

Mathématiques – CCINP/E3A – DS₄

*Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).
Numérotez chaque page de votre devoir.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 : Suite de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

Q1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée f .

Q2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$.

Q3. Soit $A > 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, A]$.

Q4. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-A, A]$.

Q5. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Réponse

Q1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On sait que $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Donc,

la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x$.

Q2. On définit les fonctions $\varphi : x \mapsto x - \sin(x)$ et $\psi(x) = x - \sin(x) - \frac{x^3}{6}$.

Les fonctions φ et ψ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\varphi'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0, \quad \psi'(x) = 1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \psi''(x) = \sin(x) - x.$$

On en déduit que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$:

pour tout $x \geq 0$, $0 \leq x - \sin(x)$.

De plus, $\psi''(x) \leq 0$. Donc, ψ' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\psi'(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $x \geq 0$, $\psi'(x) \leq 0$.

Donc, ψ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\psi(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) \leq 0$, donc,

pour tout $x \geq 0$, $x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$.

Q3. Soit $x \in [0, A]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x \right| = n \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right|.$$

Par **Q2** appliqué avec x remplacé par $\frac{x}{n} \geq 0$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = n \left(\frac{x}{n} - \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right) \leq n \times \frac{\frac{x^3}{n^3}}{6n^2} \leq \frac{A^3}{6n^2}.$$

Donc,

$$0 \leq \|f_n - f\|_{[0, A]} \leq \frac{A^3}{6n^2}.$$

Par théorème d'encadrement, $\|f_n - f\|_{[0,A]}^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, A]$.

Q4. Pour tout $x \in [-A, A]$, $f_n(-x) - f(-x) = n \sin\left(\frac{-x}{n}\right) + x = -(f_n(x) - f(x))$.

Donc, $f_n - f$ est impaire. On en déduit que :

$$\|f_n - f\|_{[-A,A]}^\infty = \|f_n - f\|_{[0,A]}^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc,

la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-A, A]$.

Q5. On a : $f_n(n) - f(n) = n \sin(1) - n = n(\sin(1) - 1)$.

Donc,

$$\|f_n - f\|_{\mathbb{R}}^\infty \geq |n(\sin(1) - 1)| = \underbrace{|1 - \sin(1)|}_{\neq 0} n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}}^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi,

la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Limite de matrices (E3A PSI 2015)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 1 - \frac{\sin(n)}{n} \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où n est un entier non nul.

Q6. Déterminer $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

Q7. Étudier la diagonalisabilité des matrices A_n et A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q8. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Réponse

Q1. On travaille coefficient par coefficient. Comme $\sin$ est bornée,

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q2. On remarque que $\chi_{A_n} = \left(X - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \left(X - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ est scindé à racines simples, donc,

A_n est diagonalisable.

De plus, $\chi_A = (X - 1)^2$.

Par l'absurde, si A est diagonalisable, alors il existe P inversible telle que $A = P I_2 P^{-1} = I_2$. Contradiction.

Ainsi,

A n'est pas diagonalisable.

Q3. La réponse est non par caractérisation séquentielle des fermés.

Problème : Matrices nilpotentes (E3A PSI 2017)

Dans tout le problème, on se donne $n \geq 2$ un entier et on note

- $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels,
- O_n la matrice nulle de $\mathcal{E}$ et I_n la matrice identité,
- $A^\top$ la transposée d'un élément de $\mathcal{E}$,
- $E_{i,j} \in \mathcal{E}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{E}$,
- $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices **nilpotentes** de $\mathcal{E}$, c'est à dire des $A \in \mathcal{E}$ telles qu'il existe un entier p avec $A^p = O_n$.

Questions de cours

- Q9.** Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$? En donner sans justification une base.
- Q10.** Soient $i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. calculer le produit des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$. On montrera en particulier que ce produit est nul lorsque $j \neq k$.
- Q11.** Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
- Q12.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Réponse

Q9. On a :

$$\dim(\mathcal{E}) = n^2 \text{ et une base est } (E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Q10. Soit $(x, y) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour une matrice M , on note $[M]_{x,y}$ le coefficient de M à la ligne x et à la colonne y . On a :

$$[E_{i,j}E_{k,\ell}]_{x,y} = \sum_{a=1}^n [E_{i,j}]_{x,a} [E_{k,\ell}]_{a,y} = [E_{i,j}]_{x,j} [E_{k,\ell}]_{j,y}.$$

Cas 1 : $j \neq k$. On a $[E_{i,j}E_{k,\ell}]_{x,y} = 0$. Donc,

$$\text{si } j \neq k, \text{ alors } E_{i,j}E_{k,\ell} = 0.$$

Cas 2 : $j = k$. On a :

$$[E_{i,j}E_{k,\ell}]_{x,y} = [E_{i,j}]_{x,j} [E_{k,\ell}]_{j,y} = \delta_{i,x} \delta_{j,y} = [E_{i,j}]_{x,y}.$$

Donc,

$$\text{si } j = k, E_{i,j}E_{k,\ell} = E_{i,j}.$$

Q11. Théorème de Cayley-Hamilton :

le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est annulateur de A .

Q12. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

Partie 1 : Propriétés élémentaires

Soit A un élément de $\mathcal{N}$

- Q13.** La matrice A peut-elle être inversible ? Justifier votre réponse.
- Q14.** On note $\text{Sp}(A)$ le spectre de A , c'est à dire l'ensemble des valeurs propres complexes de la matrice A . Déterminer $\text{Sp}(A)$ et donner le polynôme caractéristique de A .
- Q15.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
- Q16.** Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par A , noté $\text{Vect}(A)$, est inclus dans $\mathcal{N}$.
- Q17.** Vérifier que $A^\top \in \mathcal{N}$.
- Q18.** Montrer que si M est semblable à A , alors $M \in \mathcal{N}$.
- Q19.** Montrer que $A^n = O_n$.
- Q20.** En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{E}$ soit nilpotente est que $M^n = O_n$.
On pourra admettre ce résultat et l'utiliser dans la suite du problème.
- Q21.** Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est le rang maximal de A ?
- Soient $(B, C) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$.
- Q22.** On suppose que $BC \in \mathcal{N}$. Prouver alors que $CB \in \mathcal{N}$.
- Q23.** Ici, on suppose de plus que $B \in \mathcal{N}$ et $AB = BA$. Montrer que $AB \in \mathcal{N}$ et que $A + B \in \mathcal{N}$.
- On admet le résultat suivant :

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q24.** Déterminer l'ensemble de toutes les matrices symétriques réelles appartenant à $\mathcal{N}$.
- Dans les deux questions suivantes,** on suppose que la matrice nilpotente A est antisymétrique.
- Q25.** Prouver que $A^2 = O_n$.
- Q26.** En déduire l'ensemble de toutes les matrices antisymétriques appartenant à $\mathcal{N}$ (on pourra utiliser la trace).

Réponse

Q13. Comme A est une matrice nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Donc, $\det(A^p) = 0$. Or, $\det(A^p) = (\det(A))^p$.

Donc, $\det(A) = 0$ et

A n'est pas inversible.

Q14. En reprenant les notations de la question précédente, X^p est annulateur de A , donc, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$.

Or, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, est unitaire et de degré n , donc,

$$\chi_A = X^n \text{ et } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}.$$

Q15. On suppose que A est diagonalisable.

Par définition, A est semblable à une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A .

Comme $\text{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice nulle.

Donc, A est la matrice nulle.

Réciproquement, si A est la matrice nulle, alors $A^1 = 0$, donc, A est nilpotente.

Ainsi,

A est diagonalisable et nilpotente si et seulement si A est la matrice nulle.

Q16. Soit $M \in \text{Vect}(A)$. On a $M = \lambda.A$.

Donc, $M^p = \lambda^p.A^p = 0$.

Donc, M est nilpotente.

$$\text{Vect}(A) \subset \mathcal{N}.$$

Q17. On a : $(A^\top)^p = (A^p)^\top = 0^\top = 0$. Donc,

$$A^\top \in \mathcal{N}.$$

Q18. On sait que M est semblable à A , donc, il existe une matrice P inversible, telle que $M = P^{-1}AP$.

On a :

$$M^p = P^{-1}AP \times P^{-1}AP \times \dots \times P^{-1}AP.$$

Or, $PP^{-1} = I_n$, donc, $M^p = P^{-1}A^pP = P^{-1} \times O_n \times P = O_n$.

Donc,

$$M \in \mathcal{N}.$$

Q19. On sait que $\chi_A = X^n$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = O_n.$$

,

Q20. La question **Q19** montre le sens direct. Le sens réciproque est immédiat.

Q21. D'après **Q14**, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}[X]$, donc,

A est trigonalisable.

Une matrice nilpotente n'est pas inversible, donc, son rang est au plus $n - 1$. On donne maintenant un exemple de matrice nilpotente de rang $n - 1$.

On note $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

On a $\text{Im}(T) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$. Comme $C_1 \neq 0$, $\text{Im}(T) = \text{Vect}(C_2, \dots, C_n)$.

De plus, la famille $(C_2, \dots, C_n)$ est libre (sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Donc, $(C_2, \dots, C_n)$ est une base de $\text{Im}(T)$ et $\text{rg}(T) = n - 1$.

On a $\chi_T = X^n$, donc, par le théorème de Cayley-Hamilton, $T^n = O_n$, donc, T est nilpotente.

D'autre part, une matrice nilpotente n'est pas inversible, donc, $\text{rg}(T) \leq n - 1$.

Ainsi,

le rang maximum d'une matrice nilpotente est $n - 1$.

Q22. Il existe un entier naturel p tel que $(BC)^p = O_n$.

De plus, $(CB)^{p+1} = C(BC)^pB = C \times O_n \times B = O_n$.

Donc,

CB est nilpotente.

Q23. Comme B est nilpotente, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $B^q = 0$.

Or, $(AB)^{\max(p,q)} = A^{\max(p,q)}B^{\max(p,q)} = O_n$, donc,

AB est nilpotente.

Comme A et B commutent, par la formule du binôme de Newton :

$$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} + \sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}$$

Dans la deuxième somme $k \geq p$, donc, $A^k = O_n$.

Dans la première somme $p+q-k \geq q$, donc, $B^{p+q-k} = O_n$.

Donc, $(A+B)^{p+q} = O_n$.

Ainsi,

$A+B$ est nilpotente.

Q24. Soit A une matrice symétriques et nilpotentes. Par le résultat admis, A est diagonalisable.

Donc, par **Q15**, A est la matrice nulle.

Réciproquement, la matrice nulle est symétrique et nilpotente.

Donc,

la matrice nulle est la seule matrice symétrique et nilpotente.

Q25. On a : $(A^2)^\top = (A^\top)^2 = (-A)^2 = A^2$.

Donc, A^2 est symétrique. De plus, comme A est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = O_n$, donc, $(A^2)^p = A^{p+2} = O_n$.

Donc, A^2 est nilpotente.

Par la question précédente,

$$A^2 = O_n.$$

Q26. On a $\text{tr}(A^2) = 0$. Or, $A^\top = -A$, donc, $-\text{tr}(A^\top A) = 0$.

On reconnaît le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc, par le caractère défini du produit scalaire,

$$A = O_n.$$

Partie 2 : Exemples

Dans cette partie, M est une matrice de $\mathcal{E}$.

Exemple 1

Dans cet exemple, on prend $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$ définie par : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, c'est à dire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Q27. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de la matrice M .

Q28. On pose $S = M + M^\top$. A-t-on $S \in \mathcal{N}$?

Montrer que $S^2 \in \text{Vect}(I_n, S)$. Déterminer alors les éléments propres de la matrice S .

Q29. $\mathcal{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

Exemple 2

Dans cet exemple, on prend $n = 2$.

Q30. On suppose que M est de rang 1.

Montrer que $M^2 = \text{tr}(M)M$. En déduire que M est diagonalisable ou nilpotente.

Q31. Déterminer une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale n'est pas identiquement nulle.

Q32. En déduire l'ensemble de toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Réponse

Q33. On a $\chi_M = X^n$, donc,

0 est la seule valeur propre de n .

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_3 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_n = 0. \end{cases}$$

Donc, $x_n = x_{n-1} = \dots = x_2 = 0$.

Donc,

$$AX = 0 \iff X = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Q34. On a $S^\top = M^\top + M = S$. Donc, S est symétrique.

Comme $S \neq O_n$, par **Q24**,

$M + M^\top$ n'est pas nilpotente.

Après calculs,

$$S^2 = (n-2)S + (n-1)I_n \in \text{Vect}(I_n, S).$$

Le polynôme $P = X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-(n-1))$ est annulateur de S , donc,

$$\text{Sp}(S) \subset \{-1, n-1\}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$(S + I_n)X = 0 \iff x_1 + \dots + x_n = 0.$$

Donc,

$$E_{-1}(S) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$(S - (n-1)I_n)X = 0 \iff x_1 + \dots + x_n = nx_1 = \dots = nx_n \iff x_1 = \dots = x_n \iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$E_{n-1}(S) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Q35. Les matrices M et $M^\top$ sont nilpotentes, mais leur somme S ne l'est pas. Ainsi,

$\mathcal{N}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

Q36. Comme $n = 2$, on sait que, $\chi_M = X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M)$.

De plus, M est de rang 1, donc n'est pas inversible. Donc, $\det(M) = 0$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton :

$$M^2 = \text{tr}(M)M.$$

Cas 1 : $\text{tr}(M) = 0$. On a $M^2 = O_2$, donc, M est nilpotente.

Cas 2 : $\text{tr}(M) \neq 0$. Le polynôme $P = X^2 - \text{tr}(M)X = X \times (X - \text{tr}(M))$ est annulateur de M et est scindé à racines simples, donc

M est diagonalisable.

Q37. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

Q38. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.

Comme A n'est pas inversible $\text{rg}(A) < 2$, donc, $ad - bc = 0$.

De plus, par la partie I, A est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0, donc, $a + d = 0$.

Donc, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$ et $a^2 = bc$.

Réciproquement, on suppose que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$ et $a^2 = bc$. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = O_2.$$

Donc,

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a^2 = bc \right\}.$$

Partie 3 : Sous-espace engendré par $\mathcal{N}$

Soient

- T_0 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des matrices de trace nulle

- V le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{N} : V = \text{Vect}(\mathcal{N})$, c'est à dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires (finies) d'éléments de $\mathcal{N}$.

Q33. Déterminer la dimension de T_0 .

Q34. Prouver que $\mathcal{N}$ et V sont inclus dans T_0 .

Pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on note

$$F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j} \quad \text{et} \quad G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$$

Q35. Calculer F_j^2 .

Q36. Montrer que $G_j \in V$

Q37. Soit $\mathcal{F}$ la famille de $\mathcal{E}$ constituée des $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et de toutes les matrices G_k pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre dans V .

Q38. En déduire que $V = T_0$.

Réponse

Q1. On a $T_0 = \text{Ker}(\text{tr})$. Or, tr est une forme linéaire non nulle, donc,

$$\dim(T_0) = n^2 - 1.$$

Q2. Soit $A \in \mathcal{N}$. Par **Q21** et **Q14**, A est semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont nuls, donc, $\text{tr}(A) = 0$.
Donc,

$$\mathcal{N} \subset T_0.$$

De plus, par linéarité de la trace,

$$V \subset T_0.$$

Q3. On a :

$$F_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & & 0 & \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$F_j^2 = 0.$$

Q4. Les matrices $F_j, E_{1,j}$ et $E_{j,1}$ sont nilpotentes. Donc,

$$G_j \in V.$$

Q5. On a $G_k = E_{k,k} - E_{1,1}$.

Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ et $(\mu_k)_{2 \leq k \leq n}$ tels que :

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=2}^n \mu_k G_k = O_n.$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} -(\mu_2 + \dots + \mu_n) & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1,n} \\ \lambda_{n,1} & \dots & \lambda_{n,n-1} & \mu_n \end{pmatrix} = O_n.$$

Donc, les $\lambda_{i,j}$ et les μ_k sont nuls.

Donc,

la famille $\mathcal{F}$ est libre dans V .

Q6. On sait que $V \subset T_0$.

De plus, par la question précédente, $\dim(V) \geq n^2 - 1$.

Or, $\dim(T_0) = n^2 - 1$.

Donc, $\dim(V) = \dim(T_0)$.

Ainsi,

$$V = T_0.$$

Partie 4 : Sous-espaces de dimension maximale contenus dans $\mathcal{N}$

On note $\mathcal{T}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée uniquement de 0.

Q39. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_1$.

Q40. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_1$. On pourra utiliser les résultats de la partie 1.

Q41. Démontrer que $\mathcal{E} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_1$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ dont la dimension est notée d .

Q42. On suppose que $d > \frac{n(n-1)}{2}$. Démontrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$. Conclure.

Q43. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$? Donner un exemple de tel sous-espace.

Réponse

Q1. Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{E}$.

On a :

$$T \in \mathcal{T}_1 \iff T = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{i,j} E_{i,j}.$$

Donc, la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{T}_1$.

De plus, c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{E}$, donc, c'est une famille libre.

On en déduit que

$$(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \text{ est une base de } \mathcal{T}_1 \text{ et } \dim(\mathcal{T}_1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Q2. Dans la partie 1, on a montré qu'une matrice nilpotente est trigonalisable et que sa seule valeur propre est 0, donc est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_1$.

Q3. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_1$.

On sait déjà que les coefficients diagonaux de A sont nuls.

De plus, comme A est triangulaire supérieure et symétrique, les coefficients hors diagonaux de A sont nuls.

Ainsi, $A = 0$.

Donc,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_1 = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}.$$

$$\text{De plus, } \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{T}_1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(\mathcal{E}).$$

Donc,

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_1.$$

Q4. Par l'absurde, on suppose que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) = 0$.

La somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + F$ est direct, donc,

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(F) = \frac{n(n+1)}{2} + d > \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Contradiction car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et $\dim(\mathcal{E}) = n^2$.

Donc,

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0.$$

On en déduit qu'il existe $A \in F$ une matrice symétrique non nulle.

Or, $F \subset \mathcal{N}$. Donc, A est nilpotente.

Par la partie I, on en déduit $A = O_n$. Contradiction.

Donc,

$$d \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Q5. Par la question précédente, la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ est inférieure à $\frac{n(n-1)}{2}$.

De plus, $\mathcal{T}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ et de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Donc,

$$\text{la dimension maximale d'un sous-espace de } \mathcal{E} \text{ contenu dans } \mathcal{N} \text{ est exactement } \frac{n(n-1)}{2}.$$

Partie 5 : Un peu de topologie

$\mathcal{E}$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé de dimension finie.

Q44. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{E}$.

Q45. Soient $A \in \mathcal{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $M = I_n + \alpha A$.

Montrer que $\det(M) = 1$. En déduire que toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que $\mathcal{N}$ ne possède pas de point intérieur.

Q46. Soit F un sous-espace de $\mathcal{E}$. Montrer que si F admet au moins un point intérieur, alors $F = \mathcal{E}$.

Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Réponse

Q1. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{N}$ qui converge vers $A \in \mathcal{E}$.

Montrons que $A \in \mathcal{N}$.

D'après la partie I, comme les matrices A_k sont nilpotente, on a $A_k^n = O_n$.

De plus, l'application $f: \begin{matrix} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & M^n \end{matrix}$ est continue sur $\mathcal{E}$. En effet, les coefficients de M^n sont des polynômes en les coefficients de M .

Donc, $A_k^n = f(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} f(A) = A^n$.

En passant à la limite dans l'égalité, $A_k^n = O_n$, il vient $A^n = O_n$. Donc, A est nilpotente.

Par caractérisation séquentielle des fermés,

$\mathcal{N}$ est un fermé de $\mathcal{E}$.

Q2. On sait que A est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_\infty$. Autrement dit, il existe P inversible et $T \in \mathcal{T}_1$ telles que $A = PTP^{-1}$.

Donc, $M = P(I_n + \alpha T)P^{-1}$.

Les matrices M et $I_n + \alpha T$ sont semblables, donc, $\det(M) = \det(I_n + \alpha T)$.

Or, $I_n + \alpha T$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1, donc,

$$\det(M) = I_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On munit $\mathcal{E}$ de la norme infinie.

On applique ce qui précède avec $\alpha = \frac{2}{\varepsilon}$.

On a :

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2} \cdot I_n.$$

Donc, $\|A - \frac{\varepsilon}{2} \cdot M\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} \|I_n\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Donc, $\frac{\varepsilon}{2} \cdot M \in B_o(A, \varepsilon)$.

De plus, $\det\left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot M\right) = \frac{\varepsilon^n}{2^n} \neq 0$.

Donc, $\frac{\varepsilon}{2} \cdot M$ est inversible et, par conséquent, est de rang n .

Ainsi,

toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que $\mathcal{N}$ possède au moins un point intérieur.

Q3. On suppose que F admet au moins un point intérieur. Donc, il existe $M \in F$ et $r > 0$ tel que $B_o(M, r) \subset F$.

Soit $A \in \mathcal{E}$. Montrons que $A \in F$.

Cas 1 : $A = M$. Il n'y a rien à faire.

Cas 2 : $A \neq M$. On note $d = \|A - M\| > 0$.

On a :

$$A = \frac{2\|A - M\|}{r} \times \frac{r}{2\|A - M\|} (A - M) + M = \frac{2\|A - M\|}{r} \times \left(M + \frac{r}{2\|A - M\|} (A - M) \right) + \left(1 - \frac{2\|A - M\|}{r} \right) \cdot M.$$

On a :

$$\text{norme} M - \left(M + \frac{r}{2\|A - M\|} (A - M) \right) = \frac{r}{2\|A - M\|} \times \|A - M\| = \frac{r}{2} < r.$$

Donc, $M - \left(M + \frac{r}{2\|A - M\|} (A - M) \right) \in B_o(M, r) \subset F$.

De plus, $M \in F$.

Donc, comme F est un sous-espace vectoriel de E ,

$$A \in F.$$

Donc,

$$F = \mathcal{E}.$$

Par l'absurde, on suppose que N possède un point intérieur.

Comme $N \subset V$, V possède un point intérieur.

Par ce qui précède, comme V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, $V = \mathcal{E}$. Contradiction (dans la partie, on a montré que $\dim(V) = \frac{n(n-1)}{2} < n^2 = \dim(\mathcal{E})$).

Donc,

$\mathcal{N}$ ne possède pas de point intérieur.