Fonctions Trigonométriques

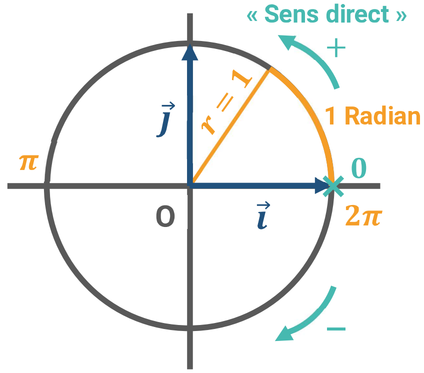
Cercle trigonométrique et Radian

Passer de degré à radian :

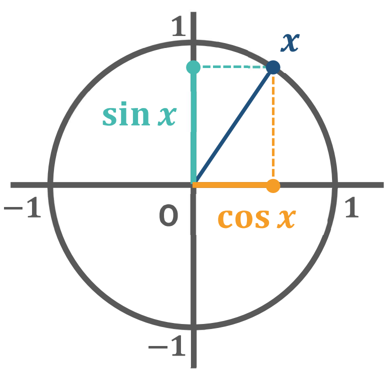
$$\alpha_{rad} = \alpha_{degré} \times \frac{\pi}{180}$$

Passer de radian à degré :

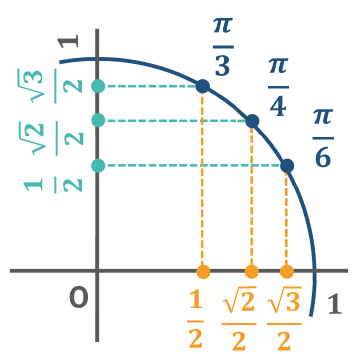
$$\alpha_{degré} = \alpha_{rad} \times \frac{180}{\pi}$$



Cosinus et Sinus :



Angles remarquables



Propriétés : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Relation cosinus et sinus : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Angles associés :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

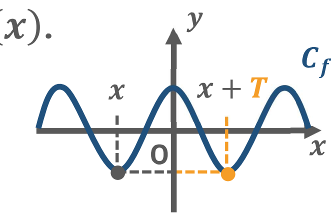
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Périodicité

f est T-périodique si $f(x + T) = f(x)$.

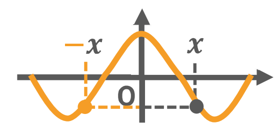
cosinus et sinus sont 2π-périodique car $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.



Parité

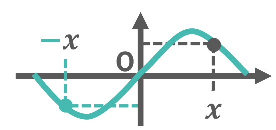
f est paire si $f(-x) = f(x)$.

cosinus est paire car $\cos(-x) = \cos(x)$.



f est impaire si $f(-x) = -f(x)$.

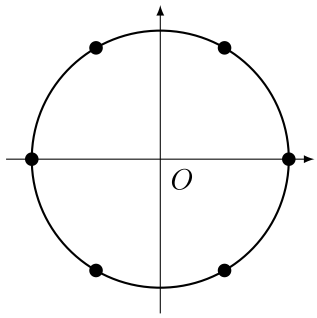
sinus est impaire car $\sin(-x) = -\sin(x)$.



Exercice 1 :

1. Sur le cercle trigonométrique ci-contre, placer les points M_1, M_2, M_3, M_4 repérés respectivement par les angles $\frac{\pi}{3}$, $\frac{17\pi}{3}$, $\frac{38\pi}{3}$, $\frac{50\pi}{3}$.
2. Donner alors sans justification :

   a) $\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)$ b) $\sin\left(-\frac{38\pi}{3}\right)$ c) $\cos\left(\frac{50\pi}{3}\right)$



Exercice 2 :

On considère un angle x en radian tel que $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de $\sin x$?
2. Déterminer $\sin x$ sachant que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]$.
3. Compléter alors :

   a) $\begin{cases} \cos(-x) = \dots \\ \sin(-x) = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos(x+\pi) = \dots \\ \sin(x+\pi) = \dots \end{cases}$

   c) $\begin{cases} \cos(\pi - x) = \dots \\ \sin(\pi - x) = \dots \end{cases}$ d) $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots \end{cases}$

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné :

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$
2. $2\sin(x) = -1$ sur $[0\,;\,2\pi[$
3. $\sqrt{2}\cos(x) + 1 = 0$ sur $[0\,;\,6\pi[$
4. $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$ sur $]-2\pi\,;\,\pi]$

Exercice 4 :

Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle donné :

1. $\cos(x) \geq \dfrac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$
2. $2\sin(x) \leq -1$ sur $[0\,;\,2\pi[$
3. $\sqrt{2}\sin(x) + 1 < 0$ sur $[0\,;\,2\pi[$
4. $\sqrt{3}\cos(x) + 2 \geq 0$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$

Exercice 5 :

On considère l'expression $A(x) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos x + \cos(3\pi + x) - 2\cos(-x)$.

a) Montrer que $A(x) = 2\cos x$.

b) En déduire les solutions de l'équation $A(x) = -\sqrt{2}$ avec $x \in\,]-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice n°1

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants aux réels suivants :

a) $A : \frac{2\pi}{3}$

b) $B : \frac{17\pi}{6}$

c) $C : -\frac{25\pi}{3}$

d) $D : -\frac{45\pi}{12}$

Exercice n°2

Soit x un réel tel que $\cos(x) = 0,4$ et $-\pi < x < 0$.

a) Calculer une valeur approchée de $\sin(x)$.

b) En déduire une valeur approchée de x.

Exercice n°3

Soit x un réel dont on connaît le cosinus et le sinus : on a $\cos(x) = 0,8$ et $\sin(x) = 0,6$.

a) Placer approximativement le point A du cercle trigonométrique correspondant à l'enroulement de ce réel x sur le cercle (unité graphique 5 cm pour une unité).

b) Placer sur le cercle les points B et C correspondant respectivement aux réels $x + \pi$ et $\pi - x$.

c) Donner le cosinus et le sinus des réels $x + \pi$ et $\pi - x$.

Exercice n°4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5\cos(x)$.

a) Calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Quelle symétrie de la courbe de f en déduit-on ?

b) Calculer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Que peut-on dire de la fonction f ? Quelle est la conséquence pour la courbe représentative de f ?

c) Calculer $f(0)$, $f(\pi/4)$, $f(\pi/2)$ et $f(3\pi/4)$.

d) Tracer alors la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

Exercice 1 : (4 points)

Pour chacune des 4 questions, plusieurs réponses sont proposées; une seule convient. Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la lettre de la réponse, sans justifier votre choix.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. Une question sans réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

1. Si $\cos x > 0$ et si $\sin x < 0$, alors x peut appartenir à l'intervalle :

   (a) $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$ (b) $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$ (c) $\left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$ (d) $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

2. Si $\cos x = -\frac{1}{2}$ et si $\sin x > 0$, alors :

   (a) $\sin x = \frac{1}{2}$ (b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sin x = 1$

3. Si $\cos x = \frac{1}{2}$ et si $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on peut avoir :

   (a) $x = -\frac{\pi}{6}$ (b) $x = -\frac{\pi}{3}$ (c) $x = \frac{\pi}{3}$ (d) $x = \frac{13\pi}{6}$

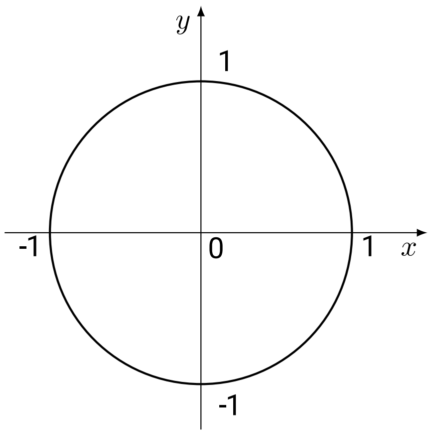
4. Le réel $\frac{4\pi}{3}$ a pour image le point du cercle trigonométrique de coordonnées :

   (a) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (c) $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Exercice 2 : (4 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Les réels $\frac{47\pi}{3}$ et $-\frac{73\pi}{3}$ sont-ils associés au même point sur le cercle trigonométrique ? Justifier.
2. Placer sur le cercle les points A, B, C et D associés respectivement aux réels $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $\frac{22\pi}{4}$.
   Justifier seulement le placement du point D par le calcul.

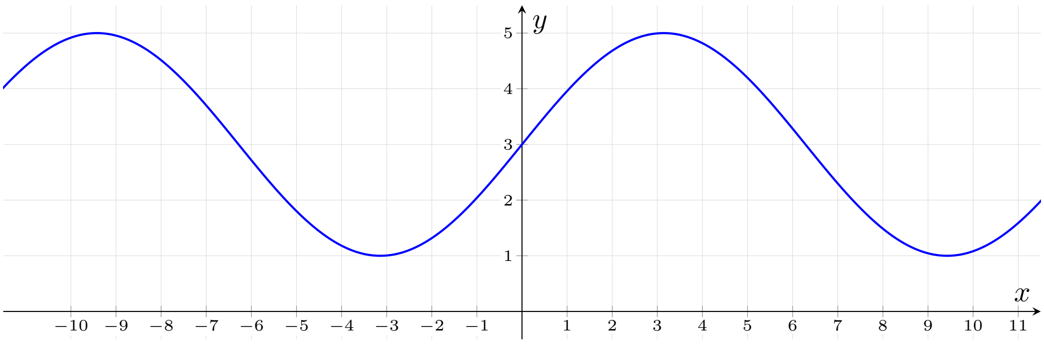


Exercice 3 : (4,5 points)

1. Résoudre les équations suivantes.
   a. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$
   b. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left]-\pi\,;\,3\pi\right]$
2. Résoudre les inéquations suivantes (on justifiera à l'aide d'un cercle trigonométrique).
   a. $2\cos(x) \geq -\sqrt{3}$ et $x \in [-\pi\,;\,\pi[$
   b. $2\sin(x) - 1 < 0$ et $x \in [0\,;\,2\pi[$

Exercice 4 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 + 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Voici sa courbe représentative :



1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que f est périodique (on précisera sa période).
3. Montrer que pour tout réel x, $1 \leq f(x) \leq 5$.

Exercice 5 : (3,5 points)

Indiquer en justifiant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour tout réel x, $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
2. Pour tout réel x, $\cos(2020\pi - x) + \cos(x + 1000\pi) = 0$.
3. x désigne un nombre réel de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$ tel que $\cos(x) = \dfrac{1}{3}$.

   Alors $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$.