

Feuille d'exercices 19

Applications linéaires

— **Exercice 1** ●○○ — **Noyau et image d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$** Soit la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u : (x, y, z) \mapsto (y - x, 2y + z - 3x, -y + 2x).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$. Que dire de u ?
3. Déterminer de même le noyau et l'image de la fonction

$$v : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, -2x + y + z, x - 2y + z)$$

— **Exercice 2** ●○○ — **Applications linéaires, noyaux et rangs** Montrer que les applications suivantes, toutes notées u , sont linéaires, puis déterminer leur noyau, leur image et leur rang.

1. La fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ (on pourra admettre qu'elle est linéaire) définie par

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-3x_1 + 2x_2 + x_3, -4x_1 + x_3 + x_4, -x_1 - 2x_2 + x_4, 8x_2 + x_3 - 3x_4).$$

2. La fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto z + i\bar{z}$. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. La fonction de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto XP'$.
4. La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P(X^2)$.
5. La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto X^2P' - 2XP$.
6. La fonction de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^T$.
7. La fonction de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto AM - MA$, où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Les coefficients de A ont-ils joué pour la linéarité ?

— **Exercice 3** ●○○ — **Applications linéaires définies par trois images**

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$u(0, 1, 1) = (0, 1), \quad u(1, 1, 1) = (1, 1) \quad \text{et} \quad u(0, 1, 0) = (1, 0).$$

2. Déterminer l'image par u d'un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$.

— **Exercice 4** ●○○ — **Application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$** Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et (f_1, f_2, f_3) celle de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$u(e_1) = f_1 - f_3, \quad u(e_2) = f_1 - f_2 + f_3, \quad u(e_3) = 2f_1 + 2f_2 \quad \text{et} \quad u(e_4) = 3f_1 + 2f_2 - f_3.$$

2. Déterminer l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ de coordonnées dans la base canonique (x_1, x_2, x_3, x_4) (Si on a acquis le calcul matriciel, on peut l'utiliser!).
3. Déterminer une base de $\ker(u)$. L'application est-elle injective ?
4. En déduire $\text{Im}(u)$. L'application est-elle surjective ?

— **Exercice 5** ●●○ — **Sommes directes (ou pas)**

1. Soit u la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4).$$

$$\text{A-t-on } \mathbb{R}^4 = \ker(u) \oplus \text{Im}(u) ?$$

2. Soit v la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$v : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_1 - x_3, 4x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

$$\text{A-t-on } \mathbb{R}^3 = \ker(v) \oplus \text{Im}(v) ?$$

— **Exercice 6** ●●○ — **Fonctions somme des coordonnées** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit u la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k.$$

1. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ? surjective ? Quel est son rang ?
2. Déterminer une base de $\ker(u)$.

— **Exercice 7 ●●○** — **Image et noyau de la composée** Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$:

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im}(u)$.
3. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.

— **Exercice 8 ●○○** — **Composée nulle** Soit E un espace vectoriel de dimension n , ainsi que u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subset \ker v$.
2. Quand la condition précédente est vérifiée, montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$.

— **Exercice 9 ●●○** — **Endomorphisme nilpotent** Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$, et que n est minimal pour cette propriété (c'est-à-dire que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $u^k \neq 0$).

1. Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'un tel endomorphisme pour $n = 2$.
2. On revient au cas général. Montrer que $\operatorname{Id} - u$ est bijective, et donner son inverse.

— **Exercice 10 ●●○** — **Endomorphisme de polynômes** Soit u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$u(P) = (X^2 + 1)P''.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\operatorname{Im}(u)$. Précisez la dimension de ces sous-espaces vectoriels.

— **Exercice 11 ●●○** — **Evaluation polynomiale en des points et interpolation** Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ la donnée de $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$. On définit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$u(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que u est linéaire et injective.
2. En déduire que :

$$\forall (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ tel que } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k) = b_k.$$

3. Ce polynôme P est appelé "polynôme interpolateur de degré n aux points (a_k, b_k) ". Cela vous rappelle-t-il quelque chose ? Si oui, explicitez-le en utilisant des polynômes L_i « déjà vus ».

— **Exercice 12 ●●○** — **Evaluation en deux points** Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$u(P) = (P(2), P(3)).$$

1. On se place dans le cas $n = 1$. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\operatorname{Im}(u)$. La fonction u est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Même question pour $n = 2$.
3. Même question pour $n = 3$.
4. (Plus dur). On revient au cas $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Décrire $\ker(u)$.

— **Exercice 13 ●●○** — **Endomorphisme avec la transposée** Soit $u : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$u(M) = M - M^T.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Quelle nom et notation a-t-on donné pour $\ker(u)$ dans le chapitre sur les matrices ?
3. Retrouver la dimension de $\ker(u)$, en donner une base. Faire de même pour $\operatorname{Im}(u)$.

— **Exercice 14 ●●○** — **Endomorphisme avec la dérivée : lien avec une équation différentielle** Soit $u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$u : f \mapsto f'' + f' - 2f.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker u$ et sa dimension.
3. La fonction $x \mapsto \sin x$ appartient-elle à $\operatorname{Im} u$?
4. Déterminer $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$.