

S8 - Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

Table des matières

1 Lois de l'induction	1
2 Induction propre et induction mutuelle	3
3 Énergie magnétique	7
4 Le transformateur	8
4.1 Constitution	8
4.2 Principe de fonctionnement	9
4.3 Équations de couplage	10
4.4 Représentation symbolique du transformateur parfait	11

1 Lois de l'induction

Induction de Neumann

Lorsqu'un **circuit électrique, fixe et indéformable, est plongé dans un champ magnétique extérieur variable dans le temps**, il peut être le siège de courants dits induits. C'est le phénomène d'**induction de Neumann**^a.

^a. John von Neumann (né Neumann János, 1903-1957), mathématicien et physicien américain d'origine hongroise.

Loi de Faraday.

La force électro-motrice (f.é.m.), notée e , induite dans un circuit filiforme immobile, baignant dans un champ magnétique dépendant du temps, est égale à l'opposé de la variation du flux magnétique à travers ce circuit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Cette loi donne la f.é.m orientée en convention générateur.

Elle a été mise en évidence lors de l'expérience de cours correspondant à l'animation Java illustrant la loi de Faraday^{1 2}.

La loi de Faraday nécessite d'être rigoureux, en respectant les étapes suivantes :

1. Michael Faraday (Newington, 22 septembre 1791 - Hampton Court, 25 août 1867) est un physicien et un chimiste britannique, connu pour ses travaux fondamentaux dans le domaine de l'électromagnétisme et l'électrochimie.

2. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/faraday.html>

1. **Orienter arbitrairement le circuit électrique $\mathcal{C}$, c'est-à-dire, définir le sens conventionnel du courant.**
2. L'orientation de la surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur le circuit $\mathcal{C}$, s'en déduit par la règle de la main droite. **On détermine ainsi le sens de la normale $\vec{n}$ à la surface $\mathcal{S}$.**
3. Calculer le flux magnétique à travers le circuit :

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

4. La force électromotrice induite dans le circuit, **orientée dans le sens conventionnel choisi pour l'intensité** (convention générateur), est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

5. Dessiner le schéma électrique équivalent.

Exercice d'application directe du cours : On considère une spire circulaire (figure 1), de centre O et de rayon a , de résistance R et d'axe (Oz) , plongée dans un champ magnétique extérieur de la forme : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. Déterminer le courant parcourant la spire.

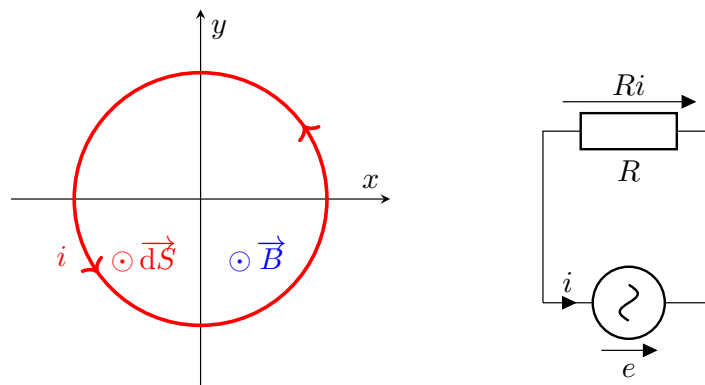


Figure 1 : Courant induit et champ magnétique propre d'une spire

On oriente la spire comme sur la figure ci-contre, ce qui donne $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$, on en déduit le flux de $\vec{B}$ à travers la spire :

$$\Phi = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{spire}} B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \pi a^2 B_0 \cos(\omega t)$$

On peut alors exprimer la f.e.m. induite qui apparaît dans la spire :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t)$$

La tracé du schéma électrique équivalent de la spire permet alors de trouver l'expression de i :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{\pi a^2 B_0 \omega}{R} \sin(\omega t)$$

Le courant induit est une manifestation de la loi de Lenz, en effet, il crée un champ magnétique propre $\vec{B}_s$ de la spire qui tend à s'opposer à la variation du flux du champ externe $\vec{B}$ qui lui a donné naissance :

- quand $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ décroît, $i > 0$ ce qui crée un champ propre $\vec{B}_s$ selon $\vec{u}_z$ alors que la composante de $\vec{B}$ selon $\vec{u}_z$ diminue
- quand $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ croît, $i < 0$ ce qui crée un champ propre $\vec{B}_s$ selon $-\vec{u}_z$ alors que la composante de $\vec{B}$ selon $\vec{u}_z$ augmente

Loi de modération de Lenz

Le courant induit, par son sens, tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

La loi de modération de Lenz est implicitement contenue dans le signe — de la loi de Faraday. Dans l'exercice précédent, seul le champ magnétique extérieur a été pris en compte dans le calcul du flux magnétique. En toute rigueur, il faudrait aussi tenir compte du champ créé par la spire, mais son effet est ici négligeable. Ceci nous amène au paragraphe suivant.

2 Induction propre et induction mutuelle

Soit deux circuits filiformes orientés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On note $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ les champs magnétiques créés respectivement par les courants i_1 et i_2 . Chaque champ crée un flux magnétique à travers chaque circuit.

Flux propre

On appelle flux propre le flux magnétique créé par un circuit à travers lui-même.

On adopte la notation suivante : $\Phi_{i \rightarrow j}$ signifie « le flux à travers le circuit j du champ magnétique créé par le courant circulant dans le circuit i ». Les symboles $\Phi_{1 \rightarrow 1}$ et $\Phi_{2 \rightarrow 2}$ correspondent donc à des flux propres et :

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 \quad \Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

On sait que $\vec{B}_1$ est proportionnel à i_1 et $\vec{B}_2$ est proportionnel à i_2 , on définit alors les coefficients de proportionnalité L_1 , L_2 , $M_{1 \rightarrow 2}$ et $M_{2 \rightarrow 1}$ de la manière suivante :

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1 \quad \Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} i_1 \quad \Phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 i_2 \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} i_2$$

Ces quatre coefficients ne dépendent que de la géométrie des deux circuits et sont, sauf cas très particuliers, compliqués à calculer.

On peut noter que L_1 est toujours positif car pour $i_1 > 0$ le champ propre et la normale ont le même sens. Si $i_1 < 0$, alors la formule $\Phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1$ reste valable et $\Phi_{1 \rightarrow 1} < 0$ car le champ propre change de sens quand le courant change de signe. Il en est de même pour L_2 , tout coefficient d'inductance propre est positif. On peut aussi démontrer que $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}$ et on note M leur valeur commune.

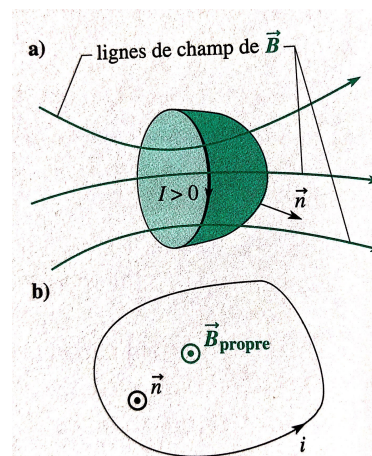


Figure 2 : Flux propre

coefficient d'auto-inductance

Pour un circuit filiforme, on définit un coefficient d'auto-inductance L , grandeur positive dépendant uniquement de la géométrie du circuit, liée au flux magnétique propre par la formule :

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = L i_1$$

L'unité de L_1 est le Henry (H).

coefficient d'inductance mutuelle

Soit deux circuits filiformes. On définit le coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux circuits par :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \text{ et } \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

Il dépend uniquement de la géométrie de l'ensemble des deux circuits (y compris leurs positions relatives) et s'exprime en henry (H). Son signe peut être quelconque et dépend des orientations relatives des deux circuits.

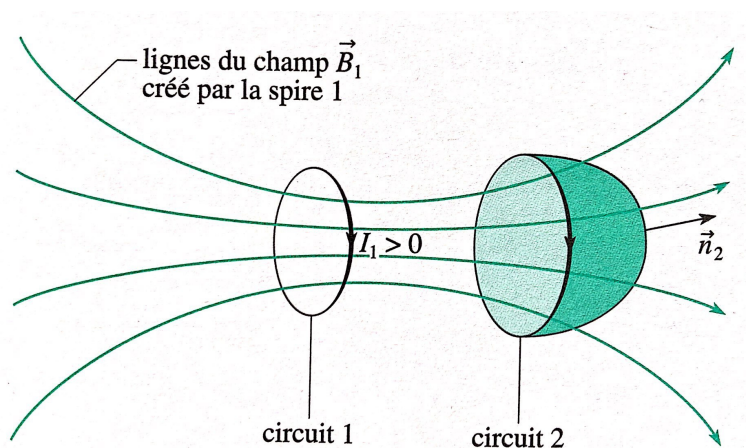
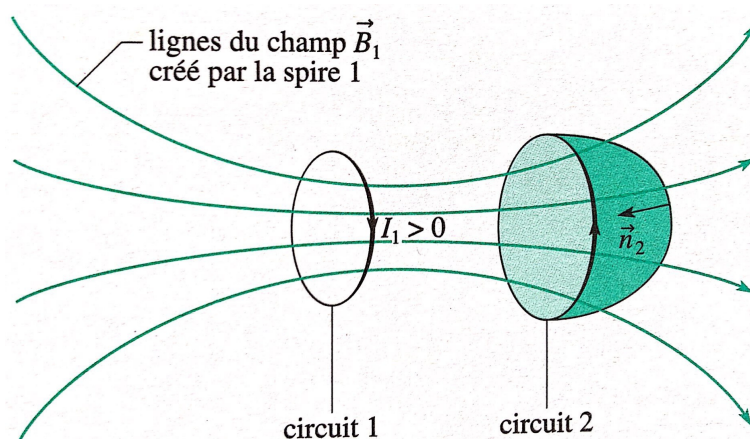


Figure 3 : Orientations des circuits telles que $M > 0$.

Figure 4 : Orientations des circuits telles que $M < 0$.

Couplage parfait de deux circuits

On dit que le couplage entre deux circuits est parfait si toutes les lignes de champ du premier traversent le second et réciproquement. C'est une situation idéale, très difficile à reproduire en pratique, sauf à canaliser le champ par un matériau ferromagnétique, comme c'est le cas dans un transformateur.

Dans le cas du couplage parfait, M vérifie la relation :

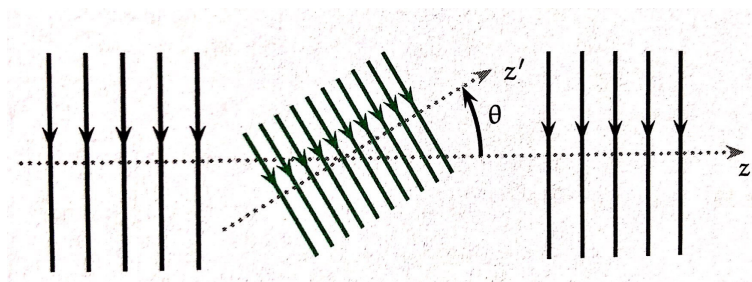
$$|M| = \sqrt{L_1 L_2}$$

Lorsque le couplage n'est pas parfait on a :

$$|M| < \sqrt{L_1 L_2} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{L_1 L_2} < M < \sqrt{L_1 L_2}$$

Exercice d'application directe du cours :

1. En négligeant les effets de bords, exprimer le coefficient d'auto-inductance d'un solénoïde de section S_1 et de longueur ℓ_1 , possédant N_1 spires. Donner sa valeur numérique pour $N_1 = 1000$, $\ell_1 = 0,1 \text{ m}$ et $S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$.
2. On considère un petit solénoïde possédant N_2 spires, de section S_2 , placé à l'intérieur du solénoïde précédent. L'angle entre les axes des deux solénoïdes est θ (si θ vaut zéro, les courants dans les deux solénoïdes sont orientés dans le même sens). Exprimer le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes.



Le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le solénoïde s'écrit :

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i_1 \vec{u}_z = \bar{B}_1 \vec{u}_z$$

On en déduit le flux propre du solénoïde :

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = \iint_{\text{Bobine}_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = N_1 \iint_{1 \text{ spire de } \mathcal{B}_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = N_1 \bar{B}_1 S_1 = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{\ell_1}}_{L_1} i_1$$

Application numérique :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{\ell_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000^2 \cdot 10^{-3}}{0,1} = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

Pour calculer M , le plus simple est d'évaluer $\Phi_{1 \rightarrow 2}$:

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{Bobine}_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{\text{Bobine}_2} \bar{B}_1 \underbrace{\vec{u}_z \cdot \vec{n}_2}_{\cos(\theta)} dS_2 = N_2 \bar{B}_1 S_2 \cos(\theta) = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2 \cos(\theta)}{\ell_1}}_M i_1$$

On voit que M change de signe suivant la valeur de θ alors que L_1 est toujours positif.

Bornes homologues.

Une borne homologue est une borne par laquelle entre un courant dans le sens conventionnel d'orientation des spires de la bobine. Cela signifie que c'est la borne par laquelle entre un courant induisant des flux comptés positivement. Ces bornes sont repérées par des points.

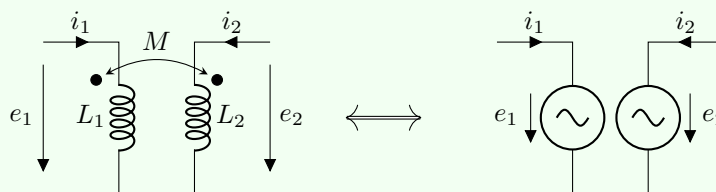


Figure 5 : Bornes homologues

Utilisation des coefficients d'inductance : La schématisation de deux circuits couplés par inductance mutuelle est donnée ci-dessus. Avec les coefficients d'inductance, on peut exprimer le flux total à travers chaque circuit (notés respectivement Φ_1 et Φ_2), tous les flux étant comptés positivement car i_1 et i_2 entrent par les bornes homologues :

$$\Phi_1 = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1$$

Alors les f.é.m dans chaque circuit s'expriment ensuite grâce à la loi de Faraday :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

Cela permet d'avoir le schéma électrocinétique équivalent. On parle de **couplage** car la force électromotrice dans chaque circuit dépend du courant dans les deux circuits.

3 Énergie magnétique

On considère deux circuits fixes couplés par inductance mutuelle, de résistance respectives R_1 et R_2 , contenant chacun un générateur de FEM respectives e_{G1} et e_{G2} .

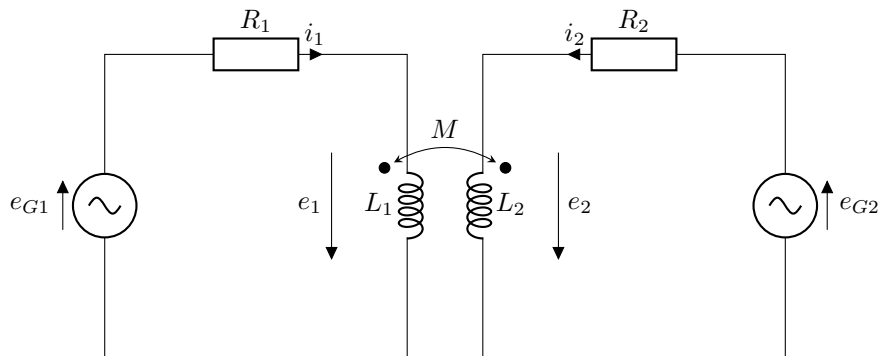


Figure 6 : Energie magnétique

Les équations électrocinétiques des circuits sont :

$$e_{G1} + e_1 = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad e_{G2} + e_2 = R_2 i_2$$

$$e_{G1} - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad e_{G2} - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2$$

Pour réaliser un bilan énergétique sur l'ensemble des deux circuits, on multiplie la première équation par i_1 puis la deuxième équation par i_2 avant de les additionner :

$$\underbrace{e_{G1} i_1 + e_{G2} i_2}_{\text{generateurs}} = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{effet Joule}} + \underbrace{L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}}_{\frac{dE_{mag}}{dt}}$$

Énergie magnétique de deux circuits.

La grandeur :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (1)$$

s'interprète comme l'énergie magnétique de deux circuits couplés. Elle correspond à l'énergie fournie par les générateurs diminuée de l'énergie dissipée par effet Joule. Cette énergie a servi à créer le champ magnétique qui est tel que (formule admise) :

$$E_{mag} = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV \quad (2)$$

Exercice d'application directe du cours : Vérifier que les deux formules ci-dessus donnent le même résultat dans le cas d'un solénoïde de grande longueur ℓ , d'axe (Oz) , de section S , comportant n spires par mètre et parcouru par un courant $i(t)$. On rappelle l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde : $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$ et on suppose qu'il est nul à l'extérieur du solénoïde (on néglige les effets de bord).

D'une part, pour un solénoïde seul ($i_1 = i \neq 0$ et $i_2 = 0$) d'inductance $L = L_1$, la formule (1) donne :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L i^2$$

D'autre part la formule (2) donne :

$$E_{mag} = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \iiint_{\text{Vol. int. du sol.}} \frac{1}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 N i}{\ell} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 N^2}{\ell^2} \cdot i^2 \cdot \underbrace{\iiint_{\text{Vol. int. du sol.}} dV}_{S\ell}$$

$$\Rightarrow E_{mag} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}}_L \cdot i^2$$

4 Le transformateur

4.1 Constitution

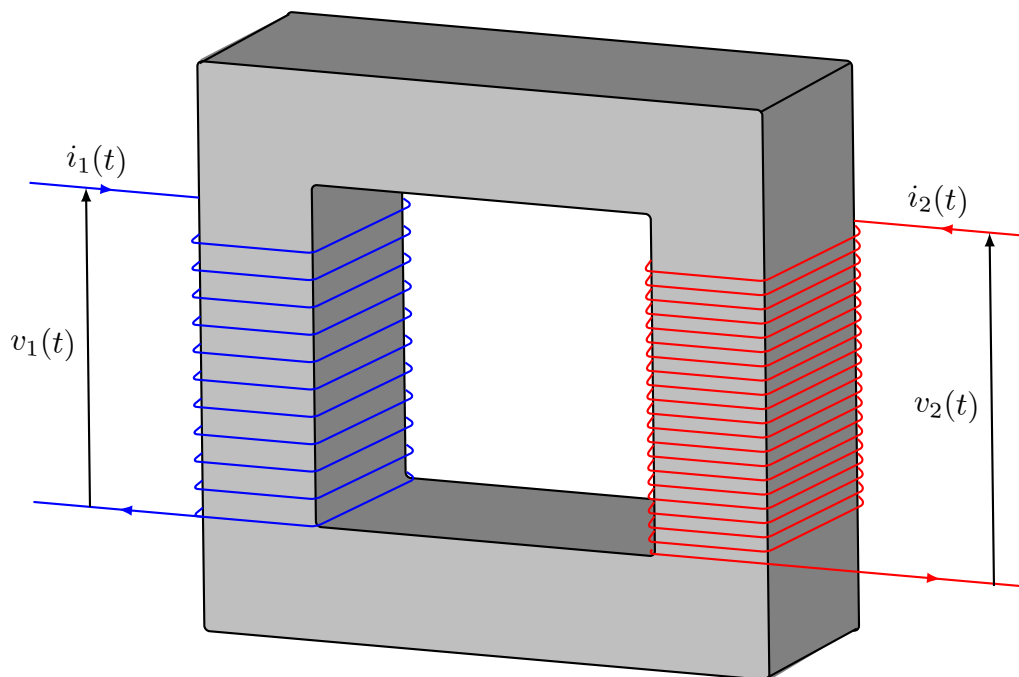


Figure 7 : Éléments constitutifs d'un transformateur

Un transformateur (figure 7) est un appareil qui modifie l'amplitude de tensions et de courants alternatifs. Il se compose d'une carcasse ferromagnétique et de deux enroulements. Le matériau ferromagnétique est choisi pour sa capacité à canaliser les lignes de champ magnétique. Ainsi, il n'existe de champ magnétique qu'à l'intérieur du circuit magnétique formé par le matériau ferromagnétique. Les enroulements sont constitués de fils de cuivre vernis, bobinés autour du circuit magnétique. L'enroulement primaire (ou plus simplement appelé le primaire) constitué de N_1 spires, est celui qui reçoit l'énergie électrique que l'enroulement secondaire (ou plus simplement appelé le secondaire) constitué de N_2 spires restitue à la charge.

Bornes homologues d'un transformateur

Pour un transformateur, les bornes homologues sont choisies telles que M est positif. Autrement dit, les courants i_1 et i_2 entrant dans les bornes homologues créent dans le circuit magnétique un champ orienté dans le même sens.

Transformateur parfait

Un transformateur est dit parfait si on peut négliger toute forme de pertes, comme les pertes par effet Joule ou les pertes fer (pertes dues au noyau ferromagnétique). On négligera les résistances du primaire et du secondaire dans le cadre de notre modèle de transformateur parfait.

4.2 Principe de fonctionnement

Le primaire, soumis à la tension alternative $v_1(t)$, est parcouru par le courant alternatif d'intensité $i_1(t)$. Ce courant $i_1(t)$ crée un champ magnétique variable. Le ferromagnétique canalise ce champ jusqu'au secondaire. Le champ variable crée alors un flux variable dans l'enroulement secondaire. Une f.é.m. est donc induite au secondaire qui donne naissance à un courant induit au secondaire si ce dernier n'est pas à vide. Le secondaire crée alors un champ qui vient se superposer au champ créé par le primaire. On appelle $\vec{B}(t)$ le champ magnétique commun qui découle de cette superposition.

Relation entre $v_2(t)$, tension au secondaire, et $v_1(t)$, tension au primaire :

Soit S la section du circuit magnétique. Le **flux commun** $\varphi(t)$ à travers une section droite, c'est-à-dire orthogonale au champ magnétique, est donc $\varphi(t) = B(t)S$.

Le flux total à travers les N_1 spires du primaire est donc $\Phi_1(t) = N_1 B(t)S$

Celui au secondaire est $\Phi_2(t) = N_2 B(t)S$

Les f.é.m. induites au primaire et au secondaire sont alors :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 S \frac{dB}{dt} \quad \text{et} \quad e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 S \frac{dB}{dt}$$

Le schéma électrique équivalent est donc, en se souvenant bien que les f.é.m. induites sont dans le même sens que les courants :

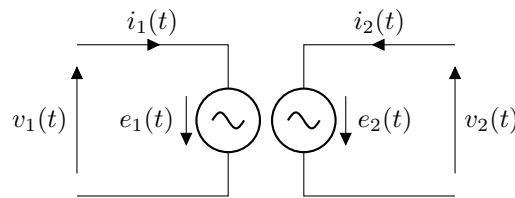


Figure 8 : Schéma équivalent du transformateur

On en déduit :

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{e_2(t)}{e_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

où $m = \frac{N_2}{N_1}$ est le rapport de transformation.

Loi des tensions

Lorsqu'un transformateur est en régime alternatif, les tensions au primaire et au secondaire sont liées par la loi des tensions faisant intervenir le rapport de transformation :

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

Repérage des bornes homologues et mesure de m

La loi des tensions peut être mise à profit pour repérer les bornes homologues : on réalise pour cela un essai avec secondaire à vide et on observe à l'oscilloscope la tension au primaire et la tension au secondaire, si ces tensions sont en phase elles pointent sur les bornes homologues, sinon elles sont en opposition de phase. Le rapport de l'amplitude de la tension au secondaire par l'amplitude de la tension au primaire donne m .

4.3 Équations de couplage

On peut également analyser le fonctionnement du transformateur en utilisant les équations des circuits couplés par une inductance mutuelle M .

Lorsque le secondaire est à vide (la charge est un circuit ouvert donc $i_2 = 0$) et qu'on alimente le primaire, on a : $\Phi_1 = L_1 i_1$ et $\Phi_2 = M i_1$

On en déduit :

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3)$$

Lorsque le primaire est à vide (la charge est un circuit ouvert donc $i_1 = 0$) et qu'on alimente le secondaire, on a : $\Phi_2 = L_2 i_2$ et $\Phi_1 = M i_2$

On en déduit :

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{L_2}{M} = \frac{N_2}{N_1} \quad (4)$$

Ces deux expressions combinées permettent de retrouver la relation qui traduit le **couplage parfait entre le primaire et le secondaire** :

$$(3)/(4) \Rightarrow M^2 = L_1 L_2 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2}$$

Ces deux expressions donnent également :

$$(3) \times (4) \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \Rightarrow m = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

On déduit de ce qui précède :

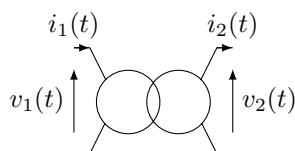
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} v_1 = m v_1$$

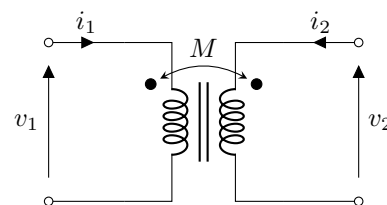
On retrouve bien la loi des tensions avec cette approche utilisant les coefficients d'induction mais on lui préférera la première approche plus simple utilisant le flux commun $\varphi(t)$.

4.4 Représentation symbolique du transformateur parfait

Deux représentations sont possibles et communément admises pour le transformateur (rajouter les informations manquantes) :



Première possibilité



Deuxième possibilité : circuits couplés avec une double barre représentant le noyau ferromagnétique

Figure 9 : Deux représentations possibles d'un transformateur dans un schéma électrique