
I	Espérance	4
I.1	Définition	4
I.2	Espérance des lois usuelles	6
I.3	Formule de transfert	8
I.4	Propriétés de l'espérance	9
I.5	Espérance et variables aléatoires indépendantes	11
II	Variance, écart-type et covariance	13
II.1	Variance et écart-type	13
II.2	Variance des lois usuelles	15
II.3	Covariance et coefficient de corrélation	17
II.4	Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres	19
III	Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$	23
III.1	Généralités	23
III.2	Propriétés des fonctions génératrices	24
III.3	Séries génératrices des lois usuelles	24

Extrait du programme

C - Espérance et variance

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$.

Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X .

Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.

Formule de transfert :

$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

Linéarité de l'espérance.

Si $|X| \leq Y$ et $\mathbb{E}(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.

Positivité, croissance de l'espérance.

Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.

Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

On adopte la convention $xP(X=x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X=+\infty) = 0$.

X est d'espérance finie si la famille $(xP(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .
Variable centrée.

On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n -uplets de variables aléatoires.

Extension au cas de n variables aléatoires.

b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et :

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

Cas d'égalité.

Variance, écart type.

Notations $V(X)$, $\sigma(X)$.

Variable réduite.

Relation $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Relation $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Variance d'une variable géométrique, de Poisson.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X .

La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

La série entière définissant G_X est de rayon ≥ 1 et converge normalement sur $[-1, 1]$. Continuité de G_X .

Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.

Utilisation de G_X pour calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

CONTENUS

Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres :

si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = \mathbb{E}(X_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

Loi faible des grands nombres :

si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,
où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = \mathbb{E}(X_1)$.

Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

I. Espérance

Dans toute cette partie, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X et Y désignent des variables aléatoires discrètes.

I.1. Définition



Définition 18.1 – Espérance d'une variable aléatoire discrète

- **Cas 1** : X à valeurs dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

L'**espérance** de X est le réel noté $\mathbb{E}(X)$ et défini par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x),$$

où $x \mathbb{P}(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

- **Cas 2** : X à valeurs réelles ou complexes.

On dit que X est d'**espérance finie** lorsque la famille $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas l'**espérance** de X est la somme de cette famille :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x),$$

L'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.

Remarque 18.1

- L'espérance d'une variable aléatoire est une constante !
- On dit que l'espérance est un **indicateur de position**. Plus la probabilité que X prenne une valeur x est proche de 1, plus x a d'importance dans le calcul de $\mathbb{E}(X)$.
- L'**espérance de X ne dépend que de sa loi**. Deux variables aléatoires de même loi ont la même espérance.
- On dit que la variable aléatoire X est **centrée** lorsque son espérance est nulle.
- On admet que la définition de $\mathbb{E}(X)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération des éléments de $X(\Omega)$.
- Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, la famille $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est composée d'un nombre fini de termes, donc est sommable. Donc,

Lorsque X prend un nombre fini de valeurs, X possède une espérance.

- On sait qu'une famille $(a_n)_{n \geq n_0}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$, est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} a_n$ converge absolument.

Quand $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, X possède une espérance si, et seulement si, la série $\sum n \times \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument.

Exemple 18.1

On considère la situation suivante : n urnes numérotées de 1 et n . L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k . Les boules sont supposées indiscernables au toucher.

On choisit au hasard une urne et on tire une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.

Dans le chapitre PROBABILITÉS, VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES ET LOIS USUELLES, on a déterminé la loi de

Y : Y est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}.$$

Déterminons l'espérance de Y . Cette variable aléatoire prend un nombre fini de valeurs donc possède Y est d'espérance finie et on a :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^n j \times \sum_{i=j}^n \frac{1}{n \times i} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n \frac{j}{n \times i} \right).$$

On échange les symboles sommes :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{n \times i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{j}{n \times i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n \times i} \sum_{j=1}^i j \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \times i} \times \frac{i \times (i+1)}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i+1).$$

Or, $\sum_{i=1}^n (i+1) = \frac{n \times (n+1)}{2} + n$. Donc,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2n} \times \left(\frac{n \times (n+1)}{2} + n \right) = \frac{n+3}{4}.$$

💡 Exemple 18.2 – Espérance d'une variable aléatoire certaine

Soit X une variable aléatoire constance égale à a , alors :

$$\mathbb{E}(X) = a.$$



Proposition 18.1

Soit A un événement. Alors,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A).$$

Démonstration

La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ (ensemble fini), donc $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$ existe et

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = 0 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) + 1 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A).$$

□



Théorème 18.1

On suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La variable aléatoire X est d'espérance finie si, et seulement si, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge.

Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a : $\{X = n\} = \{X \geq n\} \setminus \{X \geq n+1\}$ et $\{X \geq n+1\} \subset \{X \geq n\}$. Donc,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1).$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n=0}^N n \times \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^N n \times (\mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1)) = \sum_{n=0}^N n \times \mathbb{P}(X \geq n) - \sum_{n=0}^N n \times \mathbb{P}(X \geq n+1) = \sum_{n=0}^N n \times \mathbb{P}(X \geq n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1) \times \mathbb{P}(X \geq n).$$

D'où, $\sum_{n=0}^N n \times \mathbb{P}(X = n) = -N \times \mathbb{P}(X \geq N+1) + \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geq n)$.

► On suppose que $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge.

On remarque que les termes de la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ sont positifs.

De l'égalité précédente, il vient : pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N n \times \mathbb{P}(X = n) \leq \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geq n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum n \times \mathbb{P}(X = n)$ est bornée, donc $\sum n \times \mathbb{P}(X = n)$ converge (absolument). On en déduit que la famille $(n \times \mathbb{P}(X = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

Donc, X est d'espérance finie.

► On suppose que X est d'espérance finie.

On a alors : $0 \leq N \times \mathbb{P}(X \geq N+1) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} N \times \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} k \times \mathbb{P}(X = k) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ comme reste d'une série convergente.

Par encadrement, $N \times \mathbb{P}(X \geq N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

D'où, $\sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geq n) = N \times \mathbb{P}(X \geq N+1) + \sum_{n=0}^N n \times \mathbb{P}(X = n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge et $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$. □

I.2. Espérance des lois usuelles

Théorème 18.2

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = p.$$

Démonstration

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0, 1\}$, un ensemble fini. Donc, X est d'espérance finie.

Par définition,

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

□

Théorème 18.3

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = n \times p.$$

Démonstration

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$, ensemble fini. Donc X est d'espérance finie.

Donc,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \times \binom{n-1}{k-1} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} n \times \binom{n-1}{k} \times p^{k+1} \times (1-p)^{n-1-k}.$$

D'où, par la formule du binôme de Newton, $\mathbb{E}(X) = n \times p \times (1-p+p)^{n-1} = n \times p$. □

Remarque 18.2 – Autre méthode pour calculer l'espérance de $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

On sait que $Y = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Donc, comme l'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)$.

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \sim \mathcal{B}(p)$. Donc, $\mathbb{E}(X_k) = p$.

D'où, $\mathbb{E}(X) = n \times p$.

Théorème 18.4

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

Démonstration

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que X possède une espérance finie.

Pour cela, on étudie la sommabilité de la famille $(n \times \mathbb{P}(X = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Autrement dit, dans ce cas, la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} n \times \mathbb{P}(X = n)$.

De plus, la série dérivée $\sum n \times x^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\sum x^n$ qui est égal à 1. On sait aussi que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Donc, par théorème de dérivation terme à terme d'une somme de série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, on a : pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times x^{n-1}.$$

En particulier, avec $x = 1-p \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} n \times p \times (1-p)^{n-1}$ converge absolument (car $|x| < 1$).

Donc, X possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times p \times (1-p)^{n-1} = p \times \sum_{n=1}^{+\infty} n \times (1-p)^{n-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

□

Théorème 18.5

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda.$$

Démonstration

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrons que X possède une espérance finie.

Pour cela, on étudie la sommabilité de la famille $(n \times \mathbb{P}(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$. Autrement dit, dans ce cas, la convergence absolue de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n \times \mathbb{P}(X = n)$.

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$n \times \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \times \lambda \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La série exponentielle $\sum e^{-\lambda} \times \lambda \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ converge absolument et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \lambda \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \times \lambda \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda$$

Donc, la série $\sum n \times \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument.

On en déduit que X est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \mathbb{P}(X = n) = \lambda.$$

□

I.3. Formule de transfert

Théorème 18.6 – Formule de transfert

On considère f une application à valeurs réelles ou complexes définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$. La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X=x).$$

Démonstration

Admis

Remarque 18.3 – Important

L'espérance de $f(X)$ se déduit de la loi de X . Si on connaît la loi de X , il est donc inutile de déterminer la loi de $f(X)$ pour calculer $\mathbb{E}(f(X))$.

D'autre part si X et Y sont deux variables aléatoires de même loi, alors $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(Y=x)$. Donc, sous réserve de pouvoir appliquer la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X=x) = \sum_{x \in Y(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(Y=x) = \mathbb{E}(f(Y)).$$

Ainsi,

Si X et Y ont la même loi, alors (sous réserve d'existence des espérances) $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$.

Exemple 18.3 – Suite de l'exemple 18.1 page 4

Déterminons l'espérance de Y^2 . Par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{j=1}^n j^2 \times \mathbb{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^n \left(j^2 \times \sum_{i=j}^n \frac{1}{n \times i} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n \frac{j^2}{n \times i} \right).$$

On échange les signes sommes

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j^2}{n \times i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{j^2}{n \times i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n \times i} \sum_{j=1}^i j^2 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \times i} \times \frac{i \times (i+1) \times (2i+1)}{6} = \frac{1}{6n} \sum_{i=1}^n (2i^2 + 3i + 1).$$

Or, $\sum_{i=1}^n (2i^2 + 3i + 1) = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{3} + \frac{3n \times (n+1)}{2} + n$. Donc, après simplifications,

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{4n^2 + 15n + 17}{36}.$$

Remarque 18.4 – La formule de transfert s'applique aux couples et aux n -uplets de variables aléatoires

► Plus précisément, si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et f est une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ telle que $f(X, Y)$ est d'espérance finie, alors

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x, y) \times \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} f(x, y) \times \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

► De plus, si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n -uplet de variables aléatoires discrètes et f est une fonction définie sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ telle que $f(X_1, \dots, X_n)$ est d'espérance finie, alors

$$\mathbb{E}(f(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \dots \sum_{x_n \in X_n(\Omega)} f(x_1, \dots, x_n) \times \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n).$$

L'ordre des sommes n'a pas d'importance.

Théorème 18.7 – Inégalité triangulaire

On suppose que X est d'espérance finie.

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

Démonstration

Comme X est d'espérance finie, la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, ce qui signifie par définition que la famille, $(|x|\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)} = (|x|\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Par la formule de transfert appliquée avec $f : x \mapsto |x|$,

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \times \mathbb{P}(X = x).$$

De plus, par inégalité triangulaire,

$$|\mathbb{E}(X)| = \left| \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) \right| \leq \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \times \mathbb{P}(X = x).$$

Donc,

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

□

I.4. Propriétés de l'espérance

Théorème 18.8 – Linéarité de l'espérance

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Si X et Y sont d'espérance finie, alors $\lambda.X + Y$ est d'espérance finie et on a :

$$\mathbb{E}(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda \times \mathbb{E}(X) + \mu \times \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Comme X et Y sont d'espérance finie, les familles $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(y\mathbb{P}(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ sont sommables.

Par linéarité et formule de Fubini pour les familles à termes positifs,

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |\lambda \cdot x + \mu \cdot y| \mathbb{P}(X = x, Y = y) &= |\lambda| \cdot \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x, Y = y) + |\mu| \cdot \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |y| \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= |\lambda| \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} \left(|x| \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right) + |\mu| \cdot \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(|y| \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right). \end{aligned}$$

Or, $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(\mathbb{P}(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ sont des systèmes complets d'événements.

Par la formule des probabilités totales,

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |\lambda \cdot x + \mu \cdot y| \mathbb{P}(X = x, Y = y) = |\lambda| \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x) + |\mu| \sum_{y \in Y(\Omega)} |y| \mathbb{P}(Y = y) < +\infty.$$

Par opération sur les familles sommables, $((\lambda x + \mu y) \mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est une famille sommable.

Donc, $f(X, Y) = \lambda \cdot X + \mu \cdot Y$ est d'espérance finie. Par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (\lambda \cdot x + \mu \cdot y) \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Par linéarité et formule de Fubini,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) &= \lambda \cdot \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x, Y = y) + \mu \cdot \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \lambda \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right) + \mu \cdot \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(y \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right). \end{aligned}$$

Or, $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(\mathbb{P}(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ sont des systèmes complets d'événements.

Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{E}(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) = \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) + \mu \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}(Y = y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

□

Remarque 18.5

Soit X une variable aléatoire réelle. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée. En effet, l'espérance d'une constante étant égale à la constante :

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0.$$

Théorème 18.9 – Positivité et croissance de l'espérance

On considère X et Y deux variables aléatoires **réelles** discrètes.

- **Positivité.** Si X est presque sûrement positive (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
En particulier, si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- Si $X \geq 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. On dit que l'événement $(X = 0)$ est presque sûr (ou que X est presque sûrement nulle).
- **Croissance.** Si X et Y sont d'espérance finie et $X \leq Y$ presque sûrement (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$), alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
En particulier, si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration

- On sait que $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$ (la somme pouvant être égale à $+\infty$).
On a $\mathbb{P}(X < 0) = 0$. De plus, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $x < 0$, $(X = x) \subset (X < 0)$. D'où, $0 \leq \mathbb{P}(X = x) \leq \mathbb{P}(X < 0) = 0$.
Donc, $\mathbb{P}(X = x) = 0$. D'où, $\mathbb{E}(X)$ est une somme de termes positifs, donc $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- On sait que $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = 0$ et $x \mathbb{P}(X = x) \geq 0$. Donc, pour tout $x \in X(\Omega)$, $x \mathbb{P}(X = x) = 0$.
D'où, pour tout $x \in X(\Omega)$ avec $x \neq 0$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Or, $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, donc,

$$1 = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = 0).$$

► On a $\mathbb{P}(Y - X \geq 0) = 0$.

Donc, par le premier cas $\mathbb{E}(Y - X) \geq 0$. De plus, X et Y sont d'espérance finie, donc $Y - X$ aussi (linéarité de l'espérance), donc par le premier cas, $\mathbb{E}(Y - X) \geq 0$. On conclut alors en utilisant la linéarité de l'espérance.

□

Théorème 18.10

Si $|X| \leq Y$ et $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ (c'est-à-dire, Y est d'espérance finie), alors X est d'espérance finie.

Démonstration

Admis.

□

I.5. Espérance et variables aléatoires indépendantes

Théorème 18.11

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, alors $X \times Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Vérifions que la famille $(xy\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable.

Par le théorème de Fubini (appliqué au cas d'une famille de réels positifs) :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)| = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} |x||y|\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Comme X et Y sont indépendantes,

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)| = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} |x||y|\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) = \left(\sum_{x \in X(\Omega)} |x|\mathbb{P}(X = x) \right) \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} |y|\mathbb{P}(Y = y) \right).$$

Comme X et Y sont d'espérances finies, les familles $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(y\mathbb{P}(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ sont sommables.

Donc, $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)| < +\infty$ et la famille $(xy\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable.

Donc, $f(X, Y) = XY$ est d'espérance finie et, par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(f(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y) \times \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

De plus, par indépendance,

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} x \times y \times \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y) = \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) \right) \times \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) \right) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

□

⚠ Attention – La réciproque du théorème précédent est fausse

Soient X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Z = X \times Y$.

► Par indépendance de X et Y , on a :

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}.$$

De plus,

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 1).$$

On en déduit que les variables aléatoires X et Z ne sont pas indépendantes.

► D'autre part, comme X et Y sont indépendantes, X^2 et Y sont indépendantes. Donc,

$$\mathbb{E}(X \times Z) = \mathbb{E}(X^2 \times Y) = \mathbb{E}(X^2) \times \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

De plus,

$$\mathbb{E}(Y) = (-1) \times \mathbb{P}(Y = -1) + 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) = 0.$$

Donc, $\mathbb{E}(X \times Z) = 0 = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Z)$.

🔍 Remarque 18.7 – Généralisation

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(X_1 \times \dots \times X_n) = \mathbb{E}(X_1) \times \dots \times \mathbb{E}(X_n).$$

Corollaire 18.1

Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires discrètes, où E et F sont deux ensembles quelconques. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbb{E}(f(X) \times g(Y)) = \mathbb{E}(f(X)) \times \mathbb{E}(g(Y)).$$

Démonstration

Comme X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ aussi et il suffit d'appliquer le théorème précédent. □

🔍 Remarque 18.8 – Généralisation

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour toutes fonction $f_1, \dots, f_n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{E}(f(X_1) \times \dots \times f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X_1)) \times \dots \times \mathbb{E}(f(X_n)).$$

II. Variance, écart-type et covariance

Dans toute cette partie, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X et Y désignent des variables aléatoires **réelles** discrètes.

II.1. Variance et écart-type

Théorème 18.12

Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Démonstration

On a $(|X| - 1)^2 \geq 0$, donc en développant, il vient $|X| \leq \frac{1}{2} \times (X^2 + 1)$.

Or, la constante 1 est d'espérance finie et, par hypothèse X^2 est d'espérance finie.

Par linéarité $\frac{1}{2} \times (X^2 + 1)$ est d'espérance finie.

Par le théorème 18.10 page 11, X est d'espérance finie.

□

Remarque 18.9

On suppose que X^2 est d'espérance finie (donc X l'est aussi).

On a : $(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X) \times X + (\mathbb{E}(X))^2$. De plus, les constantes sont d'espérances finies. Donc, par linéarité, $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est d'espérance finie. On peut alors donner la définition suivante.

Définition 18.2 – Variance

Lorsque X^2 est d'espérance finie, on dit que X possède une **variance** (ou un **moment d'ordre 2**). Dans ce cas, la variance de X est le réel noté $V(X)$ et défini par :

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

L'**écart-type** de X est le réel défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque 18.10 – Démonstration de l'égalité de la définition 18.2 (Théorème de Huygens)

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X) \times X + (\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Remarque 18.11

- ▶ Par positivité de l'espérance, la variance d'une variable aléatoire réelle est positive.
- ▶ La variance et l'écart-type mesurent l'écart d'une variable aléatoire à son espérance. Plus la variable aléatoire est susceptible de prendre des valeurs éloignées de son espérance, plus sa variance et son écart-type sont grandes.
On dit que ce sont des **indicateurs de dispersions**.
- ▶ Si X est une variable aléatoire constante, alors la variance de X existe et est nulle.
- ▶ **La variance de X ne dépend que de sa loi.** Deux variables aléatoires de même loi ont la même variance.
- ▶ Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, la famille $(x^2 \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est composée d'un nombre fini de termes, donc

est sommable. Donc,

Lorsque X prend un nombre fini de valeurs, X possède une variance.

► On sait qu'une famille $(a_n)_{n \geq n_0}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$, est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} a_n$ converge absolument.

Quand $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, X possède une variance si, et seulement si, la série $\sum n^2 \times \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument.



Proposition 18.2

On suppose que X possède un moment d'ordre 2 (c'est-à-dire X possède une variance).

Alors,

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}(X = x) - \left(\underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)}_{=\mathbb{E}(X)} \right)^2.$$

Démonstration

Conséquence du théorème de transfert. □



Théorème 18.13

On suppose que X possède une variance. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$V(\lambda.X + \mu) = \lambda^2 \times V(X).$$

Démonstration

On a : $(\lambda.X + \mu)^2 = \lambda^2.X^2 + 2\lambda \times \mu.X + \mu^2$.

Par linéarité de l'espérance (X^2 est d'espérance finie, donc X aussi),

$$\mathbb{E}((\lambda.X + \mu)^2) = \lambda^2 \times \mathbb{E}(X^2) + 2\lambda \times \mu \times \mathbb{E}(X) + \mu^2.$$

De même, on a :

$$(\mathbb{E}(\lambda.X + \mu))^2 = (\lambda \times \mathbb{E}(X) + \mu)^2 = \lambda^2 \times (\mathbb{E}(X))^2 + 2\lambda \times \mu \times \mathbb{E}(X) + \mu^2.$$

D'où, par différence, on a $V(\lambda.X + \mu) = \lambda^2 \times \mathbb{E}(X^2) - \lambda^2 \times (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 \times V(X)$. □

Remarque 18.12 – Variable aléatoire centrée réduite

1. Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle et de variance 1 est dite **centrée réduite**.
2. Si X est une variable aléatoire réelle de variance non nulle, alors la variable aléatoire $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

En effet,

$$\mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))}{\sigma(X)} = \frac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} = 0 \quad \text{et} \quad V\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{V(X - \mathbb{E}(X))}{(\sigma(X))^2} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1.$$

II.2. Variance des lois usuelles

Théorème 18.14

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$, alors :

$$V(X) = p \times (1 - p).$$

Démonstration

La variable aléatoire X^2 est à valeurs dans $\{0, 1\}$, un ensemble fini. Donc, X^2 est d'espérance finie et X possède une variance. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

D'où, $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p \times (1 - p)$. □

Théorème 18.15

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, alors :

$$V(X) = n \times p \times (1 - p).$$

Démonstration

La variable aléatoire X^2 est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$, ensemble fini. Donc X^2 est d'espérance finie et X possède une variance. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Or, lors du calcul de l'espérance de X , on a montré que $\sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = n \times p$.

De plus,

$$\sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n n \times (n-1) \times \binom{n-2}{k-2} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Par glissement d'indice, puis formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = n \times (n-1) \times \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \times p^{k+2} \times (1-p)^{n-2-k} = n \times (n-1) \times p^2.$$

D'où, $\mathbb{E}(X^2) = n \times (n-1) \times p^2 + n \times p$.

D'où, $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = n \times (n-1) \times p^2 + n \times p - (n \times p)^2 = n \times p \times (1 - p)$. □

Remarque 18.13 – Autre méthode pour calculer la variance de $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

On sait que $Y = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Donc, comme la variance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi, $V(X) = V(Y)$.

Par indépendance des variables aléatoires, $V(Y) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \sim \mathcal{B}(p)$. Donc, $V(X_k) = p \times (1 - p)$.

D'où, $V(X) = n \times p \times (1 - p)$.

Théorème 18.16

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$, alors :

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que X^2 possède une espérance finie.

Pour cela, on étudie la sommabilité de la famille $\left(n^2 \times \mathbb{P}(X = n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Autrement dit, dans ce cas, la convergence absolue de la série

$$\sum_{n \geq 1} n^2 \times \mathbb{P}(X = n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^2 \times \mathbb{P}(X = n) = n \times (n-1) \times \mathbb{P}(X = n) + n \times \mathbb{P}(X = n) = n \times (n-1) \times p \times (1-p)^{n-1} + n \times p \times (1-p)^{n-1}.$$

De plus, les séries dérivées $\sum n \times (n-1) \times x^{n-2}$ et $\sum n \times x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence que $\sum x^n$ qui est égal à 1. On sait aussi que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

Donc, par théorème de dérivation terme à terme d'une somme de série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, on a : pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times x^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n \times (n-1) \times x^{n-2}.$$

En particulier, avec $x = 1-p \in]-1, 1[$, les séries $\sum_{n \geq 1} n \times p \times (1-p)^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n \times (n-1) \times p \times (1-p)^{n-2}$ convergent absolument (car $|x| < 1$).

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 2} n^2 \times p \times (1-p)^{n-1}$ converge absolument comme somme de séries absolument convergentes.

Donc, X possède un moment d'ordre 2 et (formule de transfert) :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \times p \times (1-p)^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} n \times (n-1) \times p \times (1-p)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \times p \times (1-p)^{n-1} = \frac{2p \times (1-p)}{(1-(1-p))^3} + \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Donc,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}.$$

□

🔧 Théorème 18.17

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors :

$$V(X) = \lambda.$$

Démonstration

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrons que X^2 possède une espérance finie.

Pour cela, on étudie la sommabilité de la famille $\left(n^2 \times \mathbb{P}(X = n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Autrement dit, dans ce cas, la convergence absolue de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 \times \mathbb{P}(X = n).$$

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$n^2 \times \mathbb{P}(X = n) = n \times (n-1) \times \mathbb{P}(X = n) + n \times \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \times \lambda^2 \times \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + e^{-\lambda} \times \lambda \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Les séries exponentielles $\sum e^{-\lambda} \times \lambda \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ et $\sum e^{-\lambda} \times \lambda^2 \times \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}$ convergent absolument et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \lambda \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \times \lambda \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \lambda^2 \times \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \lambda^2 \times \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2$$

Donc, la série $\sum n^2 \times \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument comme somme de séries absolument convergentes.

On en déduit que X possède un moment d'ordre 2 et que :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \times \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \times (n-1) \times \mathbb{P}(X = n) + \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \times (n-1) \times \mathbb{P}(X = n) + \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \mathbb{P}(X = n) = \lambda^2 + \lambda.$$

Donc,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

II.3. Covariance et coefficient de corrélation

Théorème 18.18 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

On suppose que X et Y possèdent des moments d'ordre 2.
Alors la variable aléatoire $X \times Y$ est d'espérance finie et,

$$(\mathbb{E}(X \times Y))^2 \leq \mathbb{E}(X^2) \times \mathbb{E}(Y^2).$$

Démonstration

A faire

Définition 18.3 – Covariance, Coefficient de corrélation

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.

► La **covariance** de X et Y est le réel :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \times (Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(X \times Y) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

► Lorsque $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$, la **coefficient de corrélation** de X et Y est le réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)}.$$

Remarque 18.14

- La seconde égalité dans la définition de covariance découle de la linéarité de l'espérance.
- On a :

$$V(X) = \text{Cov}(X, X).$$

Proposition 18.3

On note $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2
L'application $\text{Cov} : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ est : bilinéaire, symétrique et positive.
 $(X, Y) \mapsto \text{Cov}(X, Y)$

Démonstration

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(X, Y, Z) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}((\lambda X + Y) \times Z) = \mathbb{E}(\lambda X \times Z + Y \times Z) = \lambda \times \mathbb{E}(X \times Z) + \mathbb{E}(Y \times Z).$$

De même, on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) \times \mathbb{E}(Z) = (\lambda \times \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)) \times \mathbb{E}(Z) = \lambda \times \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(Y) \times \mathbb{E}(Z).$$

Par différence de ces deux égalités, on a : $\text{Cov}((\lambda X + Y), Z) = \lambda \times \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$.

Donc, Cov est linéaire à gauche.

De plus, la symétrie est claire (car $X \times Y = Y \times X$).

Donc, Cov est bilinéaire.

De plus, pour tout $\text{Cov}(X, X) = V(X) \geq 0$.

□

Théorème 18.19 – Covariance et indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant des moments d'ordre 2.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration

L'indépendance de X et Y donne : $\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.
Donc, $\text{Cov}(X, Y) = 0$. □

Remarque 18.15 – Prudence!

La réciproque est fausse.

Théorème 18.20

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant des moments d'ordre 2.
Alors,

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}.$$

Lorsque $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$, on a $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.

Démonstration

Les variables aléatoires X et Y possèdent un moment d'ordre 2, donc $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ aussi.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$(\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \times (Y - \mathbb{E}(Y))])^2 \leq \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \times \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))^2).$$

En prenant la racine carrée de l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité voulue. □

Théorème 18.21 – Variance d'une somme de variables aléatoires

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes admettant des moments d'ordre 2.

► La variable $\sum_{k=1}^n X_k$ possède un moment d'ordre 2 et

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

► Lorsque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont de plus supposées deux à deux indépendantes, on a :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k).$$

Démonstration

1. On a : $V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right)$. Par bilinéarité de Cov. on a :

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\text{Cov}(X_k, X_k)}_{=V(X_k)} + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} \text{Cov}(X_i, X_j) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i > j}} \text{Cov}(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Par symétrie de la covariance, on a $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i > j}} \text{Cov}(X_i, X_j)$. D'où, $V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$.

2. Deux variables aléatoires indépendantes sont de covariance nulle, donc $V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$. $\square$

II.4. Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres

Théorème 18.22 – Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète à **valeurs positives** d'espérance finie.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

Soit $a > 0$.

On a : pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq a \cdot \mathbb{1}_{\{X \geq a\}}(\omega)$. En effet :

- si $\omega \in \{X \geq a\}$, alors $\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}(\omega) = 1$ et $X(\omega) \geq a$. D'où, $X(\omega) \geq a \cdot \mathbb{1}_{\{X \geq a\}}(\omega)$.
- si $\omega \notin \{X \geq a\}$, alors $\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}(\omega) = 0$ et $X(\omega) \geq 0$. D'où, $X(\omega) \geq \underbrace{a \cdot \mathbb{1}_{\{X \geq a\}}(\omega)}_{=0}$.

De plus, $\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}) = \mathbb{P}(X \geq a)$.

D'où, par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(a \cdot \mathbb{1}_{\{X \geq a\}})$, puis par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(a \cdot \mathbb{1}_{\{X \geq a\}}) = a \times \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}) = a \times \mathbb{P}(X \geq a)$.

Comme $a > 0$, on a : $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$. $\square$

Exemple 18.4

On tire une personne au hasard dans la population et on note X son salaire. La variable aléatoire X est positive et son espérance est alors le salaire moyen de la population.

Par l'inégalité de Markov appliquée avec $a = \mathbb{E}(X)$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq 5 \mathbb{E}(X)) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{5 \mathbb{E}(X)} \leq \frac{1}{5}.$$

Autrement dit, la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un salaire supérieur à 5 fois le salaire moyen est inférieure à $\frac{1}{5}$.

Théorème 18.23 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.

On a : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2)$.

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$. Comme X possède un moment d'ordre 2, Y est

d'espérance finie. Donc,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2}.$$

Or, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = V(X)$.

□

Remarque 18.16

Si a et ε sont « proches de 0 », alors $\frac{\mathbb{E}(X)}{a}$ et $\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ sont supérieurs à 1. Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev perdent leur intérêt.

Exemple 18.5

On considère une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir pile est p .

Pour déterminer une approximation de pile, on lance un grand nombre de fois la pièce et on calcule la fréquence de piles obtenus.

On cherche à déterminer le nombre de fois où la pièce doit être lancée pour obtenir une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 0,95.

On note n le nombre de lancers effectués (supposés indépendants) et S_n le nombre de piles obtenus. On cherche n tel que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq 10^{-2}\right) \geq 0,95.$$

Or, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq 10^{-2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > 10^{-2}\right)$. Donc, on cherche n tel que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > 10^{-2}\right) \leq 0,05.$$

La variable aléatoire S_n compte le nombre de succès (obtenir pile ici) lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p .

Donc, S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On sait alors que

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} = \frac{n \times p}{n} = p \quad \text{et} \quad V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{n \times p \times (1-p)}{n^2} = \frac{p \times (1-p)}{n}.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > 10^{-2}\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2}\right) \leq \frac{\frac{p \times (1-p)}{n}}{10^{-4}} \leq \frac{10^4 \times p \times (1-p)}{n}.$$

Or, une étude de fonction montre que, pour tout $x \in [0, 1]$, $x \times (1-x) \leq \frac{1}{4}$.

D'où,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > 10^{-2}\right) \leq \frac{2500}{n}.$$

Il suffit de choisir n tel que $\frac{2500}{n} \leq 0,05$, autrement dit, $n \geq 50\,000$. Donc, on peut choisir $n = 50\,000$.

Théorème 18.24 – Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2.

On note $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = V(X_1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n \times \varepsilon^2}.$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettent des moments d'ordre 2, donc sont d'espérance finie.

De plus, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \times (\mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n))$ et par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, on a :

$$V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \times (V(X_1) + \dots + V(X_n))$$

Or, la variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ont la même loi, d'où $\mathbb{E}(X_1) = \dots = \mathbb{E}(X_n) = m$ et $V(X_1) = \dots = V(X_n) = \sigma^2$.

D'où, $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = m$ et $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

D'où, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient : $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n \times \varepsilon^2}$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, il vient par encadrement : $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$

Remarque 18.17

Sous les hypothèses de la loi faible des grands nombres :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m = \mathbb{E}(X_n)$ et $\sigma^2 = V(X_n)$.
- La variable aléatoire $\overline{X}_n$ est appelée **moyenne empirique**

Remarque 18.18 – Approche empirique de l'espérance

On considère une expérience aléatoire et X une variable aléatoire associée à cette expérience. On s'intéresse à l'espérance de X :

Comment obtenir une valeur approchée de $m = \mathbb{E}(X)$ sans connaître la loi de X ?

Par la loi faible des grands nombres, pour n assez, la probabilité que $\overline{X}_n$ s'éloigne de $m = \mathbb{E}(X)$ à une distance supérieure à ε est faible : on dit que la suite $(\overline{X}_n)_n$ converge vers m en probabilité (cette notion n'est pas au programme, c'est pour la culture).

Remarque 18.19 – Conséquence : justification de l'approche fréquentiste de la notion de probabilité

Pour introduire la notion de probabilité, on s'est posé la question suivante :

Comment mesurer la probabilité de voir se réaliser un événement A lors d'une expérience aléatoire ?

Pour estimer cette « probabilité », on a émis l'idée de répéter un grand nombre n de fois l'expérience aléatoire et de compter le nombre n_A de fois où l'événement A s'est réalisé.

La probabilité $\mathbb{P}(A)$ de voir A se réaliser est alors approchée par :

$$\frac{n_A}{n}.$$

De plus, on sait que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$. On note $X = \mathbb{1}_A$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$. Ces variables aléatoires correspondent aux répétitions indépendantes de l'expérience aléatoire.

Par la loi faible des grands nombres

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left| \overline{X}_n - m \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $\frac{n_A}{n} = \overline{X}_n$ « s'approche » de $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$. Ceci justifie l'approche fréquentiste de la notion de probabilité.

III. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Dans ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (elle est donc discrète).

III.1. Généralités

Théorème 18.25

Pour tout $t \in [-1, 1]$, la variable aléatoire t^X est d'espérance finie.

Démonstration

Soit $t \in [-1, 1]$.

On a $\sum_{x \in X(\Omega)} |t^x \times \mathbb{P}(X = x)| \leq \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \leq 1 < +\infty$.

Donc, la famille $(t^x \times \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Donc, t^X est d'espérance finie.

Définition 18.4 – Fonction génératrice

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La **fonction génératrice** (ou **série génératrice**) de X est la fonction :

$$\begin{aligned} G_X : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \times t^n. \end{aligned}$$

Théorème 18.26

- La fonction génératrice de X est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) \times t^n$ de rayon de convergence $R \geq 1$.
- La série entière $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) \times t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
- G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- La loi de X est entièrement déterminée par sa fonction génératrice G_X .

Démonstration

Pour tout $t \in [-1, 1]$, la série $\sum \mathbb{P}(X = n) \times t^n$ converge, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n) \times t^n$ est supérieur ou égal à $R = 1$.

La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$ et $R \geq 1$.

D'autre part, pour tout $t \in [-1, 1]$, $|\mathbb{P}(X = n) \times t^n| \leq \mathbb{P}(X = n)$. Donc, $\|t \mapsto \mathbb{P}(X = n) \times t^n\|_{[-1, 1]}^\infty \leq \mathbb{P}(X = n)$.

Or, la série à termes positifs $\sum \mathbb{P}(X = n)$ converge (et est de somme 1).

Donc, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|t \mapsto \mathbb{P}(X = n) \times t^n\|_{[-1, 1]}^\infty$ converge.

Donc, la série entière $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) \times t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. □

Remarque 18.20

On peut reformuler le dernier point du théorème :

Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et, pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_X(t) = G_Y(t)$, alors X et Y ont la même loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n).$$

III.2. Propriétés des fonctions génératrices

Théorème 18.27

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

► On a $G_X(1) = 1$.

► La variable aléatoire X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1.

Dans ce cas, $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

► La variable aléatoire X possède un moment d'ordre 2 si, et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Dans ce cas, $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

Démonstration

A faire

Théorème 18.28

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$.

Démonstration

Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $X + Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Comme X et Y sont indépendantes,

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X \times t^Y) = \mathbb{E}(t^X) \times \mathbb{E}(t^Y) = G_X(t) \times G_Y(t).$$

□

Remarque 18.21 – Généralisation

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Alors, pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_{X_1 + \dots + X_n}(t) = G_{X_1}(t) \times \dots \times G_{X_n}(t)$.

De plus, si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont identiquement distribuées (ie elles ont la même loi), alors, pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_{X_1 + \dots + X_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n$.

III.3. Séries génératrices des lois usuelles

Théorème 18.29

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = 1 - p + p \times t.$$

Démonstration

Soit $t \in \mathbb{R}$, La variable aléatoire t^X est à valeurs dans $\{1, t\}$ (ensemble fini), donc est d'espérance finie.
De plus, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \mathbb{P}(X=0) \times 1 + \mathbb{P}(X=1) \times t = 1 - p + p \times t$. □

Théorème 18.30

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, alors :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = (1 - p + p \times t)^n.$$

Démonstration

Soit $t \in \mathbb{R}$, La variable aléatoire t^X est à valeurs dans $\{1, t, \dots, t^n\}$ (ensemble fini), donc est d'espérance finie.

De plus, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k) \times t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \times t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (t \times p)^k \times (1-p)^{n-k} = (1 - p + t \times p)^n$ où la dernière égalité découle de la formule du binôme de Newton. □

Théorème 18.31

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$, alors :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \frac{p \times t}{1 - (1-p) \times t}.$$

Démonstration

Soit $t \in \mathbb{R}$. Par propriété des séries géométriques, la série $\sum_{n \geq 1} t^n \times p \times (1-p)^{n-1}$ converge absolument si, et seulement si, $|t \times (1-p)| < 1$.

De plus, dans ce cas, par le théorème de transfert, on a :

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \times p \times (1-p)^{n-1} = p \times t \times \sum_{n=1}^{+\infty} (t \times (1-p))^{n-1} = \frac{p \times t}{1 - (1-p) \times t}.$$

Théorème 18.32

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = e^{\lambda \times (t-1)}.$$

Démonstration

Soit $t \in \mathbb{R}$. Par propriété des séries exponentielles, la série $\sum t^n \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!}$ converge absolument.

De plus, dans ce cas, par le théorème de transfert, on a :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \times t)^n}{n!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda \times t} = e^{\lambda \times (t-1)}.$$

□

Exercice 18.1

Retrouver les espérances et variances des lois usuelles en utilisant le théorème 18.27 page 24.