

Exercice 1. Recherche de paramètre

Soit X une variable aléatoire discrète définie par : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour $a \in \mathbb{R}$ fixé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{a(n+3)}{2^n}.$$

Déterminer le réel a et calculer l'espérance de X (si elle existe).

Exercice 2. Une autre écriture de l'espérance

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) \right) - n \mathbb{P}(X > n).$$

2. On suppose que X admet une espérance.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq n \mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k).$$

- (b) En déduire que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$ converge et que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

3. Réciproquement, on suppose que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance et que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

4. Application : On lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à obtenir un 6. Soit X le nombre de lancers nécessaires, calculer l'espérance de X .

Exercice 3. Lois usuelles

Déterminer et reconnaître les lois des variables aléatoires X , Y et Z sachant que :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{3}{n} \mathbb{P}(X = n - 1).$$

2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\exists \alpha \in]0, 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \alpha \mathbb{P}(Y \geq n).$$

3. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$4 \mathbb{P}(Z = n + 2) = 5 \mathbb{P}(Z = n + 1) - \mathbb{P}(Z = n).$$

Exercice 4. Lancers de pièce

On dispose d'une pièce truquée, telle que la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0, 1[$. On lance deux fois la pièce : si on obtient FP on a gagné, si on obtient PF on a perdu, sinon on recommence. Déterminer le nombre moyen de lancers effectués avant la fin du jeu.

Exercice 5. Le contraire des autres

Soit $n \geq 3$. n personnes lancent une pièce de monnaie. Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. On note X la variable aléatoire désignant le nombre de parties nécessaires à l'obtention d'un gagnant. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance si elles existent.

Exercice 6. Tirage de cartes

Dans une boîte, il y a n cartes numérotées de 1 à n . On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n . Soit Z le nombre de tirages effectués.

1. Reconnaître quelle est la loi de Z . Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à r , pour $r \geq 1$.
2. Quelle est la probabilité que le nombre de cartes tirées soit inférieur ou égal à 50 ?

Exercice 7. Rang du second pile

Soit $p \in]0, 1[$, on dispose dans tout l'exercice d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p . On note $q = 1 - p$. On procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: " On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce ".

On note :

- pour tout entier naturel non nul n , X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce,
- pour tout entier naturel non nul j , F_j l'événement : " La pièce donne FACE lors du j -ième lancer ",
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

" FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE "

alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner la loi de X_n . Préciser la valeur de son espérance $E(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.
2. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y .
3. Donner les valeurs des probabilités :

$$\mathbb{P}(Y = 0), \quad \mathbb{P}(Y = 1) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 2).$$

4. Soit n un entier naturel. Justifier l'égalité suivante entre les événements :

$$[Y = n] = [X_{n+1} = 1] \cap \overline{F_{n+2}}.$$

5. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = (n + 1)p^2q^n.$$

6. Vérifier par le calcul que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1.$$

7. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $E(Y)$ et donner sa valeur.
8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k -ième PILE.
En particulier, on a $Y_2 = Y$.
En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k .

Exercice 8. Etude d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(\mathbb{P}(X = k))$ soit décroissante.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ est maximale ?

Exercice 9. La loi du plus grand

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1 mètre 90 sur 80 personnes.

1. En utilisant une loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m sur 100 personnes.
2. De même, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m sur 300 personnes.