MATHÉMATIQUES

08

Probabilités 1

BTS — Tous groupements

Je vais apprendre à :

- Définir une expérience aléatoire, un univers et des événements
- Calculer des probabilités à l'aide des axiomes de Kolmogorov
- Utiliser les probabilités conditionnelles et la formule de Bayes
- Déterminer si deux événements sont indépendants
- Définir une variable aléatoire discrète, calculer espérance, variance et écart-type
- Reconnaître et utiliser la loi binomiale $B(n, p)$
- Définir et utiliser la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$
- Définir et utiliser la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et la loi normale centrée réduite
- Approcher une loi binomiale par une loi normale
- Calculer espérance et variance de combinaisons linéaires de v.a.
- Appliquer le théorème de la limite centrée (TLC)
- Appliquer ces outils au contrôle qualité et à la fiabilité industrielle

Situation professionnelle

Contrôle qualité dans une production de panneaux

Un technicien en agencement réceptionne un lot de 500 panneaux de bois mélaminé. Le fournisseur annonce un taux de défaut de 3 %. Pour vérifier cette affirmation, le technicien prélève un échantillon de 20 panneaux et compte le nombre de panneaux défectueux.

Problème : Quelle est la probabilité de trouver au moins 2 panneaux défectueux dans l'échantillon ? À partir de quel nombre de défauts le technicien doit-il rejeter le lot ? La réponse passe par les *probabilités*, la *loi binomiale* et, pour de grands échantillons, son *approximation par la loi normale*.

1. Expérience aléatoire, univers, événements

DÉFINITION — EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat, mais dont on peut décrire l'ensemble des résultats possibles.

DÉFINITION — UNIVERS

L'**univers** Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles (ou *issues*) d'une expérience aléatoire.

EXEMPLE

On contrôle un panneau de bois : il est conforme (C) ou défectueux (D).

$\Omega = \{C\,,\,D\}$

On lance un dé à six faces : $\Omega = \{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}$.

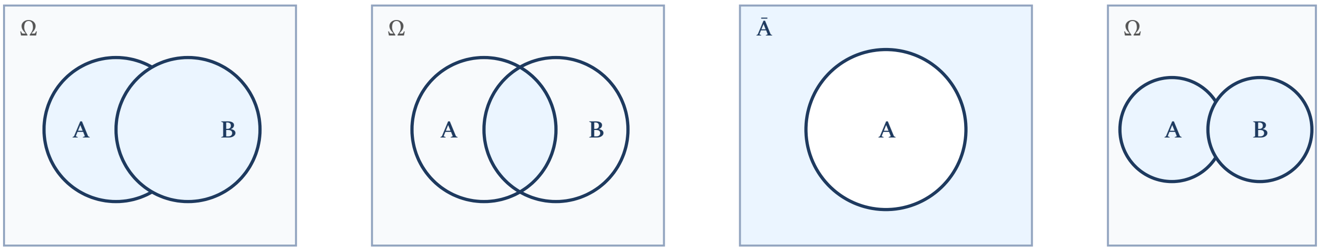
DÉFINITION — ÉVÉNEMENT

Un **événement** est un sous-ensemble de Ω. Un événement contenant une seule issue est dit **élémentaire**. L'événement Ω est l'événement **certain** ; l'événement $\varnothing$ est l'événement **impossible**.

DÉFINITION — OPÉRATIONS SUR LES ÉVÉNEMENTS

Soient A et B deux événements de Ω :

- $A \cup B$: « A ou B » — au moins l'un des deux se réalise
- $A \cap B$: « A et B » — les deux se réalisent simultanément
- $\bar{A}$: le **complémentaire** de A — A ne se réalise pas
- A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$



A ∪ B　　A ∩ B　　Ā (complémentaire)　　A ∩ B = ∅

Opérations sur les événements : la zone bleutée représente l'événement décrit. Deux événements incompatibles n'ont aucune issue commune.

2. Probabilité d'un événement — Axiomes de Kolmogorov

DÉFINITION — PROBABILITÉ

Une **probabilité** P sur Ω est une application de l'ensemble des événements vers $[0\,;\,1]$ vérifiant les **axiomes de Kolmogorov** :

1. Pour tout événement A : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

EXEMPLE

Un lot de pièces métalliques contient 5 % de pièces hors tolérance et 3 % de pièces avec un défaut d'aspect. Parmi les pièces, 1 % cumulent les deux défauts.

Soit H : « pièce hors tolérance » et A : « défaut d'aspect ».

$P(H \cup A) = P(H) + P(A) - P(H \cap A) = 0{,}05 + 0{,}03 - 0{,}01 = 0{,}07$

La probabilité qu'une pièce présente au moins un défaut est de 7 %.

MINI-EXERCICE :

Dans un atelier, $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P(A \cup B)$ puis $P(\bar{A})$.

DÉFINITION — ÉQUIPROBABILITÉ

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**. Dans ce cas, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

3. Probabilités conditionnelles

DÉFINITION — PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soit B un événement de probabilité non nulle. La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Elle représente la probabilité que A se réalise, *sachant que B est déjà réalisé*.

PROPRIÉTÉ — PROBABILITÉ DE L'INTERSECTION

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

EXEMPLE — CONTRÔLE DE PRODUCTION

Dans une usine de menuiserie, 60 % des panneaux sont produits par la machine M1 et 40 % par la machine M2. Le taux de défaut de M1 est de 2 %, celui de M2 est de 5 %.

On note D : « panneau défectueux », M_1 et M_2 les événements « provient de M1 » et « provient de M2 ».

$P(D \mid M_1) = 0{,}02$, $P(D \mid M_2) = 0{,}05$, $P(M_1) = 0{,}6$, $P(M_2) = 0{,}4$.

$P(D \cap M_1) = P(D \mid M_1) \times P(M_1) = 0{,}02 \times 0{,}6 = 0{,}012$

4. Indépendance de deux événements

DÉFINITION — INDÉPENDANCE

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

De manière équivalente : $P(A \mid B) = P(A)$ (la réalisation de B ne modifie pas la probabilité de A).

ATTENTION

Indépendant ≠ incompatible. Deux événements incompatibles ($A \cap B = \varnothing$) ne sont jamais indépendants (sauf si l'un a une probabilité nulle), car $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$ en général.

EXEMPLE

On contrôle deux composants d'un système de chauffage, indépendamment l'un de l'autre. La probabilité de défaillance du composant A est 0,03 et celle du composant B est 0,05.

Probabilité que les deux tombent en panne simultanément :

$P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}05 = 0{,}0015 = 0{,}15\,\%$

5. Formule des probabilités totales

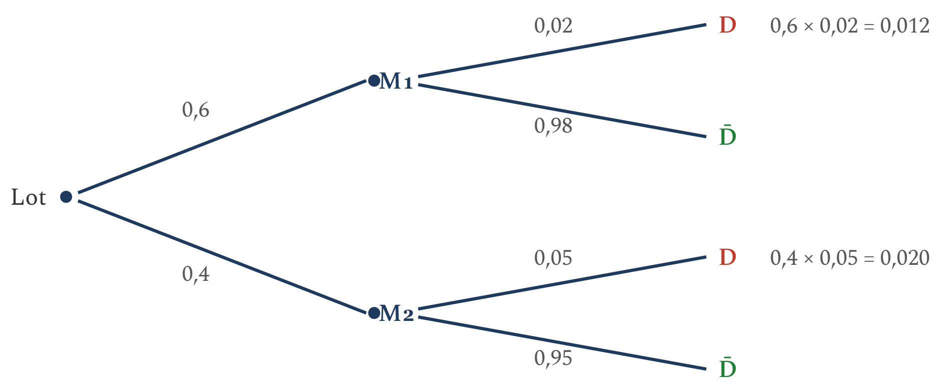
PROPRIÉTÉ — FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment un **système complet d'événements** (partition de Ω : ils sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω), alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) \times P(B_k)$$

MÉTHODE — UTILISER UN ARBRE PONDÉRÉ

1. Identifier le système complet d'événements ($B_1, B_2, \ldots$)
2. Dessiner l'arbre : première branche pour chaque B_k, puis sous-branches pour A et $\bar{A}$
3. Porter les probabilités sur chaque branche
4. Multiplier le long d'un chemin pour obtenir $P(A \cap B_k)$
5. Additionner les chemins menant à A pour obtenir $P(A)$



Arbre pondéré de l'exemple : $P(D) = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$ en additionnant les deux chemins menant à D.

EXEMPLE — SUITE DE L'USINE DE MENUISERIE

Reprenons l'exemple précédent (M1 : 60 %, défaut 2 % ; M2 : 40 %, défaut 5 %).

$\{M_1\ ,\ M_2\}$ est un système complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(D \mid M_1) \times P(M_1) + P(D \mid M_2) \times P(M_2)$

$P(D) = 0{,}02 \times 0{,}6 + 0{,}05 \times 0{,}4 = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$

La probabilité globale qu'un panneau soit défectueux est de **3,2 %.**

6. Formule de Bayes

PROPRIÉTÉ — FORMULE DE BAYES

Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment un système complet d'événements et $P(A) > 0$, alors :

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k) \times P(B_k)}{P(A)}$$

Cette formule permet d'« inverser le conditionnement » : on connaît $P(A \mid B_k)$, on cherche $P(B_k \mid A)$.

EXEMPLE — IDENTIFIER LA MACHINE D'ORIGINE

Un panneau est trouvé défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de M2 ?

$$P(M_2 \mid D) = \frac{P(D|M_2) \times P(M_2)}{P(D)} = \frac{0{,}05 \times 0{,}4}{0{,}032} = \frac{0{,}020}{0{,}032} = 0{,}625$$

Il y a **62,5 %** de chances que le panneau défectueux provienne de la machine M2.

MINI-EXERCICE :

Un test de dépistage d'un défaut est positif dans 95 % des cas quand le défaut est présent, et donne un faux positif dans 4 % des cas. La proportion de pièces réellement défectueuses est de 2 %. Une pièce est testée positive : quelle est la probabilité qu'elle soit réellement défectueuse ?

À retenir — Chaîne logique des calculs

1. **Identifier** le système complet d'événements
2. **Probabilités totales** : calculer $P(A)$
3. **Bayes** : inverser le conditionnement pour trouver $P(B_k \mid A)$

7. Variables aléatoires discrètes

DÉFINITION — VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

Une **variable aléatoire discrète** X est une application de Ω vers $\mathbb{R}$ qui associe à chaque issue un nombre réel. Elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs.

DÉFINITION — LOI DE PROBABILITÉ

La **loi de probabilité** de X est la donnée de toutes les valeurs prises par X et de leurs probabilités respectives. On la présente généralement sous forme de tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Avec $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ et $p_i \geqslant 0$ pour tout i.

EXEMPLE — NOMBRE DE PANNEAUX DÉFECTUEUX

On prélève 3 panneaux dans un lot où la proportion de défectueux est $p = 0{,}1$. Soit X le nombre de panneaux défectueux.

X prend les valeurs 0, 1, 2, 3.

8. Espérance, variance, écart-type

DÉFINITION — ESPÉRANCE

L'**espérance** de X est la *valeur moyenne théorique* de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$$

DÉFINITION — VARIANCE ET ÉCART-TYPE

La **variance** mesure la dispersion de X autour de son espérance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2\, p_i = E(X^2) - [E(X)]^2$$

L'**écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

PROPRIÉTÉS DE L'ESPÉRANCE ET DE LA VARIANCE

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$

EXEMPLE

Un technicien chauffagiste reçoit un nombre aléatoire X d'appels urgents par jour :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1

$E(X) = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}1 = 0 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1{,}1$

En moyenne, le technicien reçoit **1,1 appel urgent par jour**.

$E(X^2) = 0 + 1 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}1 = 0{,}4 + 0{,}8 + 0{,}9 = 2{,}1$

$V(X) = 2{,}1 - (1{,}1)^2 = 2{,}1 - 1{,}21 = 0{,}89$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}89} \approx 0{,}94$

9. Loi binomiale $B(n, p)$

DÉFINITION — ÉPREUVE DE BERNOULLI

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire à deux issues :

- **Succès** (S), de probabilité p
- **Échec** (E), de probabilité $q = 1 - p$

DÉFINITION — LOI BINOMIALE

Soit X le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli **indépendantes** de même paramètre p. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $X \sim B(n, p)$.

Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial.

Loi binomiale $B(n, p)$ — Paramètres

- Espérance : $E(X) = np$
- Variance : $V(X) = np(1-p)$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

MÉTHODE — VÉRIFIER LES CONDITIONS D'APPLICATION

On peut modéliser par une loi binomiale si :

1. L'expérience est répétée un nombre fixe n de fois
2. Chaque répétition a exactement deux issues (succès/échec)
3. La probabilité de succès p est constante à chaque répétition
4. Les répétitions sont indépendantes

EXEMPLE — CONTRÔLE QUALITÉ DE PANNEAUX

Un fabricant produit des panneaux de bois avec un taux de défaut de $p = 0{,}03$. On prélève $n = 20$ panneaux. Soit X le nombre de panneaux défectueux : $X \sim B(20\,;\,0{,}03)$.

Probabilité d'avoir exactement 0 défaut :

$$P(X=0) = \binom{20}{0}(0{,}03)^0(0{,}97)^{20} = (0{,}97)^{20} \approx 0{,}5438$$

Probabilité d'avoir au moins 2 défauts :

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

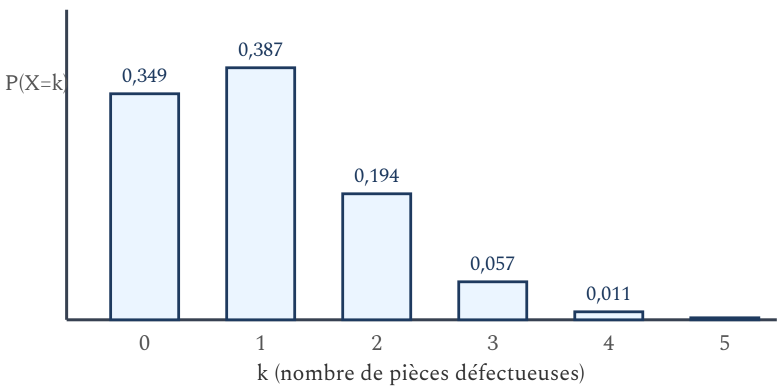
$$P(X=1) = \binom{20}{1}(0{,}03)^1(0{,}97)^{19} = 20 \times 0{,}03 \times (0{,}97)^{19} \approx 0{,}3364$$

$$P(X \geqslant 2) \approx 1 - 0{,}5438 - 0{,}3364 = 0{,}1198 \approx 12\,\%$$

$$E(X) = 20 \times 0{,}03 = 0{,}6\,;\ \sigma(X) = \sqrt{20 \times 0{,}03 \times 0{,}97} \approx 0{,}76$$

MINI-EXERCICE :

Une machine fabrique des pièces avec une probabilité de défaut $p = 0{,}1$. On prélève $n = 10$ pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses, $X \sim B(10\,;\,0{,}1)$. Calculer $P(X=1)$, $E(X)$ et $\sigma(X)$.



Loi binomiale $B(10\,;\,0{,}1)$: le mode est en $k = 1$ et $E(X) = np = 1$. Les probabilités décroissent rapidement pour les grandes valeurs de k.

ATTENTION — TIRAGE SANS REMISE

La loi binomiale suppose des tirages **indépendants** (avec remise). Si l'on tire sans remise dans un petit lot, on utilise la **loi hypergéométrique**. Cependant, si la taille du lot est grande devant la taille de l'échantillon (au moins 10 fois), l'approximation binomiale reste acceptable.

10. Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$

DÉFINITION — LOI UNIFORME CONTINUE

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$, notée $X \sim \mathcal{U}([a\,;\,b])$, si sa **fonction de densité** est constante sur $[a\,;\,b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a\,;\,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Intuitivement, toutes les valeurs de l'intervalle sont « équiprobables ».

Loi uniforme $\mathcal{U}([a\,;\,b])$ — Paramètres

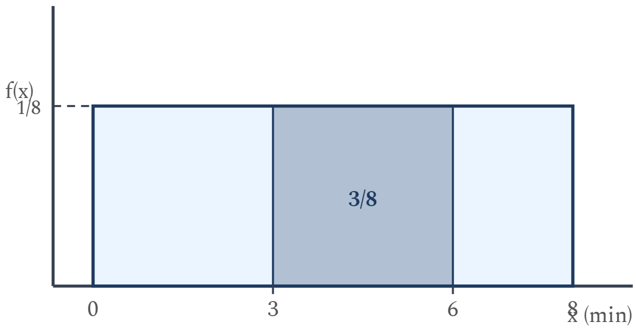
- $$\text{Espérance : } E(X) = \frac{a+b}{2}$$
- $$\text{Variance : } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$
- $$\text{Écart-type : } \sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

PROPRIÉTÉ — CALCUL DE PROBABILITÉ

Pour $[c\,;\,d] \subset [a\,;\,b]$:

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

La probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.



Loi uniforme $\mathcal{U}([0\,;\,8])$: la densité vaut $1/8$ sur l'intervalle. $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$ est l'aire du rectangle bleuté, soit $\frac{6-3}{8} = \frac{3}{8}$.

EXEMPLE — TEMPS D'ATTENTE D'UN ASCENSEUR DE CHANTIER

Sur un chantier de construction, un ascenseur de chantier effectue un cycle complet toutes les 8 minutes. Un menuisier arrive à un instant aléatoire. Son temps d'attente X (en minutes) suit une loi uniforme sur $[0\,;\,8]$.

$$E(X) = \frac{0+8}{2} = 4 \text{ min (attente moyenne : 4 minutes)}$$

$$\sigma(X) = \frac{8-0}{2\sqrt{3}} \approx 2{,}31 \text{ min}$$

Probabilité d'attendre moins de 2 minutes :

$$P(X \leqslant 2) = \frac{2-0}{8-0} = \frac{2}{8} = 0{,}25 = 25\,\%$$

Probabilité d'attendre entre 3 et 6 minutes :

$$P(3 \leqslant X \leqslant 6) = \frac{6-3}{8-0} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$$

11. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

DÉFINITION — LOI NORMALE (LOI DE GAUSS)

Une variable aléatoire X suit la **loi normale** de paramètres μ (espérance) et σ^2 (variance), notée $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

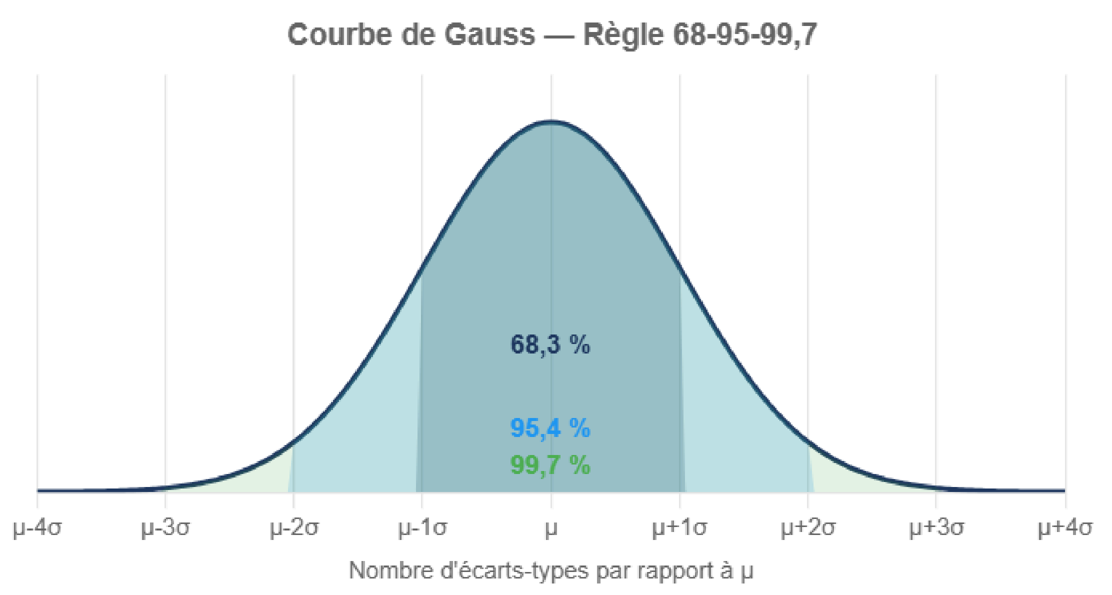
La courbe représentative est la célèbre **courbe de Gauss** (courbe en cloche).

PROPRIÉTÉS DE LA COURBE DE GAUSS

- La courbe est **symétrique** par rapport à la droite $x = \mu$
- Le maximum est atteint en $x = \mu$
- Les points d'inflexion sont en $x = \mu - \sigma$ et $x = \mu + \sigma$
- L'aire totale sous la courbe vaut 1
- Plus σ est petit, plus la courbe est resserrée autour de μ

Règle des 68-95-99,7

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$ — environ **68 %**
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ — environ **95 %**
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$ — environ **99,7 %**



DÉFINITION — LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

La **loi normale centrée réduite** est la loi $\mathcal{N}(0,1)$: elle a pour espérance 0 et pour écart-type 1. On la note souvent Z.

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Cette transformation s'appelle la **réduction** (ou centrage-réduction).

MÉTHODE — CALCULER $P(A \leqslant X \leqslant B)$ AVEC LA TABLE DE LA LOI NORMALE

1. Centrer-réduire : $P(a \leqslant X \leqslant b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$
2. Utiliser la table de $\mathcal{N}(0,1)$ ou la calculatrice pour lire $\Phi(z) = P(Z \leqslant z)$
3. Appliquer : $P(z_1 \leqslant Z \leqslant z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

Propriété de symétrie : $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

EXEMPLE — LONGUEUR DE TASSEAUX DE BOIS

Un menuisier agenceur débite des tasseaux dont la longueur X (en mm) suit la loi $\mathcal{N}(500\,;\,4)$ (soit $\mu = 500$ mm et $\sigma = 2$ mm).

Probabilité qu'un tasseau mesure entre 497 et 503 mm :

$$P(497 \leqslant X \leqslant 503) = P\left(\frac{497-500}{2} \leqslant Z \leqslant \frac{503-500}{2}\right) = P(-1{,}5 \leqslant Z \leqslant 1{,}5)$$

$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) = 2\Phi(1{,}5) - 1 \approx 2 \times 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664$$

Environ **86,6 %** des tasseaux sont dans la tolérance ± 3 mm.

Probabilité qu'un tasseau dépasse 505 mm :

$$P(X > 505) = P\left(Z > \frac{505-500}{2}\right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - \Phi(2{,}5) \approx 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

Moins de **0,6 %** des tasseaux dépassent 505 mm.

MINI-EXERCICE :

Le diamètre X (en mm) de chevilles suit la loi $\mathcal{N}(8\,;\,0{,}25)$, soit $\mu = 8$ mm et $\sigma = 0{,}5$ mm. On donne $\Phi(2) \approx 0{,}9772$ et $\Phi(1) \approx 0{,}8413$. Calculer $P(7 \leq X \leq 9)$.

12. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

PROPRIÉTÉ — APPROXIMATION NORMALE DE LA BINOMIALE

Lorsque n est assez grand, la loi binomiale $B(n,p)$ peut être approchée par une loi normale :

$$X \sim B(n,p) \;\approx\; \mathcal{N}(np,\; np(1-p))$$

Conditions d'application (règle pratique) :

- $n \geqslant 30$
- $np \geqslant 5$
- $n(1-p) \geqslant 5$

MÉTHODE — CORRECTION DE CONTINUITÉ

La loi binomiale est discrète (valeurs entières), la loi normale est continue. Pour améliorer l'approximation, on applique une

correction de continuité

:

- $P(X = k) \approx P(k - 0{,}5 \leqslant Y \leqslant k + 0{,}5)$ où $Y \sim \mathcal{N}(np,\, np(1-p))$
- $P(X \leqslant k) \approx P(Y \leqslant k + 0{,}5)$
- $P(X \geqslant k) \approx P(Y \geqslant k - 0{,}5)$

EXEMPLE — CONTRÔLE QUALITÉ DE BRIQUES RÉFRACTAIRES

Une usine produit des briques réfractaires pour des cheminées et poêles. Le taux de défaut est $p = 0{,}08$. On prélève un échantillon de $n = 200$ briques. Soit X le nombre de briques défectueuses.

$X \sim B(200\,;\,0{,}08)$. Vérifions les conditions :

- $n = 200 \geqslant 30$ ✓
- $np = 200 \times 0{,}08 = 16 \geqslant 5$ ✓
- $n(1-p) = 200 \times 0{,}92 = 184 \geqslant 5$ ✓

On approche par $Y \sim \mathcal{N}(16\,;\,14{,}72)$, soit $\mu = 16$ et $\sigma = \sqrt{14{,}72} \approx 3{,}84$.

Probabilité d'avoir au plus 20 briques défectueuses (avec correction de continuité) :

$$P(X \leqslant 20) \approx P(Y \leqslant 20{,}5) = \Phi\left(\frac{20{,}5 - 16}{3{,}84}\right) = \Phi(1{,}17) \approx 0{,}879$$

Environ **87,9 %** de chances d'observer au plus 20 défauts.

13. Espérance et variance de combinaisons linéaires

PROPRIÉTÉ — LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE

Pour toutes variables aléatoires X et Y, et pour $a, b \in \mathbb{R}$:

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ *(toujours vraie, même si X et Y ne sont pas indépendantes)*
- Plus généralement : $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E(X_i) + b$

PROPRIÉTÉ — VARIANCE D'UNE COMBINAISON LINÉAIRE

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

- $V(aX + b) = a^2\, V(X)$
- Si X et Y sont **indépendantes** : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes :
  $V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, V(X_i)$

ATTENTION

La formule $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ n'est valable que si X et Y sont **indépendantes**. Sans indépendance, il faut ajouter un terme de covariance : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

EXEMPLE — COÛT TOTAL D'UNE INSTALLATION

Un technicien chauffagiste installe des radiateurs. Le temps d'installation d'un radiateur est une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = 45$ min et d'écart-type $\sigma(X) = 8$ min. Le coût d'une installation est $C = 30X + 50$ (en euros, avec 30 €/h de main-d'œuvre et 50 € de matériel fixe).

$E(C) = 30\, E(X) + 50 = 30 \times 45 + 50 = 1400$ €

$V(C) = 30^2\, V(X) = 900 \times 64 = 57\,600$

$\sigma(C) = \sqrt{57\,600} = 240$ €

Installation de 4 radiateurs indépendants : soit $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

$E(S) = 4 \times 45 = 180$ min ; $V(S) = 4 \times 64 = 256$; $\sigma(S) = 16$ min.

14. Théorème de la limite centrée (TLC)

PROPRIÉTÉ — THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRÉE

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées** (i.i.d.) d'espérance μ et de variance σ^2. On pose :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{et} \qquad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

Alors, pour n assez grand :

- La **somme** : $S_n \approx \mathcal{N}(n\mu,\ n\sigma^2)$
- La **moyenne** : $\bar{X}_n \approx \mathcal{N}\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$

En pratique, l'approximation est bonne dès que $n \geqslant 30$.

À retenir — TLC en version centrée réduite

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Plus l'échantillon est grand, plus la moyenne $\bar{X}_n$ se concentre autour de μ.

EXEMPLE — RÉSISTANCE THERMIQUE DE PANNEAUX ISOLANTS

Un fabricant de panneaux isolants sait que la résistance thermique R d'un panneau a pour espérance $\mu = 3{,}5$ m^2·K/W et écart-type $\sigma = 0{,}4$ m^2·K/W. On mesure un échantillon de $n = 36$ panneaux.

Par le TLC, la moyenne $\bar{R}$ suit approximativement :

$$\bar{R} \sim \mathcal{N}\left(3{,}5\ ;\ \frac{0{,}16}{36}\right) = \mathcal{N}(3{,}5\ ;\ 0{,}00444)$$

Soit $\sigma_{\bar{R}} = \dfrac{0{,}4}{\sqrt{36}} = \dfrac{0{,}4}{6} \approx 0{,}0667$ m^2·K/W.

Probabilité que la moyenne de l'échantillon soit inférieure à 3,4 :

$$P(\bar{R} < 3{,}4) = P\left(Z < \frac{3{,}4 - 3{,}5}{0{,}0667}\right) = P(Z < -1{,}50) = 1 - \Phi(1{,}50) \approx 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

Il n'y a qu'environ **6,7 %** de chances que la moyenne de l'échantillon soit inférieure à 3,4.

MÉTHODE — APPLIQUER LE TLC

1. Identifier les v.a. X_i indépendantes et de même loi, avec $\mu = E(X_i)$ et $\sigma^2 = V(X_i)$
2. Vérifier que $n \geqslant 30$
3. Pour la **somme** S_n : utiliser $\mathcal{N}(n\mu,\ n\sigma^2)$
4. Pour la **moyenne** $\bar{X}_n$: utiliser $\mathcal{N}\left(\mu,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
5. Centrer-réduire et utiliser la table de $\mathcal{N}(0, 1)$

15. Applications au contrôle qualité et à la fiabilité

DÉFINITION — CONTRÔLE PAR ÉCHANTILLONNAGE

Le **contrôle par échantillonnage** consiste à prélever aléatoirement n pièces dans un lot et à décider d'accepter ou de refuser le lot en fonction du nombre de défectueux observés.

MÉTHODE — PLAN DE CONTRÔLE SIMPLE

1. Définir la taille d'échantillon n et le seuil d'acceptation c
2. Prélever n pièces et compter le nombre X de défectueux
3. Si $X \leqslant c$: **accepter** le lot ; si $X > c$: **refuser**

En modélisant $X \sim B(n, p)$, on peut calculer la probabilité d'accepter un lot de proportion de défectueux p.

EXEMPLE — PLAN DE CONTRÔLE $N = 50$, $C = 2$

Un fabricant de quincaillerie livre un lot de 2000 ferrures. On prélève 50 pièces (le lot est assez grand pour justifier le modèle binomial). Le lot est accepté si on trouve au plus 2 défectueux.

Si le vrai taux de défaut est $p = 0{,}02$, alors $\lambda = np = 50 \times 0{,}02 = 1$ et on approche par $\mathcal{P}(1)$:

$$P(X \leqslant 2) = e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = e^{-1} \times 2{,}5 \approx 0{,}3679 \times 2{,}5 \approx 0{,}920$$

Le lot a environ **92 %** de chances d'être accepté.

À retenir — Les formules essentielles

Formule	Expression
Probabilité conditionnelle	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Probabilités totales	$P(A) = \sum P(A \mid B_k)\, P(B_k)$
Bayes	$P(B_k \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_k)\, P(B_k)}{P(A)}$
Binomiale $B(n,p)$	$P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$, $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Centrage-réduction : $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Approximation $B \to \mathcal{N}$	$B(n,p) \approx \mathcal{N}(np,\ np(1-p))$ si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$
Combinaisons linéaires	$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$; $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ (si indép.)
TLC	$\bar{X}_n \approx \mathcal{N}\left(\mu,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ pour n grand

MATHÉMATIQUES

08

Probabilités 1

BTS — Tous groupements

Objectifs du chapitre   cliquer pour développer

Niveau 1 — Maîtriser les bases

Exercice 1.1 — Événements et probabilités

On lance un dé équilibré à six faces. On définit les événements :

- A : « obtenir un nombre pair »
- B : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 »

1. Décrire l'univers Ω et les événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ et $\bar{A}$.
2. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.
3. Vérifier la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Mes calculs :

Exercice 1.2 — Variable aléatoire et loi de probabilité

On tire au hasard une pièce dans un lot de 100 pièces contenant 70 conformes, 20 avec un défaut mineur et 10 avec un défaut majeur. Soit X la variable aléatoire définie par : $X = 0$ si la pièce est conforme, $X = 1$ si défaut mineur, $X = 5$ si défaut majeur.

1. Écrire la loi de probabilité de X sous forme de tableau.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Interpréter l'espérance dans le contexte.

Mes calculs :

Exercice 1.3 — Probabilité conditionnelle

Dans une entreprise de chauffage, 80 % des interventions concernent des chaudières à gaz (G) et 20 % des pompes à chaleur (P). Parmi les chaudières, 15 % nécessitent un remplacement de pièce (R). Parmi les pompes à chaleur, 25 % nécessitent un remplacement de pièce.

1. Dessiner l'arbre pondéré de la situation.
2. Calculer $P(G \cap R)$ et $P(P \cap R)$.
3. En déduire $P(R)$ par la formule des probabilités totales.
4. Calculer $P(G \mid R)$: sachant qu'un remplacement est nécessaire, quelle est la probabilité que ce soit pour une chaudière ?

Mes calculs :

Exercice 1.4 — Loi binomiale — Calculs directs

Soit $X \sim B(10\,;\,0{,}2)$. Calculer :

1. $P(X = 0)$
2. $P(X = 2)$
3. $P(X \leqslant 1)$
4. $E(X)$ et $\sigma(X)$

Mes calculs :

Exercice 1.5 — Loi uniforme — Durée aléatoire

La durée (en minutes) d'un cycle de séchage d'un vernis sur un panneau de bois varie uniformément entre 10 et 18 minutes. On note X cette durée : $X \sim \mathcal{U}([10\,;\,18])$.

1. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Calculer $P(X \leqslant 12)$.
3. Calculer $P(13 \leqslant X \leqslant 16)$.

Mes calculs :

Exercice 1.6 — Loi normale — Lecture de table

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. À l'aide de la table de la loi normale centrée réduite, calculer :

1. $P(Z \leqslant 1{,}5)$
2. $P(Z \geqslant 0{,}8)$
3. $P(-1{,}2 \leqslant Z \leqslant 2{,}0)$
4. $P(|Z| \leqslant 1{,}96)$

Mes calculs :

Niveau 2 — Appliquer

Exercice 2.1 — Bayes et contrôle qualité

Une entreprise de fabrication de panneaux de bois utilise deux lignes de production. La ligne L1 produit 70 % des panneaux et la ligne L2 en produit 30 %. Le taux de défaut est de 4 % pour L1 et 6 % pour L2.

1. Calculer la probabilité globale qu'un panneau soit défectueux.
2. Un panneau est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de L2.
3. La direction souhaite que $P(D) \leqslant 0{,}04$. Quel taux de défaut maximal pour L2 permet d'atteindre cet objectif ?

Mes calculs :

Exercice 2.2 — Loi binomiale et échantillonnage

Un fournisseur de vis pour charpentes annonce un taux de défaut de 2 %. Un charpentier prélève un échantillon de $n = 25$ vis.

1. Justifier que le nombre X de vis défectueuses suit une loi $B(25\,;\,0{,}02)$.
2. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \geqslant 2)$.
3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter.
4. Le charpentier refuse le lot s'il trouve plus de 1 vis défectueuse. Quelle est la probabilité de refuser un lot conforme (taux réel = 2 %) ?

Mes calculs :

Exercice 2.3 — Loi uniforme — Temps d'attente

Un technicien chauffagiste attend la livraison d'une pièce de rechange. Le livreur annonce qu'il arrivera entre 9h00 et 11h00, sans plus de précision. On modélise l'heure d'arrivée par une loi uniforme sur $[0\,;\,120]$ (en minutes après 9h00).

1. Donner la fonction de densité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter.
3. Quelle est la probabilité que le livreur arrive dans la première demi-heure ?
4. Quelle est la probabilité que le livreur arrive entre 10h00 et 10h30 ?
5. Le technicien a un autre rendez-vous à 10h45. Quelle est la probabilité qu'il doive annuler ce rendez-vous ?

Mes calculs :

Exercice 2.4 — Indépendance et système

Un système de ventilation comporte deux composants A et B montés en série (le système fonctionne si et seulement si les deux composants fonctionnent). Les défaillances sont indépendantes avec $P(\bar{A}) = 0{,}04$ et $P(\bar{B}) = 0{,}06$.

1. Calculer la probabilité que le système fonctionne.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un composant soit défaillant.
3. On ajoute un composant C ($P(\bar{C}) = 0{,}03$) en série. Calculer la nouvelle fiabilité du système.
4. Si les composants A et B étaient montés en parallèle (le système fonctionne si au moins l'un fonctionne), calculer la fiabilité.

Mes calculs :

Exercice 2.5 — Loi normale — Température de sortie d'une chaudière

La température T (en $°\mathrm{C}$) de l'eau en sortie d'une chaudière suit une loi normale $\mathcal{N}(65\ ;\ 4)$, soit $\mu = 65\ °\mathrm{C}$ et $\sigma = 2\ °\mathrm{C}$. La température est conforme si elle est comprise entre 61 °C et 69 °C.

1. Quel pourcentage des mesures est conforme ? (Utiliser la règle 68-95-99,7.)
2. Calculer $P(T > 68)$ par centrage-réduction.
3. Le technicien déclenche une alerte si $T > 70$. Calculer la probabilité d'alerte.
4. Déterminer la température t_0 dépassée seulement 1 % du temps.

Mes calculs :

Exercice 2.6 — Approximation binomiale → normale

Un fabricant de tuiles annonce un taux de casse au transport de 4 %. Un couvreur reçoit une palette de $n = 200$ tuiles. Soit X le nombre de tuiles cassées.

1. Justifier que $X \sim B(200\,;\,0{,}04)$ et vérifier les conditions d'approximation par une loi normale.
2. Donner les paramètres μ et σ de la loi normale approchée.
3. Calculer $P(X \leqslant 10)$ avec correction de continuité.
4. Calculer $P(X \geqslant 15)$. Que peut conclure le couvreur s'il constate 15 tuiles cassées ?

Mes calculs :

Niveau 3 — Approfondir

Exercice 3.1 — Problème complet — Contrôle de panneaux

Une usine de panneaux de particules produit des lots de 1000 panneaux. Trois machines contribuent à la production :

Machine	Part de production	Taux de défaut
M1	50 %	2 %
M2	30 %	3 %
M3	20 %	5 %

1. Calculer la probabilité qu'un panneau pris au hasard soit défectueux.
2. Un panneau est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de chaque machine.
3. On prélève 15 panneaux au hasard. Soit X le nombre de défectueux. Justifier que $X \sim B(15\,;\,0{,}029)$.
4. Calculer $P(X = 0)$, $P(X \geqslant 1)$ et $E(X)$.
5. Calculer $\sigma(X)$. En déduire un intervalle dans lequel le nombre de défectueux se trouve avec une probabilité d'environ 95 %.

Mes calculs :

Exercice 3.2 — Loi normale — Dimensions de panneaux

Une usine de panneaux de particules produit des panneaux dont l'épaisseur X (en mm) suit une loi normale $\mathcal{N}(18\ ;\ 0{,}09)$, soit $\mu = 18$ mm et $\sigma = 0{,}3$ mm. Un panneau est conforme si son épaisseur est comprise entre 17,4 mm et 18,6 mm.

1. Centrer-réduire et calculer $P(17{,}4 \leqslant X \leqslant 18{,}6)$. Quel pourcentage de panneaux est conforme ?
2. Calculer $P(X > 18{,}9)$.
3. Déterminer la valeur x_0 telle que $P(X \leqslant x_0) = 0{,}95$.
4. L'usine souhaite que 99 % des panneaux soient conformes. Quel écart-type maximal faut-il atteindre (en gardant $\mu = 18$ et les mêmes tolérances) ?

Mes calculs :

Exercice 3.3 — Bayes à trois hypothèses

Un test de contrôle non destructif (CND) est utilisé pour détecter les fissures dans des poutres en bois lamellé-collé. Le test n'est pas parfait :

- Si la poutre est fissurée, le test est positif dans 95 % des cas (sensibilité)
- Si la poutre est saine, le test est négatif dans 90 % des cas (spécificité)
- Dans le lot, 8 % des poutres sont fissurées

1. Définir les événements et écrire les données sous forme de probabilités conditionnelles.
2. Calculer la probabilité d'un test positif $P(T^+)$.
3. Calculer la valeur prédictive positive : $P(F \mid T^+)$ (probabilité qu'une poutre soit vraiment fissurée si le test est positif).
4. Commenter le résultat. Ce test est-il fiable pour le contrôle qualité ?

Mes calculs :

Exercice 3.4 — TLC — Consommation énergétique

Un bureau d'études thermiques mesure la consommation énergétique annuelle de logements identiques. La consommation d'un logement est une variable aléatoire d'espérance $\mu = 120$ kWh/m^2 et d'écart-type $\sigma = 25$ kWh/m^2.

On sélectionne un échantillon de $n = 40$ logements et on calcule la consommation moyenne $\bar{X}$.

1. Par le TLC, donner la loi approximative de $\bar{X}$. Calculer $\sigma_{\bar{X}}$.
2. Calculer $P(\bar{X} \leqslant 115)$.
3. Calculer $P(115 \leqslant \bar{X} \leqslant 125)$.
4. Le bureau d'études certifie un bâtiment « basse consommation » si $\bar{X} \leqslant 110$. Quelle est la probabilité de certification si la vraie moyenne est bien 120 kWh/m^2 (fausse certification) ?

Mes calculs :

Niveau 4 — Expert

Exercice 4.1 — Combinaisons linéaires et coût de chantier

Un menuisier agenceur réalise un aménagement nécessitant 3 types de panneaux :

- Panneaux A : coût unitaire X_A avec $E(X_A) = 45$ € et $\sigma(X_A) = 3$ €
- Panneaux B : coût unitaire X_B avec $E(X_B) = 30$ € et $\sigma(X_B) = 2$ €
- Panneaux C : coût unitaire X_C avec $E(X_C) = 20$ € et $\sigma(X_C) = 1{,}5$ €

Les coûts sont indépendants. Le devis prévoit 4 panneaux A, 6 panneaux B et 10 panneaux C. On ajoute des frais fixes de 150 € (transport et pose).

1. Exprimer le coût total $T = 4X_A + 6X_B + 10X_C + 150$.
2. Calculer $E(T)$.
3. Calculer $V(T)$ et $\sigma(T)$.
4. En supposant que T suit approximativement une loi normale, déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour le coût total.
5. Le client a un budget maximal de 650 €. Quelle est la probabilité de dépasser ce budget ?

Mes calculs :

Exercice 4.2 — Fiabilité d'un système mixte

Un système de chauffage industriel comprend :

- Un brûleur principal B1 ($P(\text{panne}) = 0{,}05$)
- Un brûleur de secours B2 identique ($P(\text{panne}) = 0{,}05$), monté en **parallèle** avec B1
- Une pompe de circulation P ($P(\text{panne}) = 0{,}03$), montée en **série** avec l'ensemble $\{$B1, B2$\}$
- Un échangeur thermique E ($P(\text{panne}) = 0{,}02$), en **série** avec le reste

Toutes les défaillances sont indépendantes. Le système fonctionne si la pompe ET l'échangeur ET au moins un brûleur fonctionnent.

1. Calculer la fiabilité du sous-système $\{$B1 parallèle B2$\}$.
2. En déduire la fiabilité globale du système.
3. L'entreprise exige une fiabilité d'au moins 99 %. L'objectif est-il atteint ?
4. On envisage de doubler la pompe (ajout d'une pompe P2 en parallèle, même fiabilité). Calculer la nouvelle fiabilité globale. L'objectif de 99 % est-il atteint ?

Mes calculs :

Exercice 4.3 — Approximation binomiale → normale — Contrôle qualité

Un fabricant de briques isolantes pour la construction de cheminées produit de grands lots. Le taux de défaut est $p = 0{,}06$. Un technicien prélève un échantillon de $n = 150$ briques et compte le nombre X de briques défectueuses.

1. Quelle loi suit X ? Vérifier que l'on peut approcher par une loi normale et donner ses paramètres.
2. Calculer $P(X \leqslant 12)$ avec l'approximation normale (avec correction de continuité).
3. Calculer $P(5 \leqslant X \leqslant 15)$ avec l'approximation normale.
4. Déterminer le seuil c tel que $P(X > c) \leqslant 0{,}05$. Le technicien rejette le lot si $X > c$.
5. Si le vrai taux de défaut monte à $p = 0{,}10$, quelle est la probabilité que le lot soit accepté (risque client) ?

Mes calculs :

Exercice 4.4 — Théorème de la limite centrée — Moyennes d'échantillons

Une entreprise de menuiserie agencement produit des tasseaux dont la longueur a pour espérance $\mu = 250$ mm et écart-type $\sigma = 5$ mm. On prélève des échantillons de $n = 50$ tasseaux et on mesure la longueur moyenne $\bar{X}$ de chaque échantillon.

1. Justifier que le TLC s'applique. Donner la loi approximative de $\bar{X}$.
2. Calculer $P(249 \leqslant \bar{X} \leqslant 251)$.
3. La production est considérée « déréglée » si $\bar{X}$ s'écarte de plus de 1,5 mm de la cible 250 mm. Calculer la probabilité d'une fausse alerte (production conforme mais $\bar{X} \notin [248{,}5\,;\,251{,}5]$).
4. On souhaite que la probabilité de fausse alerte soit inférieure à 1 %. Quelle taille d'échantillon minimale faut-il utiliser (en gardant le seuil de 1,5 mm) ?

Mes calculs :

MATHÉMATIQUES

08

Probabilités 1

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Exercice 1 — Opérations sur les événements (3 pts)

Dans un atelier, on a $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$.

a. Calculer $P(A \cup B)$. *(1,5 pt)*
b. Calculer $P(\bar{A})$. *(1 pt)*
c. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier. *(0,5 pt)*

Exercice 2 — Probabilités totales et formule de Bayes (5 pts)

Dans une usine, 70 % des pièces sont produites par la machine M1 et 30 % par la machine M2. Le taux de défaut de M1 est de 2 %, celui de M2 est de 6 %. On note D : « pièce défectueuse ».

a. Calculer $P(D \cap M_1)$. *(1 pt)*
b. Par la formule des probabilités totales, calculer $P(D)$. *(2 pts)*
c. Une pièce est défectueuse. Par la formule de Bayes, calculer la probabilité qu'elle provienne de M2, $P(M_2 \mid D)$. *(2 pts)*

Exercice 3 — Variable aléatoire : espérance, variance (4 pts)

Un technicien reçoit un nombre X d'appels urgents par jour, de loi :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

a. Calculer l'espérance $E(X)$. *(2 pts)*
b. Calculer $E(X^2)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$. *(2 pts)*

Exercice 4 — Loi binomiale (4 pts)

Une machine fabrique des pièces avec une probabilité de défaut $p = 0{,}2$. On prélève $n = 10$ pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses.

a. Préciser la loi de X et justifier (conditions). *(1 pt)*
b. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. *(1,5 pt)*
c. Calculer $P(X = 0)$. On donne $(0{,}8)^{10} \approx 0{,}1074$. *(1,5 pt)*

Exercice 5 — Loi uniforme (4 pts)

Sur un chantier, une benne effectue un cycle toutes les 10 minutes. Un ouvrier arrive à un instant aléatoire ; son temps d'attente X (en minutes) suit la loi uniforme sur $[0\,;\,10]$.

a. Calculer l'espérance $E(X)$. *(1 pt)*
b. Calculer la probabilité d'attendre moins de 3 minutes, $P(X \leq 3)$. *(1,5 pt)*
c. Calculer la probabilité d'attendre entre 2 et 7 minutes, $P(2 \leq X \leq 7)$. *(1,5 pt)*