Fonction exponentielle

#TaleSpéMaths

Fonction logarithme

Galilee.ac

PROPRIETES

$D_f = \mathbb{R}$

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$

$e^x \nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$e^a > e^b \iff a > b$

$e^a = e^b \iff a = b$

RELATIONS FONCTIONNELLES

$e^a \times e^b = e^{a+b}$

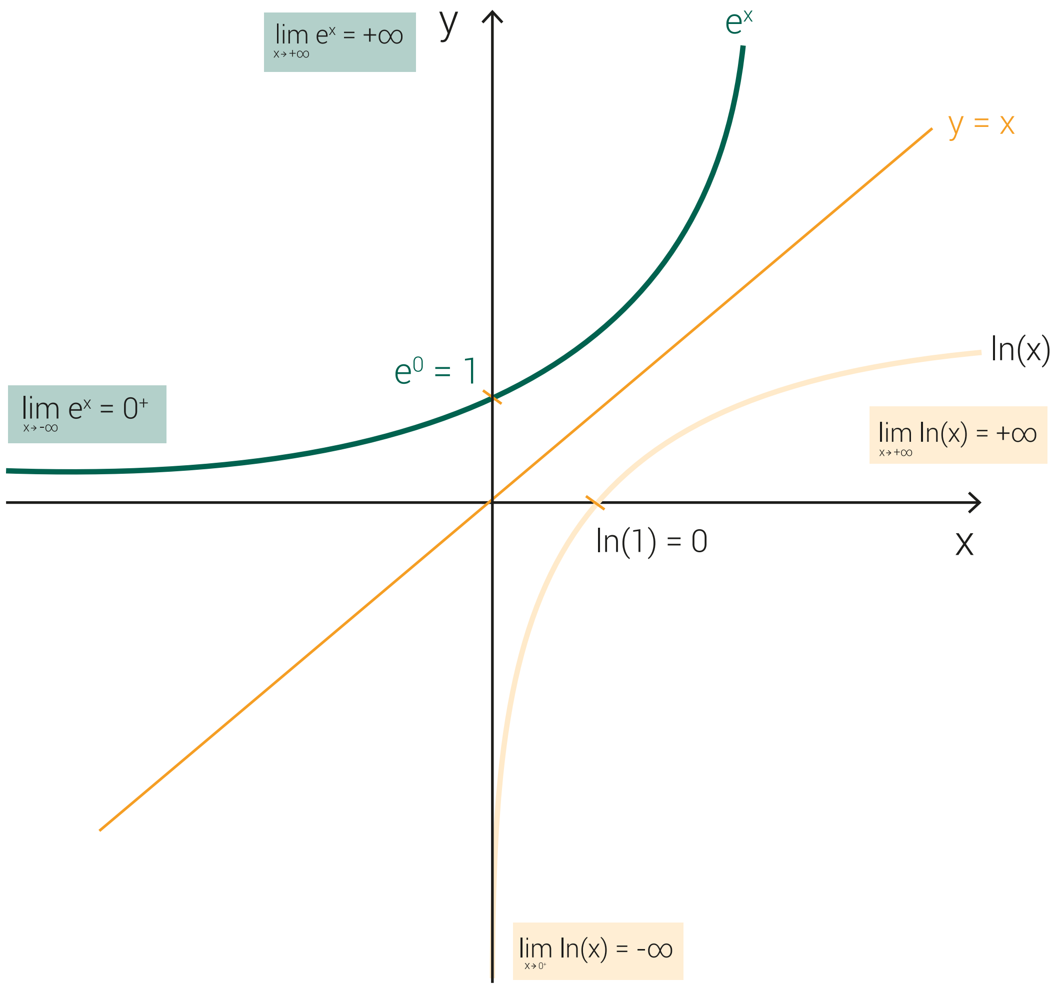
$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$(e^a)^b = e^{ab}$

DERIVEES

$(e^x)' = e^x$

$(e^u)' = u'e^u$



CROISSANCE COMPAREES

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

PROPRIETES

$D_f = \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$

Sur $]0;1[$; $\ln(x) < 0$

Sur $]1; +\infty[$; $\ln(x) > 0$

$\ln(x)$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\ln a = \ln b \iff a = b$

$\ln a > \ln b \iff a > b$

RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$\ln(a^b) = b \ln(a)$

$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

DERIVEES

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x^3) \leq \ln(x) + \ln(27x + 20)$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x)$.
On pose $I =]0\,;\,+\infty[$.
C_f est la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
A est le point de C_f d'abscisse $\sqrt{2}$.

1. Déterminer puis interpréter graphiquement les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition I.
2. Justifier que la fonction f est deux fois dérivable sur I.
3. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de I.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur I.
5. Soit l'équation (E) : $f(x) = 0$.
   Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle I.
6. Montrer que pour tout réel x de I, on a : $f''(x) = \dfrac{2}{x^2}(x^2 - 2)$.
7. Étudier la convexité de la fonction f sur I.
   Préciser les coordonnées exactes des éventuels points d'inflexion de C_f.
8. On considère un réel t strictement positif et différent de $\sqrt{2}$.
   Soit un point $M(t\,;\,f(t))$.
   Étudier selon les valeurs réelles de t les positions relatives de (AM) et C_f.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)$.
C_f est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\dfrac{1}{3}$, et en donner une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$, et en donner une interprétation graphique.
3. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

5. Étudier le sens de variation de la fonction f. Puis dresser pour finir son tableau de variation.
6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
7. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
8. L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
   On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Déterminer $g'(x)$.
   (b) Étudier le sens de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (c) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   (d) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α non nulle.
   (e) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

```
from math import *
x=0.22
while log((3*x+1)/(x+1))........................ :
      x=..................
print ................
```

   (f) Déterminer alors la dernière valeur prise par la valeur lors de l'exécution de l'algorithme.
   (g) Donner une valeur approchée au centième de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 1

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$$

1. Dresser le tableau de variation complet de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (Limites incluses et rédigées avec soin...)
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α au centième.
3. En déduire le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. (donné en annexe, voir fin de l'exercice.)

1. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
2. On considère dans cette question la droite Δ d'équation $y = 2x$.
   (a) Tracer Δ dans le repère fourni en annexe.
   (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x)$.
   Comment interprétez-vous graphiquement ce résultat ?
   (c) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 4\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{25}$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$.
3. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2		$m \approx 2,364$		$6,5$
$h(x)$			$M \approx 2,265$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$h(2)$				$h(6,5)$

   Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\,;\,6,5]$.
4. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
       x = x + p
    return (x-p, x)
```

   On rappelle qu'en langage Python :

   - la commande `log(x)` renvoie la valeur $\ln(x)$;
   - la commande `c**d` renvoie la valeur de c^d.

(a) Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`. On donnera les valeurs arrondies au centième.

(b) Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel :

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$.
   Justifier que $\ell = \alpha$.

Exercice 3

Sans tenir compte de l'ensemble de dérivabilité, calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln[(x^2+1)\mathrm{e}^{-3x+1} + 2]$$

Annexe (Exercice 1)