

Exercice 1. Manipulation du symbole somme

Ecrire en utilisant le signe $\sum$

1. $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p$.
2. $x_1 y_{10} + x_2 y_9 + \cdots + x_{10} y_1$.
3. $x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_3 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_3 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_3$.

Exercice 2. Sommes en extension

1. Calcul de la somme des n premiers entiers pairs (resp. impairs).
2. Calcul de la somme $S_n = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \cdots + (-1)^n 3^n$.
3. Calcul de la somme $T_n = 2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2n+1}$.

Exercice 3. Sommes classiques

Calculer les sommes suivantes

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 2^{2k-1} \quad & 2) \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} \quad & 3) \sum_{k=3}^{n+4} (k-2)^2 \quad & 4) \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \\ 5) \sum_{k=2}^{2n} (k+2^k) \quad & 6) \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{3^{i/2}} \quad & 7) \sum_{i=0}^{2n} i(i+1) \quad & 8) \sum_{i=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i} \right)^2. \end{aligned}$$

Exercice 4. Sommes télescopiques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $1 \leq p \leq n$, calculer

$$\sum_{i=p}^n (u_{i+1} - 3u_i + 2u_{i-1}).$$

Exercice 5. Télésopage

On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2).$$

1. Déterminer S_n à l'aide de la simplification d'une somme télescopique.
2. En développant, déterminer une autre expression de S_n , en fonction de $\sum_{k=1}^n k$.
3. En déduire une formule permettant de calculer $\sum_{k=1}^n k$.
4. Adapter cette technique pour calculer $\sum_{k=1}^n k^2$ puis $\sum_{k=1}^n k^3$.

Exercice 6. Valeur absolue

Calculer la somme suivante $\sum_{k=0}^{2n} |k - n|$.

Exercice 7. Utilisation de la dérivation

En utilisant judicieusement la dérivation, simplifiez la somme suivante $\sum_{k=0}^n k e^{kx}$.

Exercice 8. Sommes doubles

Calculer les sommes doubles suivantes

$$\begin{aligned} 1) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \log(i^j) \quad & 2) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j} \quad & 3) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j). \\ 4) \sum_{1 \leq i < j \leq n} i+j \quad & 5) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} \quad & 6) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j). \end{aligned}$$

Exercice 9. Produit

Calculer le produit suivant $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

Exercice 10. Puissances et factorielles

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer les produit suivants à l'aide de puissances de 2 et de factorielles

$$\prod_{k=1}^n (2k) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

2. En déduire que

$$(2n)! < 2^{2n} (n!)^2.$$

Exercice 11. Election d'un comité

Une assemblée de 15 hommes et 12 femmes désire élire un comité de 6 membres, madame A refuse de siéger dans tout comité dont ferait partie monsieur B.

- Quel est le nombre de comités qui pourront être constitués dans ces conditions ?
- Dénombrer ceux de ces comités dont madame A ferait partie.

Exercice 12. Tirage

On considère 7 boules numérotées de 1 à 7. L'expérience consiste à en tirer simultanément 3.

- Soit k un entier vérifiant $3 \leq k \leq 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?
- En déduire une expression sous forme d'un unique coefficient binomial de

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}.$$

Exercice 13. Une extension de la formule du triangle de Pascal

Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

- Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent
 - a et b ,
 - a mais pas b ,
 - b mais pas a ,
 - ni a , ni b .
- En déduire la relation

$$\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}.$$

- Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leq p \leq n$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

- Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

Exercice 14. Formule du binôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \quad 2) \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-3)^k 5^{8-k} \quad 3) \sum_{k=0}^4 \binom{6}{k}.$$

Exercice 15. Différentes utilisations de la formule du binôme

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, développer $(1+x)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
- En déduire les sommes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} & \quad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} & \quad \text{(c)} \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} & \quad \text{(d)} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} \\ \text{(e)} \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} & \quad \text{(f)} \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} & \quad \text{(g)} \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \end{aligned}$$