

Modèles de base

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Modèle basique

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Rappelez le nombre d'éléments suivants et redonner, pour chaque cas, une rapide démonstration. (*On pourra se contenter de justifier ceci sur un exemple avec n et p petits, par exemple $n = 3$.*)

1. p -listes avec répétition de n éléments.
2. p -listes sans répétition
 - a) de n éléments avec $p \leq n$.
 - b) de p éléments
3. De p tirages sans remise dans une urne contenant n boules numérotées distinctes, avec $p \leq n$.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Modèle "des boîtes" :

On dispose de p boîtes discernables. Combien y a-t-il de manières de répartir

1. n boules indiscernables dans ces boîtes, avec au moins une boule par boîte ?
2. n boules discernables entre elles dans ces boîtes, avec la possibilité de mettre plusieurs boules dans la même boîte ?
3. n boules indiscernables entre elles dans ces boîtes (avec la possibilité de mettre 0 boule dans les boîtes.) ?
4. n boules indiscernables entre elles dans ces boîtes, avec maximum une boule par boîte ?

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Répartitions pertinentes

Modéliser les cas ci-dessous grâce aux situations basiques des exercices précédents et répondre aux questions posées.

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de p -listes $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :
 - a) $i_1 + i_2 + \dots + i_p = n$ avec $\forall k = 1 \dots p, i_k \neq 0$
 - b) $i_1 + i_2 + \dots + i_p = n$ avec $\forall k = 1 \dots p, i_k \in \mathbb{N}$
 - c) $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ ☆
 - d) $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n$ ☆
2. Applications :
 - a) Quel est le nombre de solutions de $x + y + z + t = 50$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$?
 - b) Quel est le nombre de solutions de $x + y + z + t = 50$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{N}$?

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Système complet ☆

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de $x + 2y + z = 40$, avec $x, y, z \in \mathbb{N}$.

1. Détailler la situation avec des "ou" en prenant en compte les différentes valeurs de y possibles. En déduire un système complet détaillant les solutions.
2. En déduire un dénombrement des solutions.

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Tirage avec remise sans ordre ☆

Une urne contient n boules numérotées. Le but de cet exercice est de déterminer combien il y a de manières d'effectuer k tirages avec remise, sans se soucier de l'ordre des tirages et en se préoccupant du nombre d'occurrence d'un numéro.

1. Montrer que l'ensemble des tirages peut être modélisé par l'ensemble des situations du type $N_1 + \dots + N_n = N$ où les N_i sont des entiers positifs ou nuls.
2. En déduire le nombre de tirages possibles.

Applications concrètes

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –

De combien de façons peut-on placer 12 personnes dans 3 pièces de manière à avoir :

- 2 personnes dans la pièce 1
- 6 personnes dans la pièce 2
- 4 personnes dans la pièce 3

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –

Un concert comprend trois chanteurs et deux chanteuses avec chacun un numéro. De combien de façons peut-on arranger le programme si on veut commencer et finir par un chanteur ?

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –

Le but de cet exercice est de déterminer combien de mot de 8 lettres on peut composer avec seulement les lettres A, B et C comprenant autant de lettres A que de lettres B .

1. Découper les possibilités avec des "ou" afin de créer un système complet. (*On pourra s'intéresser au nombre de fois où on obtient A .*)

2. En déduire le nombre de résultats possibles.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –

Trois personnes A, B, C se partagent 7 pièces de 1 euros.

1. Combien de partages sont possibles ? (avec possibilité de ne rien recevoir.)
2. Combien y a-t-il de partages où chaque personne reçoit quelque chose ?
3. Reprendre les questions avec n pièces.

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –

Combien y a-t-il de façon de répartir alternativement 5 plantes vertes et 5 plantes fleuries distinctes sur un parterre (toutes les plantes sont discernables)

1. longiligne
2. circulaire.

☆

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –

Dans combien de nombres entre 1000 et 9999 rencontre-t-on

1. zéro fois le nombre 3 ?
2. une fois le nombre 3 ?
3. trois fois le nombre 7 ?

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Cours* –

On considère les ensembles $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Combien existe-t-il d'applications de E dans F ?
2. Combien existe-t-il d'applications f de E dans F telles que $f(a) = 1$?
3. Combien existe-t-il d'applications injectives de E dans F ?
4. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E dans F ?
5. Combien existe-t-il d'applications de $E \times F$ dans F^3 ?

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Chercher* – ☆

Soient p et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $\binom{n+p-1}{p}$.

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Chercher* – ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Combien y a-t-il de surjections d'un ensemble de cardinal $n + 1$ dans un ensemble de cardinal n ?

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – *Cours* –

Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etant donné A une partie de E à p éléments, déterminer le cardinal des ensembles suivants :
 - a) $M = \{B \in \mathcal{P}(E) : B \subseteq A\}$.
 - b) $N = \{B \in \mathcal{P}(E) : B \cap A = \emptyset\}$.
 - c) $R = \{B \in \mathcal{P}(E) : A \subseteq B\}$.
2. Pour tout p , déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 : |A| = p \text{ et } B \cap A = \emptyset\}$$

3. En déduire le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 : B \cap A = \emptyset\}$.

Inclusion - Exclusion

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Chercher* – ☆

1. Quel est le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5, ni par 7 compris entre 1 et 210 ?
2. Quel est le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 compris entre 1 et 1000 ?

Coefficients binomiaux

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Chercher* –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$1. \quad C_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad C_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$2. \quad S_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$$

3. *Application* : Montrer qu'il y a autant de parties de $E = \{1, \dots, n\}$ de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Chercher* – ☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. À l'aide de la formule de Pascal, calculer $\sum_{i=n}^{2n} \binom{i-1}{n-1}$
2. Calculer de deux manières différentes combien de mots de $2n$ lettres on peut former avec n lettres A et n lettres B , puis retrouver la formule.

EXERCICE 19: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Raisonner* –

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, où $n \geq p$.

1. Le but de cette question est d'établir une égalité en étudiant le nombre total de façons de choisir $p + 1$ éléments dans un ensemble en contenant $n + 1$ de deux façons différentes.
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note également $S_k = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$.
On note " C_k " la méthode de choix suivante :
 C_k : ne pas choisir $x_{k+1}, \dots, x_n$, mais choisir x_k puis p autres éléments dans S_k .
Justifier que l'ensemble des $(C_k)_{i=p, \dots, n}$ est une partition de l'ensemble des choix possibles de $p + 1$ éléments de S .
 - b) Sans utiliser la formule de Pascal, mais en utilisant des arguments de dénombrement, en déduire que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

2. En déduire la valeur de $S' = \sum_{k=p}^n k \binom{k}{p}$.
 (On rappelle que $(k+1)\binom{k}{p} = (p+1)\binom{k+1}{p+1}$).

EXERCICE 20: [Indications] [Correction] Formule de Vandermonde – *Modéliser – Calculer –*

1. Montrer que, pour tout entier $n, m \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$, on a ☆

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Quelques problèmes

EXERCICE 21: [Indications] [Correction] – *Modéliser – Chercher –*

1. De combien de façons une femme peut-elle arranger deux bagues différentes sur l'index, le majeur et l'annulaire (en supposant que tous ces doigts aient même grosseur...)
 (Attention : à l'ordre des bagues sur un même doigt !)
2. Même question avec n bagues. ☆☆

EXERCICE 22: [Indications] [Correction] binôme généralisé par dénombrement – *Chercher – Raisonner –* ☆☆

On dispose de a lettres A et b lettres B, avec ces $n = a + b$ lettres on forme un " mot ".

1. Combien de mots distincts peut-on former ?
 2. Généraliser au cas de k lettres.
 3. En déduire la formule :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$$

Indications

Exercice 2 [Correction]

2. Chaque boule peut choisir sa boîte.

Exercice 3 [Correction]

1. a) On pourra se ramener à des boules indiscernables dans des boîtes avec au moins une boule par boîte.
 b) On pourra se ramener à des boules indiscernables dans des boîtes avec possibilité de 0 boule par boîte.
 c) On pourra se servir du modèle des boules et des cloisons en repensant la définition des i_k .
 d) On pourra se servir du modèle des boîtes et des croix en repensant la définition des i_k .

Exercice 4 [Correction]

1. On pourra se demander pour commencer quelles sont précisément les valeurs de y possible afin de pouvoir se dire, dans la question suivante "si $y = 1$, si $y = 2$, etc. . ."
 2. Pour un y fixé, on peut se ramener à des cas déjà traités (ou réfléchir directement au nombre de cas de $x + z = 40 - 2y$, éventuellement un par un si besoin ($y = 0, y = 1, y = 2, \dots$)).

Exercice 6 [Correction]

Il s'agit d'une suite de choix successifs.

Exercice 7 [Correction]

Il s'agit d'une suite de choix successifs.

Exercice 11 [Correction]

Attention, il faut penser à retirer les nombres entre 0 et 999.

Exercice 13 [Correction]

Modéliser en se servant des premiers exercices.

Exercice 14 [Correction]

Considérer la liste des $n + 1$ images des éléments de l'ensemble de départ.

Exercice 16 [Correction]

1. Calculer le cardinal de l'ensemble $M_2 \cup M_5 \cup M_7$, où M_i désigne l'ensemble des multiples de i dans $\llbracket 1; 210 \rrbracket$.

Exercice 17 [Correction]

2. Calculer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$

Exercice 18 [Correction]

2. On pourra par exemple créer un système complet en considérant le nombre exact de B au début du mot.

Exercice 19 [Correction]

2. Se ramener à l'exercice précédent : penser à dire que $k = (k + 1) - 1$!

Exercice 20 [Correction]

1. Décomposer par exemple $(x+y)^{m+n} = (x+y)^m(x+y)^n$ puis utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 21 [Correction]

1. Distinguer par exemple le fait d'avoir une ou 2 bague(s) par doigt.
2. On pourra :
 - soit se poser d'abord la question du choix du nombre de bagues par doigt, puis faire le choix des bagues.
 - soit commencer par décomposer suivant toutes les possibilités d'ordonner les bagues sans tenir compte des doigts et ensuite, découper par doigt.

Exercice 1

1. Nombre de p listes avec répétition de n éléments : n^p .
On peut faire une démonstration en utilisant un arbre des cas : 1er élément, 2ème élément, etc... et en dénombrant le nombre total de branches.
2. a) Nombre de p listes sans répétition de n éléments :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

La démonstration peut se faire par exemple là aussi en listant les éléments avec un arbre des cas comme dans la question 1.

- b) C'est le nombre de permutations de p éléments, c'est-à-dire $p!$. C'est une application directe de la question précédente avec $p = n$.
3. C'est le nombre de combinaisons de p éléments parmi n , c'est-à-dire $\binom{n}{p}$.

Pour la démonstration, on peut établir un arbre là aussi. La première étape de l'arbre consiste à lister toutes les combinaisons C . La deuxième étape consiste à, pour chaque combinaison, de considérer toutes les permutations que l'on peut faire avec l'ensemble des p éléments de la combinaison ($p!$ possibilités). On obtient au total l'ensemble de toutes les p listes possibles à n éléments. On a donc vu que $C \cdots p! = \frac{n!}{(n-p)!}$, d'où la réponse.

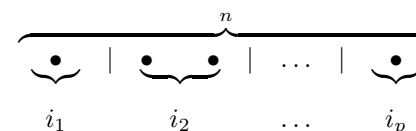
Exercice 2

1. Remarquons tout d'abord qu'il faut au moins n boules pour mettre au moins une boule par boîte, c'est-à-dire

$$n \geq p$$

(sinon, il y a 0 possibilités.)

Représentons les boules (non discernables) par un point. En les mettant sur une ligne, un trait de séparation représente la délimitation entre les boîtes :



où i_r représente alors le nombre de boules présentes dans l'urne $n^\circ r$.

L'ensemble demandé est donc en bijection avec toutes les configurations de points et de traits ci-dessus. Il s'agit donc du nombre de choix de $p-1$ traits dans $n-1$ emplacements, d'où $\binom{n-1}{p-1}$.

$$\binom{n-1}{p-1} \text{ possibilités}$$

2. On ne peut plus représenter les boules par des points indiscernables. Le modèle précédent ne fonctionne plus.

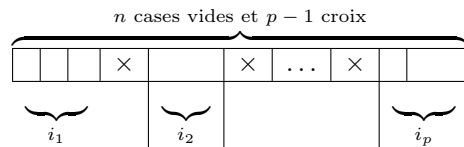
En revanche, à chaque boule on peut associer sa boîte. Une possibilité de rangement est donc modélisée par une liste

$$(x_1, \dots, x_n)$$

où x_i est le numéro de la boîte dans laquelle atterrit la boule $n^\circ i$. Autrement dit, le nombre de possibilité est le nombre de n -listes de numéros de $\llbracket 1; p \rrbracket$, d'où

$$p^n \text{ possibilités.}$$

3. Compter le nombre de répartitions de n boules dans p boîtes possibles revient à compter le nombre de modélisations possibles suivantes :



où chaque case vide représente une boule et chaque croix représente une séparation entre deux urnes, la quantité i_k correspondant au nombre de boules dans la boîte k .

Une possibilité correspond donc au choix de placement des $p - 1$ croix parmi $p - 1 + n$ emplacements. D'où

$$\boxed{\binom{p-1+n}{p-1} \text{ possibilités}}$$

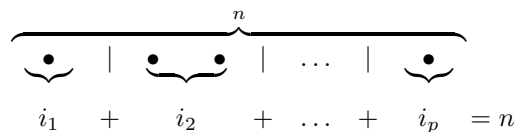
4. Dans ce cas, on peut estimer que qu'on choisit les boîtes qui contiennent une boule. Compter le nombre de possibilités revient donc à compter le nombre de possibilités de n boîtes choisies parmi les p boîtes, d'où

$$\boxed{\binom{p}{n} \text{ possibilités}}$$

Exercice 3

1. a) $i_1 + i_2 + \dots + i_p = n$ avec $\forall k = 1 \dots p, i_k \neq 0$:

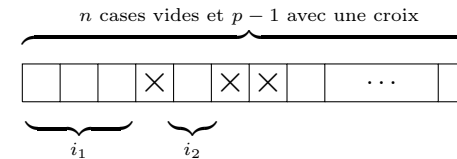
On représente en ligne n points qui représentent chacun un entier. Ensuite, on choisit de placer entre ces points $p - 1$ traits de séparation de la manière suivante :



L'ensemble demandé est donc en bijection avec toutes les configurations de points et de traits ci-dessus. Il s'agit donc du nombre de choix de $p - 1$ traits dans $n - 1$ emplacements, d'où $\boxed{\binom{n-1}{p-1}}$.

- b) $i_1 + i_2 + \dots + i_p = n$ avec $\forall k = 1 \dots p, i_k \in \mathbb{N}$:

On représente en ligne une succession de cases telles que chaque case vide représente un entier et une case avec une croix représente un $+$:



L'ensemble demandé est donc en bijection avec toutes les enchainements de cases ci-dessus. Il y a $n + p - 1$ cases au total. Il s'agit donc du nombre de choix de l'emplacement des $p - 1$ crois dans $n + p - 1$ emplacements, d'où $\boxed{\binom{n+p-1}{p-1}}$.

- c) $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$:

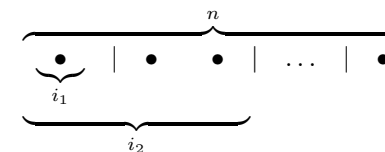
• Méthode 1 :

Cet ensemble est en **bijection avec l'ensemble des choix de p éléments parmi n** : Pour chaque combinaison de p éléments parmi n , il existe un seul et unique classement de ces nombres par ordre croissant.

Le cardinal est donc $\boxed{\binom{n}{p}}$.

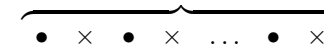
• Méthode 2 :

On représente en ligne n points qui représentent chacun un entier. Ensuite, on choisit de placer entre ces points $p - 1$ cloisons de séparation de la manière suivante :



Il y a autant de cloisons que de i_k , donc ici p cloisons.

Les i_k peuvent démarrer au moins à 1 et finir à n . Les emplacements possibles pour les cloisons sont donc les suivants :



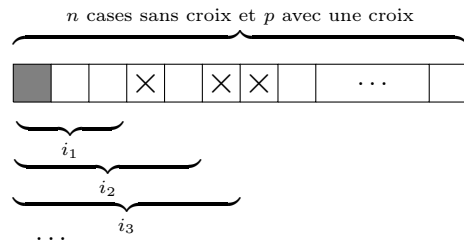
Il y en a autant que de points.

L'ensemble demandé est donc en bijection avec toutes les configurations de points et de traits ci-dessus. Il s'agit donc du nombre de choix de p traits dans n emplacements, d'où $\boxed{\binom{n}{p}}$.

d) $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n :$

• Méthode 1 :

Chaque élément de $\Omega = \{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n\}$ peut être modélisé par le schéma suivant :



où i_k est le nombre de cases sans croix entre le début (à gauche) et la $k^{\text{ème}}$ croix (ou la fin), et ceci pour k allant de 1 à p .

De plus, comme $i_1 \geq 1$, la première croix est forcément placée après la première case.

Compter le nombre de possibilités revient donc à choisir le nombre de choix possibles de placements des p croix parmi les $n + p - 1$ cases libres, d'où

$$\boxed{\binom{n+p-1}{p} \text{ possibilités}}$$

• Méthode 2 :

L'ensemble est en bijection avec

$$\{(i_1, \dots, i_p) \mid 1 \leq i_1 < i_2 + 1 < \dots < i_p + p - 1 \leq n + p - 1\}$$

Son cardinal est donc $\boxed{\binom{n+p-1}{p}}$.

2. a) $\binom{50-1}{3} = \binom{49}{3} = \frac{49 \times 48 \times 47}{3 \times 2} = 18\,424$
 b) $\binom{50+4-1}{3} = \binom{53}{3} = \frac{53 \times 52 \times 51}{3 \times 2} = 23\,426$

Exercice 4

1. On constate que $y = \frac{40-x-y}{2} \leq \frac{40}{2} = 20$, De plus, y est un entier positif. On peut donc dire qu'on a $y = 0$, ou $y = 1$, ou $y = 2$ etc... jusqu'à $y = 20$. On propose donc le système complet $\{A_y\}_{y \in [0,20]}$ tel que

A_y : "ensemble des solutions de $x + z = 40 - 2y$

Par exemple, A_1 : "ensemble des solutions de l'équation $x + z = 40 - 2$.", etc...

2. D'après le système complet, on sait que le nombre de solutions est

$$\sum_{y=0}^{20} \text{card } A_y$$

Or, le nombre d'éléments de A_y correspond à une situation usuelle (ex. précédent 1b avec $p = 2$, $n - 2y$ au lieu de n .) avec

$$\text{card } A_y = \binom{40 - 2y + 2 - 1}{1}$$

Le nombre de possibilités est donc

$$\begin{aligned} S &= \sum_{y=0}^{20} (41 - 2y) \\ &= 21 \times 41 - 2 \frac{20(20+1)}{2} = 861 - 420 = \boxed{441} \end{aligned}$$

Exercice 5

1. Pour chaque tirage sans ordre, on peut noter N_i le nombre de fois où on obtient i . On a nécessairement

$$N_1 + \dots + N_n = N \text{ (nombre total de boules).}$$

Alors pour tout tirage, il existe donc une unique liste $(N_1, \dots, N_n)$ telle que $N_1 + \dots + N_n = N$ et réciproquement.

2. On a vu dans l'exercice précédent qu'il y a

$$\boxed{\binom{k+n-1}{n-1} \text{ possibilités}}$$

Exercice 6

On est confronté à des choix successifs. Le principe multiplicatif s'applique donc. Le nombre de solutions est donc :

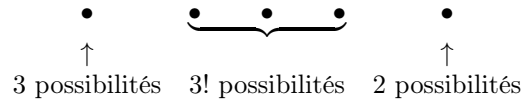
$$\underbrace{\binom{12}{2}}_{\text{choix de 2 personnes parmi 12 dans la pièce 1}} \times \underbrace{\binom{10}{6}}_{\text{choix de 6 personnes parmi 10 dans la pièce 2}} \times \underbrace{1}_{\text{pas le choix}}$$

D'où après simplification :

$$\boxed{\frac{12!}{2!6!4!} = 13\,860}$$

Exercice 7

On fait une liste de 5 éléments successifs. Le principe multiplicatif s'applique. On a



D'où $\boxed{3 \times 6 \times 2 = 36}$ possibilités de programme.

Exercice 8

1. Au vu du fait qu'il y ait 8 lettres, comme on a autant de lettres A que B , on ne peut avoir au maximum que 4 fois le A et le B .
On observe donc que les solutions se répartissent en un système complet $\{A_i\}_{i=1,\dots,4}$ où A_i correspond au nombre de mots où on observe i fois la lettre A (et B).
2. Dans chaque A_i , une façon de faire est de choisir l'emplacement des i lettres A parmi 8 places puis des i lettres B parmi $8 - i$ places restantes. Les lettres C étant alors automatiquement placés dans les emplacements restants. Ce sont des choix successifs. Le principe multiplicatif s'applique. On a donc, pour A_i :

$$\binom{8}{i} \times \binom{8-i}{i} \text{ possibilités}$$

C'est-à-dire après simplification :

$$\frac{8!}{i!i!(8-2i)!}$$

Par système complet, on additionne ensuite toutes ces possibilités, ce qui donne :

$$\frac{8!}{8!} + \frac{8!}{6!} + \frac{8!}{2!2!4!} + \frac{8!}{3!3!2!} + \frac{8!}{4!4!}$$

et finalement il y a

$$1 + 56 + 420 + 560 + 70 = \boxed{1\,107 \text{ mots possibles}}$$

Exercice 9

1. On cherche le cardinal de l'ensemble $\{(n_A, n_B, n_C) \in \mathbb{N}^3 \mid n_A + n_B + n_C = 7\}$. Il s'agit de

$$\boxed{\binom{7+2}{2} = 36}$$

2. Il s'agit d'un partage de n pièces parmi 3 personnes avec au moins une pièce par personne. On se réfère à l'exercice déjà fait à ce propos. On obtient

$$\boxed{\binom{7-1}{2} = 15}$$

3. De manière générale, on a $\boxed{\binom{n+2}{2}}$ pour la première question et $\boxed{\binom{n-1}{2}}$ pour la deuxième.

Exercice 10

1. On distingue les cas où l'on commence par une plante verte et les cas où l'on commence par les plantes fleuries, d'où

$$2 \times 5! \times 5! = 28\,800$$

2. Par rapport à tout à l'heure, on ne distingue plus le début. On peut donc supposer que le "début" est la plante verte numéro 1. Il reste donc à placer les 9 autres autour de lui alternativement :

$$4! \times 5! = \frac{28\,800}{10} = 2\,800$$

Exercice 11

1. Il s'agit de faire les listes de 4 chiffres parmi $10 - 1$ possibilités, sans que zéro ne soit le premier (de manière à avoir un nombre ≥ 1000) d'où

$$9^4 - 9^3 = 5832$$

2. On fait une 4-liste d'éléments parmi $0 \dots 9$ et :
on compte les éléments contenant exactement un seul 3 entre 0 et 9999 :

$$\begin{array}{ccc}
 4 & \times & 9^3 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{choix de la place du 3} & & \text{reste : 3-liste parmi 9 nombres.}
 \end{array}$$

puis on **retire parmi eux** les éléments entre 0 et 999, i.e. ceux où 0 est à la première place : même principe, mais avec une 3-liste :

$$\begin{array}{ccc}
 3 & \times & 9^2 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{choix de la place du 3} & & \text{reste : 3-liste parmi 9 nombres.}
 \end{array}$$

d'où

$$4 \times 9^3 - 3 \times 9^2 = 9^2 \times \underbrace{(4 \times 9 - 3)}_{33} = 2673$$

3. On cherche le nombre restant : 9 possibilités, puis sa place dans le nombre : 4 possibilités, puis on retire celui qui commence par 0. : $\boxed{4 \times 9 - 1 = 35}$

Exercice 12

1. Pour chaque élément de E , on choisit un élément de F . C'est le cardinal de l'ensemble $\{(i, j, k) \mid i, j, k = 1, \dots, 5\} = \llbracket 1, 5 \rrbracket^5$. Il y a donc $\boxed{5^3}$ applications.
2. Par le même principe que précédemment, on trouve $\boxed{5^2 = 25}$ applications.
3. Dire que les applications sont injectives revient à dire que l'on ne retrouve pas deux fois le même nombre dans le triplet (i, j, k) . Le nombre d'applications possibles est $\boxed{A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60}$
4. Il n'y en a pas.
5. Même chose qu'en 1, mais avec $\text{card}(E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F$ et $\text{card } F^3 = (\text{card } F)^3$.

Exercice 13

On cherche le nombre de listes possibles $(i_1, \dots, i_p)$ où i_k représente l'image de k , c'est-à-dire

$$1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n$$

Ceci correspond à l'exercice question , d'où directement

$$\boxed{\binom{n+p-1}{p} \text{ possibilités}}$$

Exercice 14

L'ensemble des surjections est en bijection avec l'ensemble des permutations des $(n+1)$ -uplets $(1, \dots, n, a)$ où $a \in \llbracket 1; n \rrbracket$. (Les images des n premiers éléments avec une image forcément redondante.) Il y a donc

$$\boxed{\frac{n(n+1)!}{2}}$$

possibilités.

Exercice 15

1. a) M est en bijection avec $\mathcal{P}(A)$. Ainsi, $|M| = 2^{|A|} = 2^p$.
 b) N est en bijection avec $\mathcal{P}(A^c)$. Ainsi, $|N| = 2^{|A^c|} = 2^{n-p}$.
 c) R est en bijection avec $\mathcal{P}(A^c)$. Ainsi, $|R| = 2^{|A^c|} = 2^{n-p}$.
2. $\text{card}\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 : |A| = p \text{ et } B \cap A = \emptyset\} = \binom{n}{p} 2^{n-p}$
3. $\text{card}\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 : B \cap A = \emptyset\} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = \boxed{3^n}$

Exercice 16

1. (On remarque que $210 = 7 \times 5 \times 3 \times 2$, ce qui nous permet de faire facilement les calculs qui vont suivre...) La formule de Poincaré nous donne

$$|M_2 \cup M_5 \cup M_7| = |M_2| + |M_5| + |M_7| - |M_2 \cap M_5| - |M_5 \cap M_7| - |M_7 \cap M_2| + |M_2 \cap M_5 \cap M_7|$$

$$\text{Or, } |M_2| = \frac{210}{2} = 105, \quad |M_5| = \frac{210}{5} = 42, \quad |M_7| = \frac{210}{7} = 30, \\ |M_2 \cap M_5| = \frac{210}{10} = 21, \quad |M_5 \cap M_7| = \frac{210}{35} = 6, \quad |M_7 \cap M_2| = \frac{210}{14} = 15, \\ |M_2 \cap M_5 \cap M_7| = \frac{210}{70} = 3.$$

En conclusion, on obtient

$$|M_2 \cup M_5 \cup M_7| = 138$$

et finalement, le nombre d'entiers non divisibles par 2, 5, ou 7 entre 1 et 210 est

$$\boxed{210 - 138 = 72}$$

2. La stratégie reste exactement la même que précédemment, au détail près que 1000 n'est pas divisible par 3 ou 7. Il faut donc s'adapter :
 $|M_3| = E(\frac{1000}{3}) = 333, \quad |M_5| = \frac{1000}{5} = 200, \quad |M_7| = E(\frac{1000}{7}) = 142,$
 $|M_3 \cap M_5| = \frac{1000}{3 \times 5} = 66, \quad |M_5 \cap M_7| = \frac{1000}{35} = 28, \quad |M_7 \cap M_3| = \frac{1000}{3 \times 7} = 47,$
 $|M_3 \cap M_5 \cap M_7| = \frac{1000}{3 \times 5 \times 7} = 9.$
 Il en résulte donc

$$\boxed{543}$$

possibilités.

Exercice 17

1. Très rapidement, avec la formule du binôme : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Pour C_1 , on prend $x = 1$ et pour C_2 , on prend $x = -1$. On obtient

$$\boxed{C_1 = 2^n \quad \text{et} \quad C_2 = 0}$$

2. $S_1 + S_2 = C_1 = 2^n$ et $S_1 - S_2 = C_2 = 0$. D'où

$$\boxed{S_1 = S_2 = 2^{n-1}}$$

3. C'est la traduction en terme combinatoire de la question précédente : S_1 est le nombre de parties de cardinal pair et S_2 de cardinal impair.

Exercice 18

1. On sait bien que, pour tout $i \geq n+1$, on a

$$\binom{i-1}{n-1} + \binom{i-1}{n} = \binom{i}{n}$$

(avec la convention $\binom{b}{a} = 0$ si $b < a$).

d'où, pour tout $i \geq p$, $\binom{i-1}{n-1} = \binom{i}{n} - \binom{i-1}{n}$. En réinjectant dans la somme, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{2n} \binom{i-1}{n-1} &= \sum_{i=n}^{2n} \left(\binom{i}{n} - \binom{i-1}{n} \right) \\ &= \sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n} - \sum_{i=n}^{2n} \binom{i-1}{n} \\ &= \sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n} - \sum_{i=n-1}^{2n-1} \binom{i}{n} \\ &= \binom{2n}{n} - \underbrace{\binom{n-1}{n}}_{=0} = \binom{2n}{n} \quad (\text{téléscopage}) \end{aligned}$$

2. Méthode 1 :

Si on a placé les n lettres A parmi les $2n$ possibilités, les lettres B complètent automatiquement. On a donc $\binom{2n}{n}$ mots possibles.

Méthode 2 :

Le nombre de possibilités est décomposé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \text{card} \left\{ \overbrace{(B \dots B A * \dots *)}^{2n} + \text{permutations} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{2n-k-1}{n-1}}_{\text{choix de l'emplacement des } A} \\ &= \sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n-1} \end{aligned}$$

Exercice 19

1. a) On note C l'ensemble des possibilités de choix de $p+1$ éléments parmi S .

- Montrons que $C_k \subset C$ pour tout k :

Dans chacun des cas C_k , on choisit bien au total $p+1$ éléments parmi $n+1$ (les p de S_k et x_k). Les C_k sont donc inclus dans les choix de $p+1$ éléments parmi $n+1$.

- Montrons que les C_k sont 2 à 2 incompatibles. :

Les possibilités sont bien incompatibles car on ne peut en même temps faire un choix de type C_i et un autre de type C_j . En effet, (décidons que $i > j$). Si on fait C_i , on choisit x_i , mais si on fait C_j en même temps, on ne choisit pas x_i car $i > j$, ce qui est donc incohérent.

- Montrons que $C \subset \bigcup_{k=p}^n C_k$:

Choisissons $p+1$ éléments dans S . On note k l'indice minimum des x_i choisis. Alors on est bien dans le cas C_k . De plus, on a nécessairement

$$k \geq p$$

car les autres cas sont impossibles : si $i < p$, le cas C_i signifie en partie qu'on choisit p éléments dans $x_0, \dots, x_{i-1}$, mais si $i < p$, on a moins de p éléments. On ne peut donc pas en choisir p .

- Conclusion :

l'ensemble des C_i est une partition de l'ensemble des choix possibles de $p+1$ éléments de S .

- b) Étant donné qu'on a une partition des choix de $p+1$ éléments parmi les $n+1$ de S , on sait que

$$\text{card } C = \sum_{k=p}^n \text{card } C_k$$

or,

$$\text{card } C = \binom{n+1}{p+1}$$

et

$$\text{card } C_k = 1 \times \binom{k}{p} = \binom{k}{p}$$

car on choisit x_k qui est fixé (donc 1 choix possible) puis en parallèle p éléments dans S_k qui en comprend k . D'où

$$\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n k \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \left((k+1) \binom{k}{p} - \binom{k}{p} \right) \\ &= \sum_{k=p}^n (k+1) \underbrace{\binom{k}{p}}_{=(p+1) \binom{k+1}{p+1}} - \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} \\ &= (p+1) \sum_{k=p}^n \binom{k+1}{p+1} - \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} \\ &= (p+1) \sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k}{p+1} - \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} \end{aligned}$$

Grâce à l'exercice précédent, on sait que $\sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k}{p+1} = \binom{n+2}{p+2}$ et $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n k \binom{k}{p} &= (p+1) \underbrace{\binom{n+2}{p+2}}_{\frac{n+2}{p+2} \binom{n+1}{p+1}} - \binom{n+1}{p+1} \\ &= \left(\frac{(n+2)(p+1)}{p+2} - 1 \right) \binom{n+1}{p+1} \end{aligned}$$

Exercice 20

1. On utilise le développement en formule de Newton de

$$(x+y)^{m+n} = (x+y)^m (x+y)^n$$

Dans le membre de gauche on a

$$(x+y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}$$

Dans le membre de droite, on a

$$(x+y)^m (x+y)^n = \sum_{a=0}^m \binom{m}{a} x^a y^{m-a} \sum_{b=0}^{n+m} \binom{m}{b} x^a y^{m-b}$$

On a donc, sur les deux polynômes en x^k obtenus, deux manières distinctes de trouver le coefficient devant $x^k y^{n+m-k}$:

- sur le membre de gauche : $\binom{n+m}{k}$
- sur le membre de droite : on choisit tous les produits de membres $x^a y^{m-a}$ et $x^b y^{n-b}$ qui donnent x^k , c'est-à-dire tous les a, b tels que $a+b=k$, i.e. $b=k-a$. Autrement dit, si on prend en compte la convention $\binom{m}{n} = 0$ si $n > m$, cela correspond à

$$\sum_{a=0}^k \binom{m}{a} x^a y^{m-a} \binom{m}{k-a} x^{k-a} y^{m-(k-a)} = \sum_{a=0}^k \binom{m}{a} \binom{m}{k-a} x^k y^{m-k}$$

D'où, par identification des coefficients du polynôme en x^k :

$$\boxed{\sum_{a=0}^k \binom{m}{a} \binom{m}{k-a} = \binom{m+n}{k}}$$

2. Dans l'égalité précédente, on remplace k par n , et on pose $m=n$ on trouve

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

ce qui est l'identité cherchée.

Exercice 21

1. • Une bague par doigt : 3×2 possibilités.
• Deux bagues par doigts :

$$\begin{array}{ccc} 3 & \times & 2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{choix du doigts} & & \text{permutation des bagues} \end{array}$$

Conclusion :

$$\boxed{12 \text{ possibilités}}$$

2. • Si on commence par découper suivant le nombre de bagues sur chaque doigt :

On note alors x_i le nombre de bagues sur le doigt i .

Pour une répartition (x_1, x_2, x_2) , on a

$$\underbrace{\frac{n!}{(n-x_1)!}}_{\text{choix ordonné doigt1}} \underbrace{\frac{(n-x_1)!}{(n-x_1-x_2)!}}_{\text{choix ordonné doigt2}} \underbrace{(n-x_1-x_2)!}_{\text{choix ordonné doigt3 bagues restantes}} = n! \text{ possibilités}$$

Il y a donc au final

$$\sum_{\text{ensemble des cas de } (x_1, x_2, x_3)} n! \text{ possibilités}$$

$n!$ étant constant, on a donc

“nombre de cas de (x_1, x_2, x_3) ” $\times n!$ possibilités

Or, le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + x_3 = n$, avec $x_i \in \mathbb{N}$ est $\binom{n+2}{n}$ (cf exercice 3)

Exercice 22

1. **Méthode 1** : Il s’agit simplement de choisir l’emplacement des A dans le mot, d’où $\boxed{\binom{n}{a}}$ possibilités.

Méthode 2 : On cherche toutes les permutations possibles du mot $\underbrace{A \dots A}_{a \text{ fois}} \underbrace{B \dots B}_{b \text{ fois}}$.

2. Avec la méthode 2, si on note $A_1, \dots, A_k$ les lettres et $r_1, \dots, r_k$ leur nombre d’occurrence, il est facile de voir qu’il s’agit d’anagrammes du mot $\underbrace{A_1 \dots A_1}_{r_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{A_k \dots A_k}_{r_k \text{ fois}}$, c’est à dire

$$\boxed{\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}}$$

où $n = r_1 + \dots + r_k$ est le nombre total de lettres.

3. **Explications sur l’exemple $(x_1 + x_2)^n$** :

Développer l’expression $(x_1 + x_2)^n = \underbrace{(x_1 + x_2) \dots (x_1 + x_2)}_{n \text{ fois}}$ revient à trouver

toutes les combinaisons possibles de $x_i x_j$ résultant du produit des n membres. Cela se présente donc sous la forme

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^n a_k x_1^k x_2^{n-k}$$

où a_k est le nombre de fois où l’on retrouve l’expression $x_1^k x_2^{n-k}$ dans le développement. On peut interpréter a_k comme le nombre de mots possibles écrits avec les lettres A_1 et A_2 . En effet, à un mot à n lettre en A_1, A_2 possible correspond exactement un choix de x_1, x_2 dans les parenthèses :

Par exemple, le mot $A_1 A_1 A_2 \dots A_1$ correspond au choix de x_1 dans la première parenthèse, A_1 dans la deuxième parenthèse, A_2 dans la troisième parenthèse, etc ...

En conclusion, $\boxed{a_k = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}}$ et la formule est démontrée.