

Objectifs du chapitre

- Définir une matrice, ses types (carrée, identité, nulle, symétrique, triangulaire).
- Maîtriser les opérations : addition, multiplication scalaire et **produit matriciel**.
- Calculer le **déterminant** d'une matrice 2×2 et 3×3 (règle de Sarrus).
- Calculer la **matrice inverse** par la méthode de Gauss-Jordan.
- Résoudre un **système linéaire** par la méthode de Gauss et par la méthode de Cramer.
- Interpréter le rang d'une matrice et les conditions d'existence des solutions.
- Calculer les **valeurs propres et vecteurs propres** d'une matrice 2×2 et 3×3 .
- Appliquer les matrices à l'analyse de réseaux électriques et aux transformations géométriques.

Situation professionnelle

Analyse d'un réseau électrique par les lois de Kirchhoff

Un électrotechnicien doit déterminer les courants circulant dans un réseau comportant trois mailles indépendantes. En appliquant les lois de Kirchhoff (conservation des courants aux nœuds, somme des tensions dans les mailles), il obtient un système de trois équations linéaires :

$$\begin{cases} R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + R_{13} I_3 = E_1 \\ R_{21} I_1 + R_{22} I_2 + R_{23} I_3 = E_2 \\ R_{31} I_1 + R_{32} I_2 + R_{33} I_3 = E_3 \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle $R\vec{I} = \vec{E}$, où R est la *matrice des résistances*. Pour trouver \vec{I} , on calcule l'inverse de la matrice R . Ce chapitre présente tous les outils nécessaires pour résoudre ce type de problème.

1. Définitions et types de matrices

Définition

Une **matrice** A de taille $m \times n$ (ou m lignes et n colonnes) est un tableau rectangulaire de réels :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'élément a_{ij} est à la ligne i et à la colonne j . On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

1.1 Types remarquables de matrices

Types de matrices

Nom	Condition	Exemple (2×2 ou 3×3)
Matrice carrée d'ordre n	$m = n$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Matrice diagonale	$a_{ij} = 0$ si $i \neq j$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Matrice identité I_n	$a_{ii} = 1, a_{ij} = 0$ ($i \neq j$)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matrice nulle O	Tous coefficients nuls	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Triangulaire supérieure	$a_{ij} = 0$ si $i > j$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
Symétrique	$a_{ij} = a_{ji}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

1.2 Matrice transposée

Définition

La **transposée** de $A = (a_{ij})_{m \times n}$ est la matrice $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ obtenue en échangeant lignes et colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés : $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Une matrice est **symétrique** si $A^T = A$.

2. Opérations matricielles

2.1 Addition et multiplication scalaire

Propriétés

Pour $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ de même taille $m \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- **Addition** : $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (composante par composante)
- **Scalaire** : $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$
- Commutativité : $A + B = B + A$
- Élément neutre : $A + O = A$

Exemple 1 — Addition et scalaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2.2 Produit matriciel

Définition

Le produit $C = AB$ est défini si le **nombre de colonnes de A** égale le **nombre de lignes de B** : si A est $m \times p$ et B est $p \times n$, alors C est $m \times n$ avec :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

C'est le *produit ligne par colonne* : le coefficient c_{ij} est le produit scalaire de la ligne i de A par la colonne j de B .

1	0	2
-1	3	1

A (2×3)

1	2
0	-1
3	0
7	2
2	-5

B (3×2)

C = A·B

Produit ligne par colonne : $c_{11} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times 3 = 7$. La ligne 1 de A (en bleu) et la colonne 1 de B (en bleu) déterminent le coefficient vert de C.

Attention

Le produit matriciel est en général **non commutatif** : $AB \neq BA$ (même quand les deux produits existent et ont la même taille). Cependant : $AI = IA = A$.

Exemple 2 — Produit 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \neq AB$$

Exemple 3 — Produit 2×3 par 3×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 + 0 + 6 & 2 + 0 + 0 \\ -1 + 0 + 3 & -2 - 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Exemple 4 — Système électrique (matrices des résistances)

Dans un circuit, les courants \vec{I} sont liés aux tensions \vec{V} par $V = RI$:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} V_1 = 10I_1 + 5I_2 \\ V_2 = 2I_1 + 8I_2 \end{cases}$$

2.3 Puissance d'une matrice carrée

Définition

Pour A carrée d'ordre n et $k \in \mathbb{N}$: $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^k = A \cdot A^{k-1}$ (produit itéré).

3. Déterminant d'une matrice carrée

3.1 Déterminant 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Exemple 5

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = 15 + 2 = 17$$

3.2 Déterminant 3×3 — Règle de Sarrus

Règle de Sarrus

Pour une matrice 3×3 , on répète les deux premières colonnes à droite et on somme les produits en diagonale :

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Diagonales descendantes (+) : aei, bfg, cdh

Diagonales montantes (-) : ceg, afh, bdi

Exemple 6 — Déterminant 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= 18 - 2 - 1 - 3 - 4 - 3 = 5 \end{aligned}$$

Exemple 7 — Développement par cofacteurs (colonne 1)

Méthode alternative : développer selon la première colonne.

$$\begin{aligned}\det(A) &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(9 - 2) - 1(3 + 1) + (-1)(2 + 3) = 14 - 4 - 5 = 5 \quad \checkmark\end{aligned}$$

3.3 Propriétés du déterminant

Propriétés

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ pour A d'ordre n
- Permuter deux lignes (ou colonnes) change le signe.
- Si une ligne est nulle ou si deux lignes sont égales : $\det(A) = 0$.
- A est **inversible** si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

4. Inverse d'une matrice

Définition

Une matrice carrée A est **inversible** si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Son inverse A^{-1} vérifie :

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n$$

4.1 Inverse d'une matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 8 — Inverse 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 15 - 2 = 13 \implies A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vérification : } AA^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = I_2 \checkmark$$

4.2 Méthode de Gauss-Jordan (inversion par pivotage)

Méthode — Gauss-Jordan

Pour inverser une matrice A d'ordre n , on écrit le tableau augmenté $[A \mid I_n]$ et on applique des *opérations élémentaires sur les lignes* pour transformer A en I_n : la partie droite devient alors A^{-1} .

Opérations autorisées :

1. Multiplier une ligne par un scalaire non nul.
2. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.
3. Échanger deux lignes.

Exemple 9 — Gauss-Jordan sur une matrice 3×3

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Étape 1 : tableau augmenté

1	2	0		1	0	0
0	1	3		0	1	0
0	0	2		0	0	1

Étape 2 : pivot en (3,3) — $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$

1	2	0		1	0	0
0	1	3		0	1	0
0	0	1		0	0	1/2

Étape 3 : éliminer colonne 3 — $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$

1	2	0		1	0	0
0	1	0		0	1	-3/2
0	0	1		0	0	1/2

Étape 4 : éliminer colonne 2 — $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

1	0	0		1	-2	3
0	1	0		0	1	-3/2
0	0	1		0	0	1/2

Donc : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

5. Systèmes linéaires

5.1 Écriture matricielle

Définition

Un système de m équations à n inconnues s'écrit :

$$AX = B \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si A est carrée et inversible, la solution unique est $X = A^{-1}B$.

5.2 Rang d'une matrice et conditions d'existence

Définition

Le **rang** d'une matrice A , noté $\text{rg}(A)$, est le nombre maximal de lignes (ou colonnes) linéairement indépendantes. Il se calcule en réduisant A par opérations élémentaires (forme échelonnée).

Théorème de Rouché-Fontené

Le système $AX = B$ (A de taille $m \times n$) admet :

- **Aucune solution** si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|B)$ (système incompatible).
- **Une solution unique** si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$.
- **Une infinité de solutions** si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) < n$ (système sous-déterminé).

5.3 Méthode de Gauss (pivot de Gauss)

Méthode — Gauss (résolution d'un système 3×3)

1. Écrire la **matrice augmentée** $[A|B]$.
2. Par opérations élémentaires sur les lignes, transformer A en forme triangulaire supérieure : éliminer les éléments sous chaque pivot.
3. **Remonter** (back-substitution) : résoudre de la dernière ligne vers la première.

Exemple 10 — Système 3×3 par Gauss

$$\text{Résoudre : } \begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Matrice augmentée :

2	1	-1	8
-3	-1	2	-11
-2	1	2	-3

$$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1 : (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 : (0, 2, 1, 5)$$

2	1	-1	8
0	1/2	1/2	1
0	2	1	5

$$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 : (0, 0, -1, 1)$$

2	1	-1	8
0	1/2	1/2	1
0	0	-1	1

Remonter :

$$L_3 : -z = 1 \implies z = -1$$

$$L_2 : \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-1) = 1 \implies y = 3$$

$$L_1 : 2x + 3 - (-1) = 8 \implies 2x = 4 \implies x = 2$$

Solution : $(x, y, z) = (2, 3, -1)$

$$\text{Vérification : } 2(2) + 3 - (-1) = 8 \checkmark, \quad -3(2) - 3 + 2(-1) = -11 \checkmark,$$

$$-2(2) + 3 + 2(-1) = -3 \checkmark$$

5.4 Méthode de Cramer

Formules de Cramer

Si A est carrée d'ordre n et $\det(A) \neq 0$, alors la solution unique de $AX = B$ est :

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}, \quad k = 1, \dots, n$$

où A_k est la matrice obtenue en remplaçant la k -ième colonne de A par B .

Exemple 11 — Cramer 2×2

Résoudre $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 6 - 1 = 5$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10, \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5$$

$$x = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{5}{5} = 1$$

Exemple 12 — Cramer 3×3 (circuit de Kirchhoff)

Un électrotechnicien analyse un circuit avec trois mailles. Les lois de Kirchhoff

$$\text{donnent : } \begin{cases} 10I_1 + 5I_2 + 0I_3 = 15 \\ 3I_1 + 8I_2 + 2I_3 = 0 \\ 0I_1 + 2I_2 + 6I_3 = 12 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 10(48 - 4) - 5(18 - 0) + 0 = 10 \cdot 44 - 5 \cdot 18 = 440 - 90 = 350$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 15 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 12 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 15(48 - 4) - 5(0 - 24) + 0 = 660 + 120 = 780$$

$$I_1 = \frac{780}{350} = \frac{78}{35} \approx 2,23 \text{ A}$$

(Le calcul de I_2 et I_3 se fait de même.)

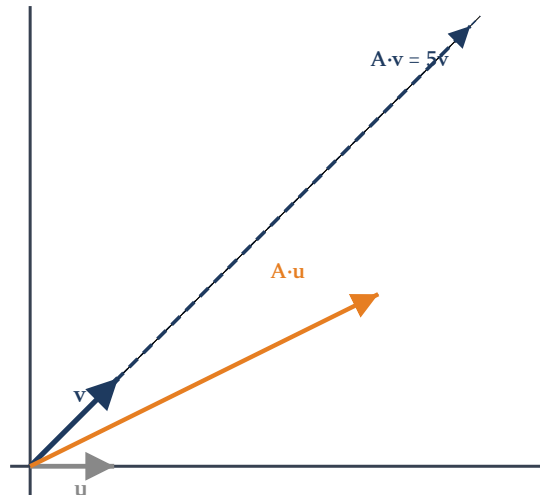
6. Valeurs propres et vecteurs propres

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur **non nul** \vec{v} (appelé **vecteur propre associé**) tel que :

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Interprétation : l'application de A à \vec{v} ne change pas sa direction, seulement son module (facteur λ).



Avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$: le vecteur propre $\vec{v} = (1; 1)$ est étiré d'un facteur $\lambda = 5$ sans tourner (même direction).
 Un vecteur quelconque $\vec{u} = (1; 0)$ voit sa direction modifiée par A .

6.1 Équation caractéristique

Méthode

Les valeurs propres sont les racines du **polynôme caractéristique** :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Pour chaque valeur propre λ_k , les vecteurs propres associés sont les solutions non nulles de $(A - \lambda_k I)\vec{v} = \vec{0}$.

Exemple 13 — Valeurs propres d'une matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = 49 - 40 = 9 \implies \lambda_1 = \frac{7 - 3}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

Vecteur propre pour $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0} \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \implies 2v_1 + v_2 = 0 \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vecteur propre pour $\lambda_2 = 5$:

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0} \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \implies -v_1 + v_2 = 0 \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 14 — Valeurs propres d'une matrice 3×3

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 1]$$

$$= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (3 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 1)$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ (simple) et $\lambda_2 = 3$ (double).

6.2 Application : diagonalisation

Définition

Une matrice A d'ordre n est **diagonalisable** si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants. Dans ce cas :

$$A = P D P^{-1}$$

où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres.

Application : calcul rapide de puissances $A^k = P D^k P^{-1}$, utile en électronique (réponse en régime libre).

7. Application : analyse de circuits (Kirchhoff)

Exemple complet — Circuit à deux mailles

Un électrotechnicien analyse le circuit suivant avec deux mailles de courant I_1 et I_2 :

- Maille 1 (loi des tensions) : $R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2) = E_1$ avec $R_1 = 4 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $E_1 = 20 \text{ V}$
- Maille 2 : $R_2 I_2 + R_3(I_2 - I_1) = E_2$ avec $R_2 = 3 \Omega$, $E_2 = 10 \text{ V}$

Après développement :

$$\begin{cases} 6I_1 - 2I_2 = 20 \\ -2I_1 + 5I_2 = 10 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 30 - 4 = 26$$

$$I_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 20 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}}{26} = \frac{100 + 20}{26} = \frac{120}{26} \approx 4,62 \text{ A}$$

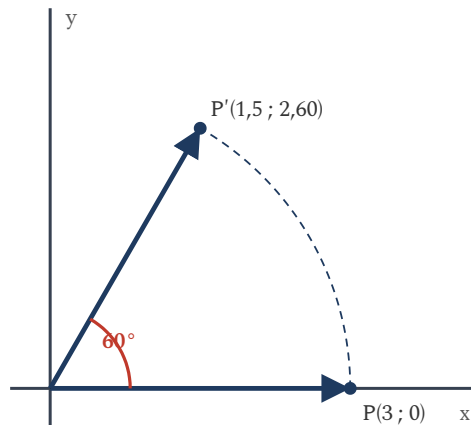
$$I_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}}{26} = \frac{60 + 40}{26} = \frac{100}{26} \approx 3,85 \text{ A}$$

Vérification : $6(120/26) - 2(100/26) = (720 - 200)/26 = 520/26 = 20 \checkmark$

8. Application : transformations géométriques

Définition

De nombreuses transformations géométriques du plan ou de l'espace s'expriment comme des multiplications matricielles : $\vec{v}' = M \vec{v}$.



Rotation de 60° autour de l'origine : $P(3; 0)$ devient $P'(1,5; 2,60)$. La distance à l'origine (le rayon) est conservée : $\|OP'\| = \|OP\| = 3$.

Matrices de transformation usuelles

Transformation	Matrice
Rotation d'angle θ dans le plan	$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
Mise à l'échelle (s_x, s_y)	$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$
Symétrie par rapport à l'axe x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Rotation 3D autour de z d'angle θ	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 15 — Rotation d'un point

Un point $P = (3, 0)$ est tourné de 60° autour de l'origine. Trouver ses nouvelles coordonnées.

$$R_{60^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P' = R_{60^\circ} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,60 \end{pmatrix}$$

Vérification (norme conservée) :

$$\|P'\| = \sqrt{(3/2)^2 + (3\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{9/4 + 27/4} = \sqrt{9} = 3 = \|P\| \checkmark$$

Exemple 16 — Composée de transformations

Un technicien en CFAO applique successivement une mise à l'échelle de facteur 2 selon x , puis une rotation de 90° à un vecteur $\vec{v} = (1, 0)$.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = R_{90^\circ} \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur initial $(1, 0)$ devient $(0, 2)$ après la composée. *Attention : l'ordre des matrices importe !*

📄 À retenir — Matrices et systèmes linéaires

Produit matriciel : $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, en général $AB \neq BA$

Det 2×2 : $ad - bc$

Sarrus (3×3) : somme diag. desc. - somme diag. mont.

Inverse 2×2 : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Gauss-Jordan : $[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$

Cramer : $x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$ si $\det(A) \neq 0$

Gauss : triangulation + remonter

Valeurs propres : $\det(A - \lambda I) = 0$

Vecteurs propres : $(A - \lambda_k I)\vec{v} = \vec{0}$

Rang : nombre de lignes non nulles après échelonnement

$AX = B$ a une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$

9. Exercices d'application

Exercice 1 — Produit matriciel et déterminant

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calculer AB et BA . Sont-ils égaux ?
- Calculer $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(AB)$. Vérifier $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Calculer A^{-1} .

Exercice 2 — Système linéaire par Gauss

Résoudre par la méthode de Gauss :
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 — Valeurs propres et vecteurs propres

Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 — Transformation géométrique

Un ingénieur applique successivement une rotation de 45° puis une mise à l'échelle de facteur 3 sur l'axe x et 2 sur l'axe y au vecteur $\vec{v} = (1, 1)$.

- Calculer la matrice résultante $M = S \cdot R_{45^\circ}$.
- Calculer $M\vec{v}$ et sa norme.

Matrices et systèmes linéaires

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Exercice 1 — Opérations matricielles (3 pts)

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A + B$. (1 pt)
- Calculer le produit AB . (2 pts)

Exercice 2 — Déterminants (4 pts)

- Calculer $\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. (1,5 pt)
- Calculer, par la règle de Sarrus, $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (2,5 pts)

Exercice 3 — Matrice inverse (4 pts)

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

- Calculer $\det(M)$ et justifier que M est inversible. (1,5 pt)
- Donner M^{-1} . (2,5 pts)

Exercice 4 — Système linéaire 2×2 par Cramer (4 pts)

Résoudre par la méthode de Cramer le système :
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$$

Exercice 5 — Valeurs propres (5 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Écrire l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$ et déterminer les valeurs propres. (3 pts)
- Déterminer un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre. (2 pts)

