Baccalauréat Amérique du Nord – 20 mai 2026

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 — 6 points

Partie A

1. Le complément de l'arbre : on a au premier niveau :

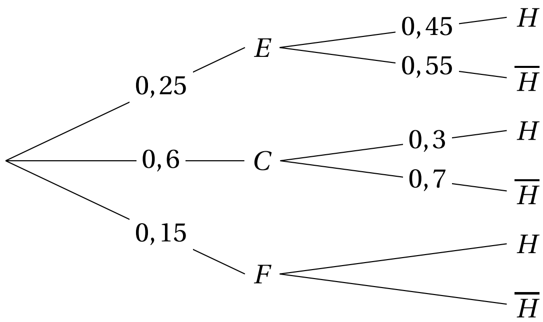
$P(E) = \dfrac{25}{100} = 0,25$, $\quad P(F) = \dfrac{15}{100} = 0,15$, donc par complément à 1 :

$P(C) = 1 - (0,25 + 0,15) = 1 - 0,4 = 0,6 = \dfrac{60}{100} = 60\,\%$.

Au second niveau :

- On sait que $P_E(H) = 0,45$, d'où $P_E\left(\overline{H}\right) = 1 - 0,45 = 0,55$;
- $P_C(H) = 0,30$ d'où $P_C(H) = 1 - 0,30 = 0,70$;

L'arbre de probabilités complété est :



2. Par définition des probabilités conditionnelles :

$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0,25 \times 0,45 = 0,1125$.

3. Les évènements E, C et F forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(H) = P\left(E \cap H\right) + P\left(C \cap H\right) + P\left(F \cap H\right)$$

D'où :
$$\begin{aligned} P(H) &= 0,1125 + P(C) \times P_C(H) + P\left(F \cap H\right) \\ &= 0,1125 + 0,6 \times 0,3 + 0,12 \\ &= 0,1125 + 0,18 + 0,12 \\ &= 0,4125 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est bien de 0,4125.

4. Trouver la probabilité qu'un abonné ayant activé l'option « Écoute hors-ligne » ait choisi l'abonnement « Étudiant » revient à calculer la probabilité $P_H(E)$.

$P_H(E) = \dfrac{P\left(H \cap E\right)}{P(H)} = \dfrac{0,1125}{0,4125} = \dfrac{3}{11} \approx 0,273 \quad$ à 10^{-3} près.

La probabilité qu'un abonné ayant activé l'option « Écoute hors-ligne » ait choisi l'abonnement « Étudiant » est égale à 0,273 arrondi au millième.

Partie B

1. On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et on considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise, c'est-à-dire à huit répétitions identiques et indépendantes.

La probabilité du succès (un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne ») est égale à 0,4125.

Donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}4125$.

Remarque : ici, on a une rédaction plus légère, car l'énoncé demande d'admettre que X suit une loi binomiale. Sinon, il faudrait les trois arguments classiques :

- On a une épreuve à deux issues, succès de probabilité $p = 0{,}4125$ et échec ;
- cette épreuve est répétée $n = 8$ fois, de façon identique et indépendante (car la constitution de l'échantillon est assimilé à un tirage au sort **avec** remise) ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne » revient à calculer la probabilité $P(X = 0)$.

$P(X=0) = \binom{8}{0} \times 0{,}4125^0 \times (1-0{,}4125)^{8-0} = 0{,}5875^8 \approx 0,014$ à 10^{-3} près.

La probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,014 arrondi au millième.

3. a. Pour tout entier naturel non nul n, soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

La variable aléatoire X_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et 0,4125.

$q_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}4125^0 \times (1-0{,}4152)^{n-0} = 1 - 0{,}5875^n$.

Pour tout n entier naturel non nul, on a bien $q_n = 1 - 0{,}5875^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 % revient à déterminer le plus petit entier naturel n tel que $q_n \geqslant 0,999$.

$$\begin{aligned}
q_n \geqslant 0,999 &\iff 1 - 0{,}5875^n \geqslant 0,999\\
&\iff 0,001 \geqslant 0{,}5875^n\\
&\iff \ln(0,001) \geqslant \ln(0{,}5875^n) \quad \text{car la fonction logarithme népérien est croissante sur}\left]0\ ;\ +\infty\right[\\
&\iff \ln(0,001) \geqslant n\ln(0{,}5875) \quad \text{par propriété de la fonction ln}\\
&\iff \frac{\ln(0,001)}{\ln(0{,}5875)} \leqslant n \quad \text{car } \ln(0{,}5875) < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0{,}5875)} \approx 12{,}9875$

La plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 % est donc égale à 13.

Partie C

1. La variable aléatoire Y peut prendre les valeurs :

- 5 € (uniquement l'abonnement « Étudiant »)
- 7 € (uniquement l'abonnement « Étudiant » avec l'option « Écoute hors-ligne »)
- 10 € (uniquement l'abonnement « Classique »)
- 12 € (uniquement l'abonnement « Classique » avec l'option « Écoute hors-ligne »)
- 16 € (uniquement l'abonnement « Famille »)
- 18 € (uniquement l'abonnement « Famille » avec l'option « Écoute hors-ligne »)

2. Il reste à calculer $P\left(F \cap \overline{H}\right)$.

On a $P(F) = P(F \cap H) + P\left(F \cap \overline{H}\right) \iff 0,15 = 0,12 + P\left(F \cap \overline{H}\right) \iff$

$P\left(F \cap \overline{H}\right) = 0,15 - 0,12 = 0,03.$

Le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y est donc :

y_i	5	7	10	12	16	18
évènement $\{Y = y_i\}$	$E \cap \overline{H}$	$E \cap H$	$C \cap \overline{H}$	$C \cap H$	$F \cap \overline{H}$	$F \cap H$
$P(Y = y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

3. $E(Y) = \sum_{i=1}^{6} P(Y = y_i) y_i$

$= 5 \times 0,1375 + 7 \times 0,1125 + 10 \times 0,42 + 12 \times 0,18 + 16 \times 0,03 + 18 \times 0,12$

$= 10,475$

Ce qui est le résultat donné.

Sur un très grand nombre d'abonnés, le tarif moyen mensuel sera de 10,475 €.

4. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $V(Y) \approx 13,70$ arrondi au centième.

5. a. $V(Z) = \left(\sigma(Z)\right)^2 = 2^2 = 4$

La variance de la variable aléatoire Z vaut 4.

b. On cherche la probabilité que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros soit $P(6 < Z < 12)$

On remarque que l'espérance de Z est 9 €, c'est la valeur au milieu de l'intervalle $]6\,;\,12[$.

On a donc : $P(6 < Z < 12) = P(9 - 3 < Z < 9 + 3)$

$= P(-3 < Z - 9 < 3)$

$= P\left(|Z - 9| < 3\right)$

$= 1 - P(|Z - 9| \geqslant 3)$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{t^2}$

Pour $t = 3$ on obtient : $P\left(|Z - 9| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{4}{3^2}$.

D'où : $1 - P\left(|Z - 9| \geqslant 3\right) \geqslant 1 - \dfrac{4}{9}$.

Soit : $P(6 < Z < 12) \geqslant \dfrac{5}{9} > \dfrac{4,5}{9} = 0,5$.

Donc le responsable a raison, si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

EXERCICE 2 — 4 points

Partie A : étude d'un modèle discret

1. $u_1 = 4 - \dfrac{4}{u_0} = 4 - \dfrac{4}{4} = 4 - 1 = 3.$

Le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donné par ce modèle sera de 3 000.

2. a. La fonction h est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x on a :

$h'(x) = 0 - 4 \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{4}{x^2} > 0$

Donc h' est une fonction à valeurs strictement positives sur $]0\,;\,+\infty[$, cela implique que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $h(u_n) = u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose l'affirmation P_n : « $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$. »

Initialisation : pour $n = 0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 4$ et d'après la question précédente $u_1 = 3$.

Donc $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$. Donc l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ et $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$ vraie (c'est l'hypothèse de récurrence P_n)

Par croissance de la fonction h démontrée à la question **2. a.** les images de ces quatre nombres sont rangées dans le même ordre que leurs antécédents, soit

$h(2) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant h(4)$.

Or $h(2) = 4 - \dfrac{4}{2} = 4 - 2 = 2$, $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(4) = 4 - \dfrac{4}{4} = 4 - 1 = 3$.

On a donc $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ et comme $3 < 4$, on a finalement

$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$: P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \geqslant 0$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

c. D'après la question précédente, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$: la suite est minorée par 2 et majorée par 4 ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite est décroissante ;

La suite est donc décroissante et minorée, elle est donc convergente, vers une limite $\ell \geqslant 2$.

d. La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence h est continue car dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et la suite est convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite ℓ de la suite (u_n) doit vérifier l'équation $h(\ell) = \ell \iff 4 - \dfrac{4}{\ell} = \ell$.

En multipliant chaque membre par $\ell \neq 0$, on obtient $\ell^2 = 4\ell - 4 \iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell - 2 = 0 \iff \ell = 2$.

L'unique solution de l'équation étant 2, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

e. Ce modèle prévoit une stabilisation de la population à 2 000 perches-soleil, et ne prévoit donc pas une élimination à long terme de l'espèce envahissante.

3. a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2\ ;\ 4[$.

Le script qui renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$ est :

```
def population(s) :
  u = 4
  n = 0
  while u >= s :
    u = 4 - 4/u
    n = n + 1
  return n
```

La variable `u` va stocker la valeur d'un terme de la suite, tandis que la variable `n` va stocker la valeur de l'indice correspondant.

Pour que la boucle `while` s'arrête dès que $u_n < s$, il faut qu'elle continue tant que cette condition n'est pas réalisée, c'est-à-dire tant que `u` contient une valeur qui n'est pas strictement inférieure à s.

Et tant que c'est le cas, les deux instructions à répéter sont : de remplacer la valeur stockée dans `u` par la valeur suivante, en appliquant la relation de récurrence, et donc d'augmenter de 1 la valeur de l'indice stocké dans `n`, pour garder la correspondance.

b. L'algorithme donne :
- $u_9 = 2,2$ et
- $u_{10} \approx 2,182 < 2,2$, donc la commande `population(2.2)` renvoie 10.

La population sera inférieure à 2 200 perches-soleil à partir de 2035 (2025 + 10).

Partie B : étude d'un modèle continu

1. $(E)\quad y' + y = 2 \quad$ soit $\quad y' = -y + 2$.

Cette équation différentielle est de la forme $\quad y' = ay + b \quad$ avec $a = -1$ et $b = 2$.

Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$f(t) = k\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{2}{-1} = k\mathrm{e}^{-t} + 2 \quad$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. p est solution de l'équation (E) donc il existe un réel k tel que $p(t) = k\mathrm{e}^{-t} + 2$

On sait que $p(0) = 4$ donc : $\quad \begin{aligned} p(0) = 4 &\iff 4 = k\mathrm{e}^0 + 2 \\ &\iff 2 = k \end{aligned}$

L'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est donc bien : $\quad p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2$.

3. Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, par limite de produit par 2 puis limite de somme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-t} + 2 = 2$

Donc ce modèle ne prévoit pas non plus une élimination à long terme de l'espèce envahissante, il prévoit une stabilisation à 2 000 perches-soleil. Ce qui est cohérent avec le modèle étudié à la partie **A**.

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A

1. Dans le repère $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}, \overrightarrow{\mathrm{OK}}\right)$ on a : $\quad \mathrm{A}(-1\,;\,-1\,;\,0) \quad$ et $\quad \mathrm{D}(1\,;\,-1\,;\,0)$.

2. Étant données les coordonnées de S et C, on a donc :

$\overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{C} - x_\mathrm{S} \\ y_\mathrm{C} - y_\mathrm{S} \\ z_\mathrm{C} - z_\mathrm{S} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ finalement : $\overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{\mathrm{SB}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

On est dans un repère orthonormé donc :

$\overrightarrow{\mathrm{SC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2) = -1 + 1 + 4 = 4$.

3. On a SC$= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \quad$ et $\quad$ SB$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{SC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}} = \mathrm{SC} \times \mathrm{SB} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BSC}}\right) &\iff 4 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BSC}}\right) \\ &\iff \frac{4}{6} = \cos\left(\widehat{\mathrm{BSC}}\right) \\ &\iff \frac{2}{3} = \cos\left(\widehat{\mathrm{BSC}}\right) \end{aligned}$$

D'où $\quad \widehat{\mathrm{BSC}} = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 48,1897(°) \quad$ soit $\quad \widehat{\mathrm{BSC}} \approx 48,2(°)$, $\quad$ arrondi au dixième de degré près.

Partie B

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{SB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SC}}$ ne sont pas colinéaires. (On peut le justifier par étude des coordonnées des vecteurs, ou parce que l'angle $\widehat{\mathrm{BSC}}$ n'est ni plat ni nul, ou parce que le plan étant nommé (SBC), cela implique que les points S, B et C ne sont pas alignés).

De plus : $\quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}} = 0 \times (-1) + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 + 2 - 2 = 0$

et $\quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{SC}} = 0 \times (1) + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 + 2 - 2 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (SBC).

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant normal au plan (SBC), une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $\quad 0x + 2y + z + d = 0 \quad$ avec $d \in \mathbb{R}$.

$S(0\,;\,0\,;\,2) \in (\text{SBC}) \quad$ donc $\quad 0 + 2 \times 2 + d = 0 \iff d = -2$.

Donc une équation cartésienne du plan (SBC) est $\quad 2y + z - 2 = 0$.

2. a. H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC) donc la droite (OH) est orthogonale au plan (SBC). Un vecteur normal au plan (SBC) sera donc un vecteur directeur de la droite (OH).

Un vecteur directeur de la droite (OH) est donc le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

De plus le point O, de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,0)$ appartient à la droite (OH) donc une représentation de la droite (OH) est : $\begin{cases} x = x_{\text{O}} + x_{\overrightarrow{n}}\,t \\ y = y_{\text{O}} + y_{\overrightarrow{n}}\,t \\ z = z_{\text{O}} + z_{\overrightarrow{n}}\,t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ soit

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. H est le projeté orthogonal de O sur (SBC), alors H = (OH) ∩ (SBC).

Donc H est le point de (OH) dont le paramètre fait que les coordonnées paramétriques vérifient l'équation de (SBC).

On résout donc : $\quad 4t + t - 2 = 0 \iff 5t = 2$

$$\iff t = \frac{2}{5}$$

H est donc le point de paramètre $t = \dfrac{2}{5}$ sur (OH),

donc ses coordonnées sont : $\quad \text{H}\left(0\,;\,\dfrac{4}{5}\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$.

c. La distance OH vaut donc : $\quad \text{OH} = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\dfrac{4}{5} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{2}{5} - 0\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4 \times 5}{5^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

La distance du point O au plan (SBC), c'est-à-dire la distance de O à son projeté orthogonal sur (SBC), est donc bien égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm).

Partie C

1. a. La base de la pyramide SABCD est le carré ABCD, de côté 2 cm et sa hauteur associé est le segment [SO], de longueur 2 cm.

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \dfrac{8}{3}$ (cm^3.

Son volume est donc égal à $\quad \dfrac{8}{3}$ (cm^3).

b. La base de la pyramide OCBS est le triangle OCB et sa hauteur associé est le segment [SO].

L'aire du triangle OCB est égale au quart de l'aire du carré ABCD car O est le centre du carré ABCD.

La hauteur étant la même, le volume de la pyramide OCBS est égal au quart du volume de la pyramide SABCD.

$V' = \dfrac{1}{4}V = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Donc le volume de la pyramide OCBS est bien égal à $\dfrac{2}{3}$ (cm^3).

2. Dans le triangle SBC, on a : $\quad \text{SB} = \text{SC} = \sqrt{6} \quad$ donc SBC est un triangle isocèle en S.

J étant le milieu du segment [BC], le segment [SJ] est la hauteur issue de S dans le triangle SBC.

Le triangle JSB est rectangle en J donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\text{SB}^2 = \text{SJ}^2 + \text{BJ}^2 &\iff \text{SJ}^2 = \text{SB}^2 - \text{BJ}^2\\ &\iff \text{SJ}^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 - 1^2 = 6 - 1 = 5\\ &\iff \text{SJ} = \sqrt{5} \quad \text{car une longueur est positive}\end{aligned}$$

Soit A l'aire du triangle SBC.

On a : $\quad A = \dfrac{\text{longueur de la base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{2 \times \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

L'aire du triangle SBC est donc $\sqrt{5}$ (cm^2).

3. Calculons le volume de la pyramide OCBS en prenant le triangle SBC comme base. La hauteur associée sera donc le segment [OH] car H est le projeté orthogonal de O sur le plan (SBC).

On a donc : $\quad V_{\text{OCBS}} = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{5} \times \text{OH}$

Or, d'après la question **1. b.** de la **Partie C**, $\quad V_{\text{OCBS}} = \dfrac{2}{3}$ (cm^3).

Donc $\quad \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\text{OH} \iff \text{OH} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Donc la distance du point O au plan (SBC), c'est-à-dire la distance de O à son projeté orthogonal sur (SBC), est bien égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm).

Cela confirme bien le résultat de la **Partie B**.

EXERCICE 4 — 5 points

1. De ce que l'on voit de la courbe, la fonction est manifestement convexe d'abord, puis concave. Comme la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A semble traverser la courbe au point de tangence, on peut émettre la conjecture que la fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$ et concave sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$.

De plus, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty$

Donc par produit et somme, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\ln\left(x^2+1\right)-3x\\ &= 5\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)-3x\\ &= 5\ln\left(x^2\right)+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-3x \quad \text{par propriété de la fonction ln.}\\ &= 5\times 2\ln(x)-3x+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\\ &= x\left(10\frac{\ln x}{x}-3\right)+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

On a donc bien : pour tout x réel strictement positif, $f(x)=x\left(10\dfrac{\ln x}{x}-3\right)+5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

b. On va utiliser la forme établie à la question précédente pour lever l'indétermination :

- D'une part :
  D'après la propriété des croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.
  Donc par produit et somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}10\frac{\ln(x)}{x}-3=-3$.
  De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc par produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(10\frac{\ln x}{x}-3\right)=-\infty$.
- D'autre part : $\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}=1\\ \displaystyle\lim_{X\to 1}\ln(X)=0\end{cases}$ par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$
  Par produit on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$.

Finalement, par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

4. a. Pour déterminer l'expression de la fonction dérivée de f, on va revenir à l'expression de départ de $f(x)$, plus simple que celle obtenue à la question **3. a.**.

On a admis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si on pose : $\begin{cases}u : x\longmapsto x^2+1\\ u' : x\longmapsto 2x\end{cases}$ on a $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=5\ln\left(u(x)\right)-3x$.

Ainsi, on a : $\forall x\in\mathbb{R},$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\frac{u'(x)}{u(x)}-3\\ &= 2\frac{2x}{x^2+1}-3\\ &= \frac{10x}{x^2+1}+\frac{-3\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\\ &= \frac{10x-3x^2-3}{x^2+1}\\ &= \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}\end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression attendue.

b. Pour tout x réel, l'expression x^2+1 est supérieure à 1, et donc strictement positive.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui du trinôme : $-3x^2+10x-3$.

Ce trinôme a un coefficient dominant égal à -3, donc négatif. Cela signifie que toutes les images $-3x^2+10x-3$ sont négatives, sauf pour les valeurs x comprises entre d'éventuelles racines.

Le discriminant du trinôme est : $\Delta=10^2-4\times(-3)\times(-3)=100-36=64=8^2$.

Comme il est strictement positif, le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1=\dfrac{-10-8}{2\times(-3)}=3$ et $x_2=\dfrac{-10+8}{2\times(-3)}=\dfrac{1}{3}$.

On peut donc établir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
signe de $-3x^2+10x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc une fonction f qui est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{3}\right]$, ainsi que sur l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,3\right]$.

Ceci est cohérent avec la courbe tracée sur le sujet.

5. a. Puisque l'expression de la fonction dérivée seconde est donnée, on va pouvoir utiliser ce résultat.

Le dénominateur $\left(x^2+1\right)^2$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en tant que carré d'un réel lui-même strictement positif.

$f''(x)$ a donc le même signe que son numérateur :

$-10x^2+10 = 10(1-x^2) = 10(1-x)(1+x)$.

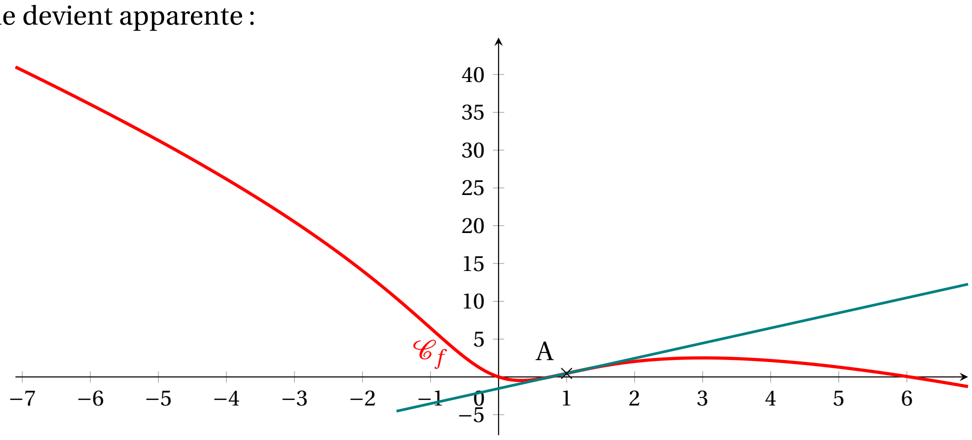
Le numérateur est donc une expression polynomiale de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif, et ayant deux racines évidentes : 1 et -1.

On peut donc établir le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est donc convexe sur $[-1;1]$, et concave sur $]-\infty;-1]$ ainsi que sur $[1;+\infty[$, avec deux points d'inflexion, à l'abscisse -1 et à l'abscisse 1(c'est le point A).

Cela permet donc de rejeter la conjecture formulée à la question **1.**. Cette conjecture est faussée par l'échelle choisie pour la représentation de f. Ci-après, avec une échelle qui permet d'observer les images pour des abscisses inférieures à -1, la concavité de cette zone devient apparente :



b. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est donnée par la formule classique : $y = f'(1)\times\left(x-1\right)+f(1)$.

Avec : $f(1) = 5\ln(1^2+1)-3\times 1 = 5\ln(2)-3$;

et : $f'(1) = \dfrac{-3\times 1^2+10\times 1-3}{1^2+1} = \dfrac{4}{2} = 2$;

On arrive à : $y = 2\left(x-1\right)+5\ln(2)-3$ soit $y = 2x+5\ln(2)-5$.

c. On nous demande d'établir une inégalité pour $x \geqslant 1$.

Sur $[1\,;\,+\infty[$, on a établi à la question **5. a.** que la fonction est concave.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f est en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, notamment en dessous de celle au point d'abscisse 1, dont on vient de déterminer l'équation.

On peut donc affirmer : $$\begin{aligned} f(x) \leqslant 2x+5\ln(2)-5 &\iff 5\ln\left(x^2+1\right)-3x \leqslant 2x+5\ln(2)-5\\ &\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 3x+2x+5\ln(2)-5\\ &\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 5x+5\ln(2)-5\\ &\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 5\big(x+\ln(2)-1\big)\\ &\iff \ln\left(x^2+1\right) \leqslant x+\ln(2)-1 \quad \text{car } 5>0 \end{aligned}$$

On établit donc ainsi l'inégalité demandée.

Corrigé du Baccalauréat Amérique du Nord – 21 mai 2026

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 — 4 points

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.
II a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable ;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

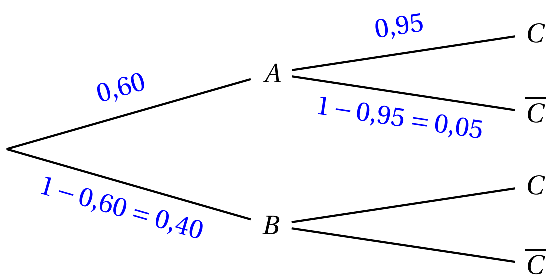
On choisit au hasard une tomate dans le stock.
On désigne par :

- A l'évènement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'évènement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'évènement « La tomate est commercialisable ».

Pour un évènement quelconque E, on note $P(E)$ la probabilité de E.

Partie A

1. On complète l'arbre ci-dessous.



2. **a.** La probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A est $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$.

b. On cherche $P_B(C)$. D'après le texte : $P(C) = 0,91$.
D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$ donc $P(C) = P(A \cap C) + P(B) \times P_B(C)$.
Donc : $0,91 = 0,57 + 0,40 \times P_B(C)$, soit $0,34 = 0,40 \times P_B(C)$, et donc : $P_B(C) = \dfrac{0,34}{0,40} = 0,85$.

c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B.
Il faut donc comparer $P_{\overline{C}}(A)$ et $P_{\overline{C}}(B)$.

$$P_{\overline{C}}(A) = \frac{P\left(A \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0,60 \times 0,05}{1 - 0,91} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$$

$$P_{\overline{C}}(B) = \frac{P\left(B \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0,40 \times (1 - 0,85)}{0,09} = \frac{0,06}{0,09} = \frac{2}{3}$$

$P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{1}{2} \times P_{\overline{C}}(B)$ donc le responsable commercial a raison.

Partie B

On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale ; ses paramètres sont $n = 15$ et $p = 0,09$.

b. La probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables est :

$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times (1 - 0,09)^{15-2}$ qui a pour arrondi au millième 0,250.

c. La probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables est :

$P(X \leqslant 2) \approx 0,853$ (à la calculatrice).

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n, la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

On admet que la variable aléatoire X_n, suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09.

a.

- Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09, alors l'espérance de X_n est, par propriété : $E(X_n) = np = 0,09n$.
  On a ensuite $F_n = \dfrac{1}{n} \times X_n$,
  donc, par linéarité de l'espérance : $E(F_n) = \dfrac{1}{n}E(X_n) = \dfrac{1}{n} \times 0,09n = 0,09$.
- Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09, alors la variance de X_n est, par propriété : $V(X_n) = np(1-p) = 0,09 \times (1 - 0,09) \times n = 0,0819n$.
  D'après la formule : $V(aX) = a^2V(X)$, on a : $V(F_n) = V\left(\dfrac{X_n}{n}\right) = V\left(\dfrac{1}{n}X_n\right) = \dfrac{V(X_n)}{n^2}$.
  Donc $V(F_n) = \dfrac{V(X_n)}{n^2} = \dfrac{0,0819n}{n^2} = \dfrac{0,0819}{n}$.

b. On veut démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geqslant 1 - \dfrac{32,76}{n}$.

$0,04 < F_n < 0,14 \iff 0,09 - 0,05 < F_n < 0,09 + 0,05 \iff -0,05 < F_n - 0,09 < 0,05$

$\iff |F_n - 0,09| < 0,05$

donc $P(0,04 < F_n < 0,14) = P(|F_n - 0,09| < 0,05) = 1 - P(|F_n - 0,09| \geqslant 0,05)$

La variable aléatoire F_n a pour espérance $E(F_n)$ et pour variance $V(F_n)$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

pour tout $\delta \in \left]0 ; +\infty\right[$, $P\left(\left|F_n - E(F_n)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(F_n)}{\delta^2}$.

$E(F_n) = 0,09$ et $V(F_n) = \dfrac{0,0819}{n}$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

pour tout $\delta \in \left]0 ; +\infty\right[$, $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{\frac{0,0819}{n}}{\delta^2}$.

Pour $\delta = 0,05$, l'inégalité : $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{\frac{0,0819}{n}}{0,05^2}$, soit $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{32,76}{n}$

$P(0,04 < F_n < 0,14) = 1 - P(|F_n - 0,09| \geqslant 0,05)$

$P\left(\left|F_n - 0{,}09\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \dfrac{32{,}76}{n}$ donc $-P\left(\left|F_n - 0{,}09\right| \geqslant 0{,}05\right) \geqslant -\dfrac{32{,}76}{n}$

donc $1 - P\left(\left|F_n - 0{,}09\right| \geqslant 0{,}05\right) \geqslant 1 - \dfrac{32{,}76}{n}$ et donc $P\left(0{,}04 < F_n < 0{,}14\right) \geqslant 1 - \dfrac{32{,}76}{n}$

c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables.

Pour $n = 500$:

- La fréquence de tomates non commercialisables est $F = \dfrac{55}{500} = 0{,}11$; on remarque que $0{,}04 \leqslant F \leqslant 0{,}14$
- $1 - \dfrac{32{,}76}{n} = 1 - \dfrac{32{,}76}{500} = 0{,}934\,48$

On a donc $P\left(0{,}04 \leqslant F_{500} \leqslant 0{,}14\right) \geqslant 0{,}934\,48$.

Il y a donc une probabilité supérieure à 93,448 % que la fréquence de tomates non commercialisables soit comprise entre 0,04 et 0,14.

Comme 0,11 est compris entre 0,04 et 0,14, le résultat est conforme à ce qu'attendait le responsable.

EXERCICE 2 — 6 points

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. On résout l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x \iff x\left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = 0 \iff x\left(\frac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 0$$

Soit $x = 0$, soit $\dfrac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 0$.

$$\frac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \iff 2 - \sqrt{1+x^2} = 0 \iff 2 = \sqrt{1+x^2} \iff 4 = 1 + x^2 \iff 3 = x^2$$
$$\iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

L'équation $f(x) = x$ a pour ensemble solution $S = \left\{-\sqrt{3}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{3}\right\}$.

2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$, soit $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2 + 2x^2 - 2x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

b. Pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On veut démontrer par récurrence que, pour tout n, la propriété $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$ est vraie.

- **Initialisation**
  $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{2\times 1}{\sqrt{1+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$
  Donc la propriété $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < \sqrt{3}$ est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.
  La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f\left(\sqrt{3}\right)$
  $f(1) = \sqrt{2} > 1$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et
  $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$
  Donc on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \sqrt{3}$, et donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2.
- Pour tout n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a : $u_n < \sqrt{3}$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente.

On appelle ℓ la limite de (u_n). Comme pour tout n, $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$, on a : $1 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on sait que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue ; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$.
- La limite d'une suite est unique, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$.

On en déduit que $\ell = f(\ell)$ et donc que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

La seule solution vérifiant $1 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$ est $\sqrt{3}$ (voir **A.1**), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

a.
- $u_0 = 1$ donc $v_0 = \dfrac{u_0^2}{3-u_0^2} = \dfrac{1^2}{3-1^2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$
- $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} = \dfrac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}{3-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2} = \dfrac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}} = \dfrac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{\frac{3(1+u_n^2)-4u_n^2}{1+u_n^2}}$

$$= \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}\times\frac{1+u_n^2}{3+3u_n^2-4u_n^2} = \frac{4u_n^2}{3-u_n^2} = 4\times\frac{u_n^2}{3-u_n^2} = 4v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 4$.

b.
- La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 4$ donc, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 0{,}5\times 4^n$.
  On en déduit que, pour tout n, $v_n > 0$.
- $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2} \iff v_n\left(3-u_n^2\right) = u_n^2 \iff 3v_n - v_n\times u_n^2 = u_n^2 \iff 3v_n = u_n^2(1+v_n)$

$$\iff \frac{3v_n}{1+v_n} = u_n^2$$

$v_n > 0$ donc $1 + v_n > 0$ donc $\dfrac{3v_n}{1+v_n} > 0$ et donc $\sqrt{\dfrac{3v_n}{1+v_n}}$ existe.

De plus on sait que $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$ donc $u_n > 0$.

On a donc : $u_n = \sqrt{\dfrac{3v_n}{1+v_n}}$.

On en déduit que pour tout n, on a : $u_n = \sqrt{\dfrac{3\times 0{,}5\times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}} = \sqrt{\dfrac{1{,}5\times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}}$

c. $u_n = \sqrt{\dfrac{1{,}5\times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}} = \sqrt{\dfrac{1{,}5\times 4^n}{4^n\left(\frac{1}{4^n}+0{,}5\right)}} = \sqrt{\dfrac{1{,}5}{\frac{1}{4^n}+0{,}5}}$

D'après les propriétés des suites géométriques, on sait que si $q > 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

$4>1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1{,}5}{\frac{1}{4^n}+0{,}5} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$

Par continuité de la fonction racine carrée, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2$.

1. On complète le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n).

```
from math import*

def termes(p) :
    u = 1
    S = 0
    L = [ ]
    for i in range(p) :
        S = S+u**2
        u = 2*u/sqrt(1+u**2)
        L.append(S)
    return L
```

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$. Donc : $1 \leqslant u_k^2 \leqslant 3$.

S_n est la somme de n termes compris entre 1 et 3 ; donc $n \times 1 \leqslant S_n \leqslant n \times 3$ donc $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

3. Calculs de limites

- $n \leqslant S_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
- $n \leqslant S_n \leqslant 3n$ donc $\dfrac{n}{n^2} \leqslant \dfrac{S_n}{n^2} \leqslant \dfrac{3n}{n^2}$ donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{S_n}{n^2} \leqslant \dfrac{3}{n}$.

  $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0$.

EXERCICE 3 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A(4 ; 2 ; 2), B(5 ; −2 ; 3) et C(1 ; 1 ; 1) ;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& 1+t \\ z &=& 1+2t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

- le plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ.

1. • Pour $t = 0$ on trouve :
$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2\times 0 = 1 = x_C\\ y = 1+0 = 1 = y_C\\ z = 1+2\times 0 = 1 = z_C\end{array}\right.$
donc le point C appartient à la droite Δ.

• Le point A appartient à la droite Δ si et seulement si il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l} x_A = 1+2t\\ y_A = 1+t\\ z_A = 1+2t\end{array}\right.$

c'est à dire si et seulement si le système $\left\{\begin{array}{l} 4 = 1+2t\\ 2 = 1+t\\ 2 = 1+2t\end{array}\right.$ admet une unique solution.

Or la première équation donne $t = \dfrac{3}{2}$ et la deuxième $t = 1$, ce système n'admet donc pas de solution d'où le point A n'appartient pas à la droite Δ.

2. a. Le plan $\mathscr{P}$ est perpendiculaire à la droite Δ, un vecteur directeur de la droite Δ est donc un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

La représentation paramétrique de Δ nous donne $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donc de la forme $2x + y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
De plus, le plan $\mathscr{P}$ contient le point A donc :
$2x_A + y_A + 2z_A + d = 0 \iff 2\times 4 + 2 + 2\times 2 + d = 0 \iff 8+2+4+d = 0 \iff d = -14$
Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc bien : $2x + y + 2z - 14 = 0$.

b. Un point appartient à un plan si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de ce plan.
$2x_B + y_B + z_B - 14 = 2\times 5 - 2 + 2\times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$
donc le point B appartient au plan $\mathscr{P}$.
$2x_C + y_C + z_C - 14 = 2\times 1 + 1 + 2\times 1 - 14 = 2 + 1 + 2 - 14 = -9 \neq 0$
donc le point C n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

3. a. Le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le point D appartient au plan $\mathscr{P}$ et si la droite (DC) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et on sait que $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{n}$ sont égaux et par suite colinéaires, donc la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

De plus : $2x_D + y_D + z_D - 14 = 2\times 3 + 2 + 2\times 3 - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0$

donc le point D appartient au plan $\mathscr{P}$.

Donc le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

b. Par définition du point A, il appartient au plan $\mathscr{P}$.

D'après la question 2.b., le point B appartient au plan $\mathscr{P}$

D est le projeté du point C sur le plan $\mathscr{P}$, donc il appartient au plan $\mathscr{P}$. C distinct de D est sur la perpendiculaire en D au plan $\mathscr{P}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires

(par exemple $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$).

Conclusion : les points A, B et D définissent bien le plan $\mathscr{P}$ et $C \notin \mathscr{P}$: les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c. On est dans un repère orthonormé donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 1\times(-1) - 4\times 0 + 1\times 1 = 0$.

d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ est nul donc ABD est un triangle rectangle en A.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABD.

$$\begin{aligned}\text{On a } \mathscr{A} &= \frac{AB\times AD}{2}.\\ &= \frac{\sqrt{1^2+4^2+1^2}\times\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{18}\times\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2\times 9\times 2}}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

Dans la pyramide ABCD, la hauteur associé à la base ABD est le segment [CD] car le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan (ABD).

$$\begin{aligned}\text{D'où } V &= \frac{1}{3}\times 3\times CD\\ &= \sqrt{2^2+1^2+2^2}\\ &= \sqrt{9} = 3\end{aligned}$$

Le volume de la pyramide ABCD est 3 unités de volume.

4. a. H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) si et seulement H appartient à la droite (BC) et les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires.

- Soit $X\left(\frac{73}{29}\ ;\ \frac{-4}{29}\ ;\ \frac{51}{29}\right)$.

  On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AX}\begin{pmatrix}-\frac{43}{29}\\-\frac{62}{29}\\\frac{-7}{29}\end{pmatrix}$

  Le repère étant orthonormé on peut calculer le produit scalaire :

  $\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{172}{29} - \frac{186}{29} + \frac{14}{29} = \frac{186}{29} - \frac{186}{29} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AX}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

  D'autre part $\overrightarrow{BX} = \begin{pmatrix}-\frac{72}{29}\\\frac{54}{29}\\-\frac{72}{29}\end{pmatrix}$ et on constate que $\overrightarrow{BX} = \frac{18}{29}\overrightarrow{BC}$.

Conclusion les vecteurs $\overrightarrow{BX}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ou encore X appartient à la droite (BC).

X est donc le projeté orthogonal de A sur (BC); les coordonnées de H sont bien $\left(\dfrac{73}{29}\ ;\ \dfrac{-4}{29}\ ;\ \dfrac{21}{29}\right)$.

Donc le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

b. Le segment [AH] est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC. L'aire du triangle ABC est donc $\mathscr{A}' = \dfrac{BC \times AH}{2}$.

$AH^2 = \left(-\dfrac{43}{29}\right)^2 + \left(-\dfrac{62}{29}\right)^2 + \left(-\dfrac{7}{29}\right)^2 = \dfrac{5742}{29^2} = \dfrac{198}{29}$

$BC^2 = (-4)^2 + 3^2 + (-2)^2 = 16 + 9 + 4 = 29$

D'où $\mathscr{A}' = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\dfrac{198}{29}} \times \sqrt{29} = \dfrac{\sqrt{198}}{2} = \dfrac{\sqrt{22 \times 9}}{2} = \dfrac{3\sqrt{22}}{2}$.

c. Soit h la distance du point D au plan (ABC).

h sera la hauteur associé à la base (ABC) dans la pyramide ABCD.

On a donc $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}' \times h$

D'où $3 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\sqrt{22}}{2} \times h$ donc $h = \dfrac{3 \times 2}{\sqrt{22}} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$

La distance du point D au plan (ABC) est donc égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

EXERCICE 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

1. On cherche la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour tout réel x strictement positif, $f(x) = x\,(\ln x)^2 = x \times \ln(x) \times \ln(x)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout réel x > 0, on pose $g(x) = x\ln x$.

a. Soit $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$,

$4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = 4\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = 4\left(\sqrt{x} \times \dfrac{1}{2}\ln(x)\right)^2 = 4 \times x \times \dfrac{1}{4}(\ln x)^2 = x\,(\ln x)^2 = f(x)$

On a bien : pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)$.

b. On cherche $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 0} g(\sqrt{x}) = 0$

D'où, par produit, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3. On étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

a. f est de la forme uv avec : $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[\ \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$

On a alors : $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[\ \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x \end{cases}$

Or : $f' = u'v + v'u$

Donc, $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times \dfrac{2\ln x}{x}$

$= \ln x \times \ln x + 2\ln x$

$= (\ln x)(\ln x + 2)$

Donc sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.

b. On en déduit les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Étudions le signe de $f'(x)$:

$2 + \ln(x) > 0 \iff \ln x > -2 \iff x > \mathrm{e}^{-2}$

$\ln x > 0 \iff x > 1$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
signe de $\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	0	$\nearrow$	$f\left(\mathrm{e}^{-2}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. $f\left(\mathrm{e}^{-2}\right) = \mathrm{e}^{-2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)\right)^2 = \mathrm{e}^{-2} \times (-2)^2 = 4\mathrm{e}^{-2}$

Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ est $4\mathrm{e}^{-2}$.

4. a. Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, le maximum est $4\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}54 < 2$ donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$:

- f est continue car dérivable;
- f est strictement croissante;
- $f(1) = 0 < 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 2$

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

donc l'équation admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2{,}46$ donc : $2{,}4 < \alpha < 2{,}5$.

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$.

a. La fonction f est positive sur l'intervalle $[a\,;1]$ donc $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$, par l'axe des abscisses et la courbe.

b. $x \longmapsto x(\ln x)^2$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x}\ln(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[a\ ;\ 1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[a\ ;\ 1]$, donc , d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^1 - \int_a^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\text{donc } \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\times(\ln x)^2\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1^2}{2}(\ln 1)^2 - \frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat demandé.

c. $x \longmapsto x\ln x$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x) = x\\ v(x) = \ln x\end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2\\ v'(x) = \dfrac{1}{x}\end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[a\ ;\ 1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[a\ ;\ 1]$, donc , d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^1 - \int_a^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\text{donc } \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{a^2}{2}\ln(a) - \int_a^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_a^1\\ &= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{a^2}{2}\right]\\ &= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où : } \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\right)\\ &= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat demandé.

d. On cherche la limite de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.

$\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} = -\frac{1}{2}(a\ln a)^2 + \frac{a}{2}\times a\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$

Par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{a\to 0} a\ln a = 0$

donc : par produit $\displaystyle\lim_{a\to 0}(a\ln a)^2 = 0$ et $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{a}{2}\times a\ln a = 0.$

De plus, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}$

donc, par somme, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$