# Logarithme décimal

## I Généralités

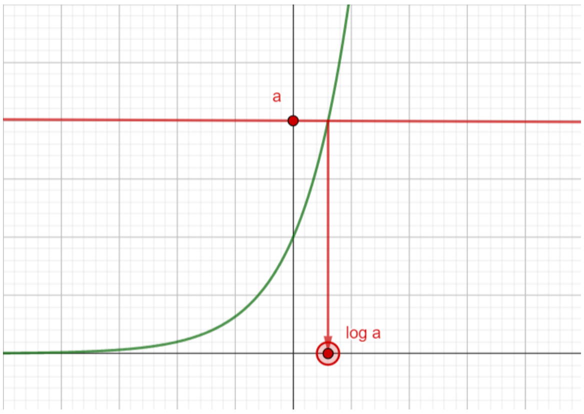
### 1- Définition

Définition :

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$

On appelle **logarithme décimal** d'un réel $a$ strictement positif, l'unique solution de l'équation $10^x = a$
Cette solution se note $\log(a)$

La fonction **logarithme décimal** qui a tout nombre $x$ strictement positif associe $\log x$ se note $\boldsymbol{log}$.




Remarque : Pour trouver des valeurs, il faudra utiliser la touche « log » de la calculatrice.

### 2- Sens de variation et représentation graphique

Représentation graphique


Propriété :

La fonction logarithme décimal est **croissante** sur $]0\,;\,+\infty[$

Remarque : On constate sur le graphique des valeurs particulières

- $\log(1) = 0$
- $\log(10) = 1$

### 3- Propriétés algébriques

Propriétés :

Soient $x$ et $y$ des réels strictement positifs et $n$ un entier naturel :

1/ $\log(x) + \log(y) = \log(x \times y)$

2/ $\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$

3/ $\log(x^n) = n\log(x)$

4/ $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

Application : Exercices 1 et 2

## II Résolutions d'équations et d'inéquations

### 1- Résolution d'équations avec un logarithme

Peu importe l'exercice, il s'agira de développer et réduire l'équation proposée pour obtenir le résultat suivant : $\log x = a$

La solution de $log\, x = a$ est $x = 10^a$

Exemple : Résoudre l'équation $\log(x^2) - \log(x) = 1$

$$\log(x^2) - \log(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{x^2}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\log(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$10^{\log(x)} = 10^1 \Leftrightarrow$$

$$x = 10$$

Application : Exercice 3

### 2- Résolution d'inéquations

#### a- $\log x \leq a$

Peu importe l'exercice, il s'agira de développer et réduire l'inéquation proposée pour obtenir le résultat suivant : $\log x \leq a$

La solution de $\log x \leq a$ est $x \leq 10^a$. L'ensemble de solutions est donc $S = ]0\,;\,10^a]$

### b- $\log x \geq a$

Peu importe l'exercice, il s'agira de développer et réduire l'inéquation proposée pour obtenir le résultat suivant : $\log x \geq a$

La solution de $\log x \geq a$ est $x \geq 10^a$. L'ensemble de solutions est donc $S = [10^a\,;+\infty[$

## 3- Résolution d'équations avec une exponentielle de base a

Peu importe l'exercice, il s'agira de développer et réduire l'équation proposée pour obtenir le résultat suivant : $a^x = b$

La solution de $a^x = b$ est $x = \frac{\log b}{\log a}$

Exemple :

L'évolution d'un capital de $2\,000$ € placé à $4\%$ d'intérêt annuel en fonction du nombre $n$ d'années est donné par la formule $2000 \times 1{,}04n$

Au bout de combien d'années ce capital est-il doublé ?

On cherche à résoudre $2000 \times 1{,}04n \geq 4000$

$$2000 \times 1.04^n \geq 4000 \Leftrightarrow$$

$$1.04^n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\log(1.04^n) \geq \log 2 \Leftrightarrow$$

$$nlog1{,}04 \geq \log 2 \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\log 2}{\log 1{,}04} \Leftrightarrow$$

$$n \geq 18$$

Il faudra donc 18 ans pour doubler son capital placé à $4\%$ d'intérêt annuel.

Application : Exercice 4

# Logarithme décimal (Exercices)

## Exercice 1

En utilisant les propriétés du log, calculer sans calculatrice

1/ $A = log(500) - log(5)$
2/ $B = log(30) + log\ (700) - log(21)$
3/ $C = log(5) + log(8) + log(25)$

## Exercice 2

Exprimer en fonction de $log(a)$ et/ou $log(b)$

1/ $A = log\left(\frac{a}{b}\right) - log(b)$
2/ $B = 2log\left(\frac{a}{b}\right) + log\left(\frac{b}{a}\right) - log\left(\frac{10}{a}\right)$
3/ $C = 10log(a) + 7log\left(\frac{b}{a}\right) - 3log(a)$
4/ $D = log(100) \times log(a)$

## Exercice 3

Résoudre les équations suivantes

1/ $\log(x) = 3$

2/ $\log(x) = -4$

3/ $\log(x+4) + \log(x) = 0$

4/ $\log(x+3) + \log(x+5) = log15$

5/ $\log(x+1) = 3 - \log(1-2x)$

6/ $\log(1-x) + \log(x+1) = -2$

7/ $\log(x+1) + \log(x-1) = log3 + 4log2$

8/ $\log(x^2 + 5x + 6) = \log\ (x+11)$

## Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes

1/ $logx > \frac{1}{2}$

2/ $2logx \leq -3$

3/ $\log(2x+1) + \log(x+3) < 1$

4/ $log24 + \log(3-x) < \log(x+1) + \log(25x-49)$

5/ $\log(3x^2 - x - 2) > \log(6x+4)$

6/ $\log(x+2) + \log\ (x-4) < 2\log\ (x-1)$