

Séries entières

Feuille d'exercices #09

⊗ Partie A – Rayon de convergence

★ **Exercice 1** — Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général $a_n x^n$, pour :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad a_n = \operatorname{ch}(n); \quad a_n = \cos(n); \quad a_n = \frac{n^n}{n!}; \quad a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2};$$

$$a_n = \ln(n!); \quad a_n = \frac{\sin(n\alpha)}{3^n}; \quad a_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$$

★ **Exercice 2** — Déterminer le domaine de convergence des séries entières :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x^{n^2}; \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}; \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \arctan(n^\alpha) x^n; \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt \right) x^n$$

★ **Exercice 3** — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note R' la rayon de convergence de $\sum b_n z^n$, où l'on a posé :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

1. Comparer $|a_n|$ et $|b_n|$. En déduire que $R' \geq \max(1, R)$.
2. En distinguant les cas $R' = 1$ et $R' > 1$ et en exprimant $|a_n|$ en fonction de $|b_n|$, prouver que $R' = \max(1, R)$.

★★ **Exercice 4** — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^{kn} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} a_n^2 z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

⊗ Partie B – Calcul de sommes

★ **Exercice 5** — Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes, calculer leur somme et, s'il y a lieu, étudier la convergence aux bornes.

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}; \quad \sum \operatorname{ch}(n) x^n; \quad \sum \frac{x^n}{(2n)!}; \quad \sum \frac{x^n}{2n+1}$$

★★ **Exercice 6** — Déterminer le rayon de convergence et préciser la somme de :

$$\sum \frac{x^n}{n(n+2)}; \quad \sum \frac{n^2 + n + 1}{n} x^n; \quad \sum \frac{n^2 + 2n - 1}{(n+1)!} x^n; \quad \sum \frac{2n+1}{2n+3} x^n;$$

$$\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n; \quad \sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n!} x^n; \quad \sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}; \quad \sum \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1}$$

★ **Exercice 7** — Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

★ **Exercice 8** — Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}$. Préciser le domaine de convergence de la série entière puis expliciter $f(x)$.

★★ **Exercice 9** —

1. Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$.
2. Pour $r \in [0, 1[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, calculer $\varphi(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} e^{in\theta}$.
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$.

★ **Exercice 10** — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Quel est le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} x^n$?

On note f et g leurs sommes respectives.

2. Donner une relation entre $f'(x)$, $g(x)$ et $g'(x)$.

★★ **Exercice 11** — Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \text{Tr}(A^n) z^n$ puis exprimer sa somme en fonction de χ_A .

★ **Exercice 12** — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2a_n}{n+2}$ et $a_0 = a_1 = 1$. On note f la somme de la série $\sum a_n x^n$.

1. Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.
2. Montrer que f est solution de $(1-x)y'(x) - (2x+1)y(x) = 0$.

★ **Exercice 13** — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$.

1. Déterminer α et $M > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M\alpha^n$.
2. En déduire que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est strictement positif.
3. Calculer la somme de la série entière et en déduire l'expression de a_n .

★★ **Exercice 14** — *Nombres de Catalan*

Soit (u_n) la suite d'entiers définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$.

Donner à l'aide de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ une expression simple de u_n en fonction de n .

★★ **Exercice 15** — *Nombre de dérangements*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et d_n le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe.

On convient que $d_0 = 1$ et on considère la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que f est définie sur $] -1, 1[$.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. En déduire $f(x)$ puis exprimer d_n en fonction de n .

★★★ **Exercice 16** — *Nombre de partitions*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, avec, comme convention, $d_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$ puis que $d_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$ et calculer sa somme.

★★★ **Exercice 17** — *Nombre d'involutions*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle involution de $\llbracket 1, n \rrbracket$ toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma \circ \sigma = \text{id}$. On note i_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Par convention, $i_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{i_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $i_n = i_{n-1} + (n-1)i_{n-2}$.
3. Calculer, pour $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i_n}{n!} x^n$.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{i_n}{n!}$ en $+\infty$.

★★★ **Exercice 18** — *Nombre de surjections*

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $s_{p,n}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

On considère alors la fonction génératrice S_p définie par $S_p(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_{p,n}}{n!} z^n$.

1. Donner la valeur de $s_{p,n}$ pour $p > n$ et trouver un majorant simple de $s_{p,n}$. Quel est le domaine de définition de S_p ?
2. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $s_{p+1,n} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} s_{p,n-k}$.
3. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p(z) = (e^z - 1)^p$.

⊗ Partie C – Comportement au bord

★ **Exercice 19** — Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

Préciser le domaine de définition de f et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles sur $] -1, 1[$. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

★ **Exercice 20** — On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f .
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1 .
3. Établir la continuité de f en -1 .
4. Déterminer à l'aide d'une minoration la limite de f en 1.

★★ **Exercice 21** — On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$.

1. Déterminer son domaine de convergence.
2. Montrer que la série converge uniformément sur $[-1, 0]$. Qu'en conclure ?
3. Étudier la limite en 1^- de $(1-x)f(x)$, où f désigne la somme de la série.

★★ **Exercice 22** — On définit, sous réserve de convergence, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Donner le domaine de définition de f puis étudier la continuité de f .
2. Justifier que $(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell$ où ℓ est un réel à déterminer.

★★ **Exercice 23** — Calculer $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et prouver que $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

★★ **Exercice 24** — *Théorème de convergence radiale d'Abel - cas complexe*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence égal à 1.
On suppose que $\sum a_n$ converge.

1. On fixe $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. Représenter l'ensemble :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ et } \exists r > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - re^{i\theta} \right\}$$

Représenter graphiquement l'ensemble Δ_{θ_0} .

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On note R_n le reste au rang n de $\sum a_n$.

$$\text{Montrer que } f(z) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

3. Montrer que pour $z = 1 - re^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$, $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - r}$.

4. En déduire que $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

★ **Exercice 25** — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

1. Justifier la convergence de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une limite notée par la suite ℓ .
Qu'en déduire au sujet du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \ell$.

★★ **Exercice 26** — *Un autre théorème taubérien*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ égal à 1 et on note f sa somme. On suppose de plus que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell \in \mathbb{R}$ et que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que pour tous $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k - f(x) \right| \leq (1-x) \sum_{k=0}^n k |a_k| + \frac{1}{n(1-x)} \cdot \sup_{k \geq n+1} k |a_k|$$

2. Justifier la convergence de $\sum a_n$ et montrer que $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

★★ **Exercice 27** — Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.
On note S la somme de la série et on suppose que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell \in \mathbb{R}$.

1. La série $\sum a_n$ est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs positives.
Prouver la convergence de $\sum a_n$ et montrer que $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

★★ **Exercice 28** — Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

On suppose que le rayon de convergence de $\sum v_n x^n$ vaut 1 et que $\sum v_n$ diverge.

1. Par un découpage judicieux et en revenant à la définition de la limite,

$$\text{montrer que } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty \text{ puis que } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

2. En déduire un équivalent en 1^- de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

★★ **Exercice 29** —

1. Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante supposée intégrable.
Montrer que pour tout $h > 0$, $\sum_{n \geq 1} f(nh)$ converge et que :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

2. En posant $x = e^{-h}$, déterminer un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

⊗ Partie D – Développements en série entière

★ **Exercice 30** — Donner le développement en série entière de :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right); \quad g(x) = \operatorname{sh}(x) \cos(x); \quad h(x) = \ln^2(1+x);$$

$$j(x) = \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right); \quad k(x) = \frac{1}{x^2+x+1}; \quad l(x) = \arcsin(x)$$

★ **Exercice 31** — Donner le développement en série entière de :

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6); \quad g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right); \quad h(x) = \cos(x) \operatorname{ch}(x);$$

$$k(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right); \quad l(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad m(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1};$$

$$p(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt; \quad r(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$$

★ **Exercice 32** — Pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donner le développement en série entière de :

$$x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x); \quad x \mapsto \int_x^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt \quad \text{et} \quad x \mapsto \arctan\left(\frac{x \sin \theta}{1 - x \cos \theta}\right)$$

★★ **Exercice 33** — Soient $a \in]-1, 1[$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $|f^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{1-|a|}$.
2. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

★★ **Exercice 34** — Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$. ($|\lambda| < 1$)

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $a > 0$,

$$\|f^{(k+1)}\|_{\infty, [-a, a]} \leq (1 + |\lambda|)^k \cdot \|f'\|_{\infty, [-a, a]}$$

2. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

★★ **Exercice 35** — Inverse d'une série entière

Soient $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

1. On suppose dans cette question l'existence d'une série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence $R' > 0$ et dont la somme $g(x)$ vérifie $f(x)g(x) = 1$. Exprimer alors b_n en fonction de a_n .
2. a) Prouver l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq \alpha^n$.
b) En déduire l'existence de la série entière introduite dans la première question. On vérifiera en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leq \beta^n$ pour un certain réel $\beta > 0$.

★★ **Exercice 36** — Principe des zéros isolés

1. Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose de plus développable en série entière sur $D(0, R)$, où $R > 0$. Montrer que si f s'annule une infinité de fois au voisinage de 0, alors f est nulle.
2. Retrouver le principe d'unicité du développement en série entière.
3. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence strictement positifs. On suppose que :

$$\exists r > 0, \quad \forall z \in D(0, r), \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 0$$

Montrer que l'une des deux séries est nulle.

★★ **Exercice 37** — Analyticité de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f . Montrer que pour tout $z_0 \in D(0, R)$, il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall z \in D(z_0, R - |z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

★★ **Exercice 38** — Critère de développabilité en série entière

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

- (i) f est développable en série entière au voisinage de 0
- (ii) il existe $\alpha > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tq pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-\alpha, \alpha]$, $|f^{(n)}(x)| \leq M a^n n!$

★★★ **Exercice 39** — *Limite uniforme d'une suite de fonctions dév. en série entière*
On note respectivement D et D_f les disques unités ouvert et fermé de $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur D_f et développables en série entière dans D . On suppose que la suite de fonctions converge uniformément sur D_f vers une fonction notée f . Montrer que f est développable en série entière dans D .

⊗ Partie E – Intégration terme à terme

★ **Exercice 40** — Calculer $I = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$.

Les 5/2 proposeront deux méthodes distinctes.

★ **Exercice 41** — Soit $a \in]0, 1[$. On pose $I_a = \int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx$.

1. Établir la convergence de I_a et l'égalité $\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx$.

★★ **Exercice 42** — On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Donner le développable en série entière de f .
2. Prouver que $\operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{it}) dt \right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

★★★ **Exercice 43** — On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!^2}$, de somme notée f .

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\sqrt{x} \cos(\theta)} d\theta$.
2. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

★ **Exercice 44** — *Inégalité de Cauchy*

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Calculer, pour $r \in [0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

En déduire que $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ où $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

2. Montrer que si $R = +\infty$ et f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.

★ **Exercice 45** — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.
2. En notant f la somme de la série, montrer que pour tout $x \in D_f(0, 1)$,

$$\int_0^{+\infty} f(xt) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

★★ **Exercice 46** — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

On pose, sous réserve d'existence, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$.

1. On suppose (a_n) sommable. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2. On suppose $\sum a_n$ convergente. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.
 - a) À l'aide d'une équation différentielle vérifiée par $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R_n}{n!} t^n$,
montrer que $e^{-x} g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \int_0^x f(t) e^{-t} dt$ pour tout $x \geq 0$.
 - b) Montrer que le résultat de la question 1 subsiste.

★★ **Exercice 47** — Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de

convergence $R > 0$. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$. On pose $g(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))}{r - ze^{-i\theta}} d\theta$.

1. Montrer que g est développable en série entière et exprimer $g(z)$ en fonction de $f(z)$ et $f(0)$.
2. Qu'en déduire pour une fonction f qui ne prendrait que des valeurs réelles sur $\mathcal{C}(0, r)$ pour un certain réel $r > 0$?