) \\ -2(X+1) & X \end{vmatrix} = (X+2) \times \begin{vmatrix} X & 2 \\ -2(X+1) & X \end{vmatrix}.$$

Donc, $\chi_A = (X+2) \times (X^2+4X+2) = (X+2)^3$. On en déduit que $\text{Sp}(A) = \{-2\}$ et -2 est racine de multiplicité 3 de A . De plus, par le théorème du rang,

$$\dim(E_{-2}(A)) = 3 - \text{rg}(A + 2I_3).$$

Or, $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. On a $L_1 = -L_2$ et les lignes L_2 et L_3 sont non colinéaires, donc $\text{rg}(A + 2I_3) = 2$, donc $\dim(E_{-2}(A)) = 1 < 3$.

III.4. Recherche des vecteurs propres

On vient de voir que la recherche des valeurs propres revient à étudier le polynôme caractéristique. Une fois les valeurs propres déterminées, on s'intéresse à la recherche de vecteurs propres.

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de f . Un vecteur propre de f pour la valeur propre λ vérifie l'équation linéaire :

$$f(x) = \lambda.x.$$

En dimension finie, on peut traduire matriciellement cette équation et on est alors ramené à l'étude du système linéaire homogène :

$$A \times X = \lambda.X.$$

Remarque 5.30

D'après le théorème du rang,

$$\dim(E_\lambda(A)) = \dim(\text{Ker}(A - \lambda.I_n)) = n - \text{rg}(A - \lambda.I_n).$$

Exemple 5.8 – Notre première réduction (vraiment?)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

► On a :

$$\chi_A = (X - 2) \times (X - 3).$$

Donc,

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 3\}.$$

► **Déterminons u_1 un vecteur propre de f pour la valeur propre 2.**

Pour cela, résolvons le système : $A \times X = 2X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

On a :

$$A \times X = 2X \iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0.$$

Prenons par exemple $u_1 = (2, 1)$.

Remarque : on a en fait montré que $E_2(f) = \text{Vect}(u_1)$.

► **Déterminons u_2 un vecteur propre de f pour la valeur propre 3.**

Pour cela, résolvons le système : $A \times X = 3X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

On a :

$$A \times X = 3X \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff x - y = 0.$$

Prenons par exemple $u_2 = (1, 1)$.

Remarque : on a en fait montré que $E_3(f) = \text{Vect}(u_2)$.

► D'après le théorème 5.3 page 6, la famille (u_1, u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension 2. La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus, $f(u_1) = 2u_1$ et $f(u_2) = 3u_2$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

► **Remarque :** par la formule de changement de base, on a : $D = P^{-1} \times A \times P$ où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$: autrement dit, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

IV. Diagonalisation

Dans toute cette partie E est supposé de **dimension finie** $n \geq 1$.

IV.1. Endomorphisme diagonalisable



Définition 5.21 – Endomorphisme diagonalisable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que f est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- **Diagonaliser** f , c'est chercher une telle base $\mathcal{B}$, et calculer la matrice de f dans cette base.



Proposition 5.17

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f .
- On suppose f diagonalisable et on note $\mathcal{B}$ une base formée de vecteurs propres de f . Alors, les coefficients sur la diagonale de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ sont les valeurs propres de f apparaissant avec leur multiplicité.

Démonstration

- ($\Rightarrow$) Supposons f diagonalisable. Par définition, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$. De plus, les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont non nuls (car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre). Donc la base $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de f .

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f . Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k)$ est colinéaire à e_k . Donc, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

- Si f est diagonalisable, alors la matrice de f dans une base de E est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

D'où, $\chi_f = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$. Or les racines de χ_f sont exactement les valeurs propres de f comptées avec multiplicité. $\square$

Exemple 5.9 – Les endomorphismes remarquables sont diagonalisables

- **Les homothéties sont diagonalisables.**

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et h l'homothétie de rapport λ . Pour toute base $\mathcal{B}$ de E , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \lambda \cdot I_n.$$

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$ est diagonale, donc h est diagonalisable.

- **Les projecteurs sont diagonalisables.**

Soit p un projecteur (c'est-à-dire $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$). On sait qu'alors $E = F \oplus G$ où $F = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p)$.

- Si $F = \{0_E\}$, alors p est l'endomorphisme nul et est diagonalisable (homothétie de rapport 0).

- Si $F = E$, alors p est l'identité et est diagonalisable (homothétie de rapport 1)
- Si $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$, alors en considérant $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ est diagonale, donc p est diagonalisable et le nombre de 1 (respectivement de 0) sur la diagonale est égal à la dimension de F (respectivement de G)

► **Les symétries sont diagonalisables.**

Soit s une symétrie (c'est-à-dire $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{Id}_E$). On sait qu'alors $E = F \oplus G$ où $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

- Si $F = \{0_E\}$, alors s est l'endomorphisme $-\text{Id}_E$ et est diagonalisable (homothétie de rapport -1).
- Si $F = E$, alors s est l'identité et est diagonalisable (homothétie de rapport 1)
- Si $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$, alors en considérant $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ est diagonale, donc s est diagonalisable et le nombre de 1 (respectivement de -1) sur la diagonale est égal à la dimension de F (respectivement de G)

IV.2. Caractérisations des endomorphismes diagonalisables

Théorème 5.23

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'endomorphisme f est diagonalisable.
2. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
3. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .
4. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} E_{\lambda}(f)$.
5. $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \dim(E_{\lambda}(f))$.

Démonstration

- L'équivalence (1) $\iff$ (2) est la définition d'« endomorphisme diagonalisable ».
- On a déjà montré les équivalences (2) $\iff$ (3) dans la proposition 5.17 page 32.
- Montrons la chaîne d'implication (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5) $\implies$ (3). On note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts et p , le nombre de valeurs propres distinctes de f , est inférieur à $n = \dim(E)$).

- On suppose (3). Par le théorème 5.3 page 6, on sait déjà que la somme $\sum_{k=1}^p E_{\lambda_k}(f)$ est directe. Il reste à montrer que $E \subset \sum_{k=1}^p E_{\lambda_k}(f)$ (l'autre inclusion est claire).

Par (3), il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f .

Soit $x \in E$. On décompose x dans la base $\mathcal{B}$: $x = \alpha_1.e_1 + \dots + \alpha_n.e_n$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, e_k est un vecteur propre de f , donc appartient à un des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f), E_{\lambda_2}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$. On en déduit que x est une somme de vecteurs appartenant à un des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f), E_{\lambda_2}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$. Donc, $x \in \sum_{k=1}^p E_{\lambda_k}(f)$. Ainsi $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(f)$ et (4) est montrée.

- On suppose (4). Comme $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(f)$ et la somme $\bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(f)$ est directe, on a :

$$\dim(E) = \sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(f)).$$

Donc (5) est montrée.

- Supposons (5). On considère pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ une base $\mathcal{B}_k$ de $E_{\lambda_k}(f)$. Comme la somme $\bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(f)$ est directe, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ est une famille libre de E . De plus, elle est composée de $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(f)) = \dim(E)$ vecteurs. Donc, $\mathcal{B}$ est une base de E . De plus, par définition de sous-espaces propres, les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de f . Ainsi (3) est montrée. □



Exercice 5.6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. On suppose que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda\}$.
Montrer que f est l'homothétie de rapport λ .

Résolution

On sait que f est diagonalisable et possède comme unique valeur propre λ . Par le théorème 5.23 page 33, on a :

$$E = E_{\lambda}(f) = \text{Ker}(f - \lambda.\text{Id}_E).$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$, $(f - \lambda.\text{Id}_E)(x) = 0$. Or, $(f - \lambda.\text{Id}_E)(x) = f(x) - \lambda.x$. On en déduit que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda.x$. Ainsi,

f est l'homothétie de rapport λ .



Théorème 5.24

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension n .

Si f possède n valeurs propres distinctes deux à deux (autrement si χ_f est scindé à racines simples), alors f est diagonalisable.

Démonstration

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les différentes valeurs propres de f . Par le théorème 5.22 page 30, on a alors $\sum_{k=1}^n \dim(E_{\lambda_k}(f)) \geq n$. Or, la somme

$\bigoplus_{k=1}^n E_{\lambda_k}(f)$ est directe. Donc, $\dim\left(\bigoplus_{k=1}^n E_{\lambda_k}(f)\right) = \sum_{k=1}^n \dim(E_{\lambda_k}(f)) \geq n$. On en déduit que $E = \bigoplus_{k=1}^n E_{\lambda_k}(f)$. Par le théorème précédent, f est diagonalisable. □



Remarque 5.31

Dans ce cas, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim(E_{\lambda_k}(f)) = 1$, donc les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

Remarque 5.32 – Prudence !

La réciproque du corollaire est fausse. L'application identité est diagonalisable mais possède 1 comme unique valeur propre.

Théorème 5.25

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'endomorphisme f est diagonalisable.
2. χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ **et**, pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, la multiplicité de la valeur propre λ est égale à la dimension du sous-espace propre $E_{\lambda}(f)$.

Démonstration

On note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts et $p \leq n$ où $n = \dim(E)$). Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note m_k la multiplicité de la valeur propre λ_k .

Le polynôme caractéristique de f est degré n (où n est la dimension de E). On a alors l'inégalité $\sum_{k=1}^p m_k \leq n$. De plus, on a l'égalité

$\sum_{k=1}^p m_k = n$ si, et seulement si, χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ (théorème 5.11 page 18).

Or, par le théorème 5.22 page 30, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\dim(E_{\lambda_k}(f)) \leq m_k$. Donc,

$$\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(f)) \leq \sum_{k=1}^p m_k \leq n.$$

Ainsi, d'après le théorème 5.23 page 33, on a l'équivalence : f est diagonalisable si, et seulement si, $n = \sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(f))$ si, et

seulement si, $n = \sum_{k=1}^p m_k$ **et**, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim(E_{\lambda_k}(f)) = m_k$. Ce qui est équivalent à : χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ **et**, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\dim(E_{\lambda_k}(f)) = m_k$. □

IV.3. Matrices diagonalisables



Définition 5.22 – Matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

► On dit que la matrice A est **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, une matrice est diagonalisable s'il existe deux matrices $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telle que $D = P^{-1} \times A \times P$.

► **Diagonaliser** A c'est chercher deux matrices $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telle que $D = P^{-1} \times A \times P$.

Remarque 5.33

Une matrice est toujours semblable à elle-même. Une matrice diagonale est donc diagonalisable.



Proposition 5.18

Soient $\mathcal{B}$ une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, f est diagonalisable.

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose A diagonalisable.

Comme A est diagonalisable, il existe D une matrice diagonale semblable à A . Par la formule de changement de base, A et D représentent f dans deux bases différentes. Autrement dit, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Par

définition, f est diagonalisable.

($\Leftarrow$) On suppose que f est diagonalisable. Par définition, il existe $\mathcal{B}'$ une base de E telle que $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est diagonale. Les matrices A et D représentent f dans deux bases différentes, donc A et D sont semblables. Comme D est diagonale, on en déduit que A est diagonalisable. $\square$

Corollaire 5.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A .

La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme f_A est diagonalisable.

Démonstration

Appliquer le résultat précédent avec $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. $\square$

Remarque 5.34

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .

Par définition, il existe deux matrices $P = (C_1 \ \dots \ C_n) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telle que $D = P^{-1} \times A \times P$.

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la famille de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est P . Comme P est inversible, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et, par la formule de changement de base, la matrice de f_A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est D . De plus, les vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ sont des vecteurs propres de f_A et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de f_A apparaissant avec multiplicité. Donc,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A \times C_i = \lambda_i \cdot C_i \text{ et } f_A(e_i) = \lambda_i \cdot e_i.$$

Théorème 5.26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est diagonalisable.
2. A est semblable à une matrice diagonale.
3. $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$.
4. $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A))$.

Démonstration

On sait que A est diagonalisable si, et seulement si, f_A , l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A , est diagonalisable. Il suffit d'appliquer le théorème 5.23 page 33 à f_A . $\square$

Théorème 5.27

Si A une matrice d'ordre n possède n valeurs propres distinctes deux à deux (autrement dit, si χ_A est scindé à racines simples), alors A est diagonalisable.

Démonstration

On sait que $\chi_A = \chi_{f_A}$ où f_A est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . Il suffit d'appliquer le théorème 5.24 page 34 à f_A . $\square$

Remarque 5.35 – Prudence !

La réciproque du corollaire est fausse. La matrice identité est diagonalisable (car diagonale) mais possède 1 comme unique valeur propre.

Remarque 5.36

Dire que A possède n valeurs propres distinctes deux à deux est équivalent à dire que χ_A est scindé à racines simples.

Exemple 5.10

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est triangulaire supérieure. Son polynôme caractéristique est donc :

$$\chi_A = (X - 1) \times (X - 2) \times (X - 3).$$

Il est scindé à racines simples. On en déduit que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2, 3\}$ et que A est diagonalisable. Autrement dit, il existe $P \in GL_3(\mathbb{K})$ telle que :

$$P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Théorème 5.28

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est diagonalisable.
2. χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$ la multiplicité de la valeur propre λ est égale à la dimension du sous-espace propre $E_{\lambda}(A)$.

Démonstration

On sait que A est diagonalisable si, et seulement si, f_A , l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A , est diagonalisable. Il suffit d'appliquer le théorème 5.25 page 35 à f_A . $\square$

Remarque 5.37 – Méthode pour déterminer si une matrice est diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. On commence par calculer χ_A . Si χ_A n'est pas scindé alors A n'est pas diagonalisable. Sinon on en déduit $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et la multiplicité des différentes valeurs propres.
2. Pour chaque valeur propre λ , on détermine la dimension de $E_{\lambda}(A)$ (soit en cherchant une base de $E_{\lambda}(A)$, soit en cherchant le rang de $A - \lambda I_n$ et en appliquant le théorème du rang). S'il existe une valeur propre λ telle que la dimension de $E_{\lambda}(A)$ est strictement inférieure à la multiplicité de λ , alors A n'est pas diagonalisable.
3. Sinon, en juxtaposant les bases des différents sous-espaces propres de A , on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formées de vecteurs propres de A . De plus, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$:
 - Les colonnes de P sont les vecteurs propres de A .
 - $D = P^{-1} \times A \times P$ où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A .

écrites dans le même ordre que les vecteurs propres et chaque valeur propre apparaît autant de fois que sa multiplicité.



Exercice 5.7

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Résolution

A rédiger

IV.4. Applications de la diagonalisation

Calcul des puissances d'une matrice

Lemme 5.1

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1} \times A \times P$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1} \times A^k \times P$.

Démonstration

Récurrence. Faites-la ! Je vous laisse de la place.

Remarque 5.38

Avec les notations du lemme, A est inversible si, et seulement si, B est inversible. Dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $B^k = P^{-1} \times A^k \times P$.

Remarque 5.39 – Application aux cas des matrices diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

Il existe alors une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et A' une matrice diagonale telle que $A' = P^{-1} \times A \times P$. Par le lemme on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P \times (A')^k \times P^{-1}.$$

On note, $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A')^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$. La matrice A^k est alors donnée simplement par :

$$A^k = P \times \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \times P^{-1}.$$

Exemple 5.11

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On a $\chi_A = X^2 - 5X + 6 = (X - 2) \times (X - 3)$. La matrice A est de taille 2 et possède 2 racines distinctes, donc A est diagonalisable.

On sait de plus que $E_2(A)$ et $E_3(A)$ sont de dimension 1.

Or, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in E_3(A)$.

Une base $E_2(A)$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et une base $E_3(A)$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on sait alors que $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} \times A \times P$. D'où, $A = P \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times P^{-1}$. De plus, on trouve que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = P \times \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^{k+1} - 2 \times 3^k \\ -2^k + 3^k & -2^k + 2 \times 3^k \end{pmatrix}.$$

Résolution d'un système de suites récurrentes (sur un exemple)

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Le système précédente se réécrit :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A \times X_n,$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On montre par récurrence (faites la!) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X^n = A^n \times X_0.$$

On s'est alors ramené au calcul des puissances de A^n , ce qui a été fait dans l'exemple précédent. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2 \times 3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2 \times 3^n + 2^{n+1} - 2 \times 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \times 3^n - 2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^{n+1} - 4 \times 3^n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -3 \times 2^n + 4 \times 3^n.$$

Résolution d'un système différentiel à coefficients constants (sur un exemple)

On considère le système : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(S) \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

On remarque que les solutions de ce système sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et pose $Y(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

Le système se réécrit alors $Y(t) = A \times X(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

On sait que A est diagonalisable et $A = P \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times P^{-1}$.

On a alors, $P^{-1} \times Y(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times P^{-1} \times X(t)$.

On a

$$P^{-1} \times X(t) = \begin{pmatrix} 2x(t) + y(t) \\ -x(t) - y(t) \end{pmatrix}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $u(t) = 2x(t) + y(t)$ et $v(t) = -x(t) - y(t)$. De plus, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = u(t) + v(t)$ et $y(t) = -u(t) - 2v(t)$. On en déduit que x et y sont dérivables et, et seulement si u et v sont dérivables. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1} \times Y(t) = \begin{pmatrix} 2x'(t) + y'(t) \\ -x'(t) - y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u(t) \\ 3v(t) \end{pmatrix}$. On en déduit que x et y vérifient (S), si et seulement si, u et v vérifie :

$$\begin{cases} u' = 2u \\ v' = 3u \end{cases}$$

Ce système est équivalent à : il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u(t) = \lambda \times e^{2t} \\ v(t) = \mu \times e^{3t}. \end{cases}$$

Or, on sait que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (S) sont les fonctions de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) &= \lambda \times e^{2t} + \mu \times e^{3t} \\ y(t) &= -\lambda \times e^{2t} - 2\mu \times e^{3t} \end{cases}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

V. Annexe

V.1. À la fin de ce chapitre,...

1. ... je connais la définition de « valeur propre », de « vecteur propre », d'« élément propre » et de « sous-espace propre » ;
2. ... je sais relier la notion de valeur propre à la notion d'injectivité ;
3. ... je connais les deux caractérisations de multiplicité d'une racine ;
4. ... je connais la propriété particulière vérifiée par les racines complexes d'un polynôme à coefficients **réels** ;
5. ... je connais les relations coefficients-racines ;
6. ... je sais encadrer la dimension d'un sous-espace propre, et je connais la conséquence de cet encadrement pour les valeurs propres simples ;
7. ... je sais utiliser la division euclidienne de polynômes pour calculer les puissances d'une matrice ;
8. ... je connais les 5 caractérisations pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable ;
9. ... je connais les 4 caractérisations pour qu'une matrice soit diagonalisable ;
10. ... je connais une condition suffisante pour d'un endomorphisme/une matrice soit diagonalisable et je connais un contre-exemple à la réciproque ;
11. ... je sais montrer qu'un projecteur est diagonalisable, et en déduire que le rang d'un projecteur est égal à sa trace ;
12. ... je sais montrer qu'une symétrique est diagonalisable.

V.2. Testons l'IA sur ce chapitre

Énoncé.

On considère les matrices "2x2" dont les coefficients sont des 0 et des 1. Parmi ces matrices, lesquelles sont diagonalisables? Affiche la réponse sous la forme d'une liste.

Solution proposée par l'IA.

n°	Matrice	Diagonalisable?	Remarque
1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Oui	Matrice nulle
2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Oui	Déjà diagonale
3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Oui	Valeurs propres réelles
4	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	Oui	Valeurs propres distinctes
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Oui	Nilpotente, diagonalisable
6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Oui	Déjà triangulaire diagonale
7	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Oui	Valeurs propres : ± 1
8	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	Non	Une seule valeur propre double (non diag.)
9	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Oui	Déjà diagonale
10	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Oui	Matrice identité
11	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Oui	Valeurs propres : ± 1
12	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	Non	Valeur propre double, 1 seule direction
13	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Oui	Valeurs propres réelles
14	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Non	Valeur propre double, non diagonalisable
15	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Oui	Valeurs propres distinctes réelles
16	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	Non	Valeur propre double, 1 seule direction

Qu'en pensez-vous?