

Limites et continuité

Exercice 1 (★). Calculer les limites (lorsqu'elles existent) en $x \rightarrow 0$ et en $x \rightarrow +\infty$ de :

$$1. u_1(x) = \frac{x \ln(x)}{x+1} \quad 2. u_2(x) = \sin(x)e^{-x} \quad 3. u_3(x) = x^3 \cos(x) \quad 4. u_4(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x^2}$$

Exercice 2 (★★). Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x - 1}{x} & \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + |x|}{2x^2 - |x|} & 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 16}{x^3 - 8} & 4. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{\sqrt{x - 2}} \\ 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{\pi x} & 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{1 - \sqrt{1+2x}} & 7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{1 - \sqrt{1+2x}} & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{1 - \sqrt{1+2x}} \end{aligned}$$

Exercice 3 (★★). À l'aide de changements de variables et des formules de composition déterminer les limites :

$$1. \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{(s-1) \ln(s-1)}{s^2} \quad 2. \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 e^{\frac{1}{t}}$$

Exercice 4 (★). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1}$ pour $x > -1$ et $f(x) = e^{x+1}$ pour $x \leq -1$. Est-elle continue en -1 ?

Exercice 5 (★). Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad 2. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 (★★). Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$1. \forall x \in]-1, 4[, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } [x] \text{ est impair} \\ x & \text{si } [x] \text{ est pair} \end{cases} \quad 2. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x[x]$$

Exercice 7 (★). Soit u et v deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(1) = 1 \\ v(1) = 0 \end{cases}$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $u(x) = v(x)$.

Exercice 8 (★). Montrer que l'équation $\ln(x) = x^2 - 3$ admet au moins deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 (★★). Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 10 (★★★). Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in [0, 1]$. Montrer que g admet un point fixe.

Exercice 11 (★★★). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On appelle point fixe de f tout réel x tel que $f(x) = x$. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.

Exercice 12 (★). Montrer (sans étude de fonction) que $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t \ln(t)}{1+t^2} \end{matrix}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13 (★). Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (★★). Montrer (sans étude de fonction) que $g : \begin{matrix}]1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t \sin(t-1)}{t-1} + \frac{t^2 \cos(t)}{e^t} \end{matrix}$ est bornée sur $]1, +\infty[$.

Exercice 15 (★★★). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 16 (★). Montrer que l'équation $e^{-x^2} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 17 (★). Le but de l'exercice est d'étudier pour tout $n \geq 2$ les solutions de l'équation $e^x = x + n$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) et leur comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Réaliser une étude complète de la fonction $f : x \mapsto e^x - x$ (ensemble de définition, tableau de variation, limites, allure du graphe).
2. On fixe un entier naturel $n \geq 2$. Dédire de la question précédente que l'équation $e^x = x + n$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, solutions que l'on note x_n et y_n (avec $x_n < y_n$).
3. (★★) Déterminer la limite des suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$.
4. (★★) Démontrer que les suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ sont monotones.

Exercice 18 (Type DS). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
 (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux uniques réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, qui vérifient $0 < u_n < n < v_n$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
3. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
 (a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
 (b) Soit $n \geq 3$. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
 (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge.
 (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Indication : passer à la limite dans une égalité bien choisie.