

Lois de variables aléatoires finies

EXERCICE 1: [Indications] – Cours – On lance un dé et on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de $Y = (X - 2)^2$ et de $Z = \frac{1}{X + 1}$ ainsi que leur fonction de répartition.

EXERCICE 2: [Indications] – Mobiliser –

L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Les clients ont une dent malade parmi les 32 qu'ils possèdent avant l'intervention des tenailles du praticien. On considère les 10 premiers patients, en notant X le nombre de dents malades extraites à bon escient, sachant qu'il ne retire qu'une seule dent par personne.

- Déterminer la loi de la variable X . Calculer la probabilité pour qu'aucun de ces patients n'y laisse la dent malade.
- Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?
- Le dernier client se laisse arracher les dents une à une tant que la dent n'a pas été extraite. On note Y le nombre de dents saines que ce malheureux voit tomber.
 - Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - Quelle est la probabilité pour qu'il reparte entièrement édenté.
 - Calculer $E[Y]$.

EXERCICE 3: [Indications] – Calculer – Soit X une variable aléatoire réelle finie suivant la loi uniforme sur $[-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Déterminer les moments d'ordre 1, 2 et 3 de X .

EXERCICE 4: [Indications] – Chercher – Calculer –

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une v.a. telle que $X(\Omega) \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k).$$

- On effectue trois tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). Soit X le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de X .

Lois de variables aléatoires discrètes

EXERCICE 5: [Indications] – Cours – Chercher –

Un automobiliste doit dévisser dans le brouillard les boulons d'une roue de sa voiture. Il utilise une croix dont les quatre extrémités sont des clefs de taille différente indiscernables au toucher.

- S'il procède au hasard, sans méthode.
 - Déterminer la probabilité de devoir faire n essais pour trouver la bonne clef.
 - Calculer le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la clef, puis la variance associée.
- S'il procède au hasard, en éliminant les extrémités déjà testées. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais. Établir la loi de Y , ainsi que son espérance et sa variance.

EXERCICE 6: [Indications] – Cours – Calculer –

Guy part en voyage pour une longue période avec une amie, mais il est distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence, il y a une chance sur cinq pour qu'il reparte sans sa passagère, descendue pour visiter les toilettes... Elle est bien dans la voiture au départ du voyage. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes (s'arrêter pour prendre de l'essence) que Guy parcourt jusqu'à oublier sa passagère. Une fois oubliée, il ne fait pas demi tour.

- Établir la loi de probabilité de X . Calculer $E[X]$ et $\sigma(X)$.
- Déterminer la fonction de répartition de X .
- Quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination dans la voiture de Guy avec une probabilité supérieure à 0,6 ?

EXERCICE 7: [Indications] – Cours – Mobiliser –

Le chemin en kilomètres qu'un enfant de cinq ans accepte de parcourir sur son vélo avant de le laisser sur place suit une loi de Poisson de moyenne 2. Le tour du lac Kir fait 3 kilomètres.

- Calculer la probabilité pour un de ces bambins de faire au moins un tour complet de lac.

7 pères de famille naïfs accompagnent leurs rejetons de cinq ans qui chevauchement fièrement leur VTT dans un périple dominical autour du lac. Sachant que ceux-ci n'ont le temps de faire qu'un tour maximum et que le tour est forcément entamé, soit X le nombre de ces inconscients qui vont peut être terminer la grand boucle en portant le vélo de leur enfant.

2. Déterminer la loi de X , calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer la probabilité $P(X \leq \mathbb{E}[X])$.

EXERCICE 8: [Indications] – Chercher – Calculer – Cours – Chez les rois faînéants, les mariages consanguins ont développé un risque de stérilité. À partir de Clothaire III, on note X le nombre de générations précédant l'extinction de la dynastie par stérilité. (par exemple, on a $X = 0$ si Clothaire n'a pas de descendant.) La loi de probabilité de la variable aléatoire X vérifie la propriété suivante :

$$3p(X = n + 2) = 4p(X = n + 1) - p(X = n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer la loi de X .
2. En déduire la probabilité pour que Clothaire III soit stérile.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 9: [Indications] – Calculer – ☆
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de loi géométrique $\mathcal{G}(1 - \theta)$, avec $\theta \in]0; 1[$.

Pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y = \min\{n_0, X\}$ $Z = \max\{n_0, X\}$

1. Déterminer la loi de Y .
2. Déterminer la loi de Z .

EXERCICE 10: [Indications] – Calculer – Déterminer l'espérance et la variance de $Y = (-1)^X$ lorsque X suit une loi de *Poisson* de paramètre $\lambda > 0$. En déduire la loi de Y .

EXERCICE 11: [Indications] Caractérisation d'une loi de *Poisson* – Calculer – ☆
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $p_n = P(X = n) > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X suit la loi de *Poisson* de paramètre λ .
2. pour tout $n \geq 1$ on a, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$.

EXERCICE 12: [Indications] – Calculer – Chercher – ☆
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les cas d'existence de $\mathbb{E}(e^{-\alpha X})$ en fonction de $q = 1 - p$ et la calculer en cas d'existence.

EXERCICE 13: [Indications] – Calculer –

1. Déterminer α tel qu'il existe une variable aléatoire X de loi définie par

$$P(X = n) = \frac{\alpha}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Montrer que l'espérance de X n'existe pas.

EXERCICE 14: [Indications] – Cours – Calculer –

1. Déterminer α tel qu'il existe une variable aléatoire X de loi définie par $P\left(X = \frac{(-1)^n}{n+2}\right) = \frac{\alpha}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ définisse une loi de probabilité.
2. Déterminer $\mathbb{E}[X]$.

EXERCICE 15: [Indications] – Calculer –

On considère une variable X aléatoire de loi définie par

$$P(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Vérifier que X est bien définie.
2. Calculer l'espérance de X .

EXERCICE 16: [Indications] – Chercher – Calculer – ☆

Soit X une v.a. discrète telle que $\text{Supp}(X) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) + nP(X \geq n+1) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$$

2. Montrer que si X admet une espérance alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nP(X \geq n+1) = 0$.
3. En déduire que X admet une espérance $\iff$ la série $\sum (P(X \geq k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Montrer que dans ce cas $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.

EXERCICE 17: [Indications] – Chercher – (ENS) Soit X une v.a. discrète sur Ω admettant une espérance. On note $\text{Supp}(X) = \{x_k, k \in K\}$ où les x_k sont deux à deux distincts ou nuls, et $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $E(X | A) = \sum_{k \in K} x_k P_A(X = x_k)$.

Soit $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'événements. Montrer que

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)E(X | B_n).$$

(On admettra que les sommes de sommes qui interviendront sont interchangeables)

PROBLÈME : [Indications] Fonctions génératrices (partie I d'un sujet d'écrit de concours)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et on appelle "fonction génératrice de X " la fonction G définie par :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)t^k$$

dont le domaine de définition D est celui de la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(X = n)t^n$.

1. On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
 - a) Déterminer le domaine de définition D de G .
 - b) Soit $t \in D$. Exprimer $G(t)$ à l'aide de p sans le signe $\sum$ et en simplifiant au maximum l'expression.
2. Déterminer de même de domaine de définition et la formule dans le cas où X suit cette fois-ci une loi de Poisson de paramètre λ .
3. Montrer que $1 \in D$ quelquesoit la variable X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et déterminer $G(1)$.

4. Dans cette question, on suppose que X prend des valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Dans ce cas, on a $D = \mathbb{R}$ et

$$G(t) = \sum_{k=1}^n p(X = k)t^k.$$

- a) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G' . en justifiant son existence.
- b) Établir la relation :

$$\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$$

Indications

Exercice 1

Se ramener à X .

Exercice 8

1. Une fois déterminé la formule issue d'une suite linéaire d'ordre 2 bien choisie, on trouvera les inconnues en se souvenant que p est une loi de probabilité discrète.
-

Exercice 10

Se ramener à une stratégie de séparation d'indices pairs/impairs.

Exercice 15

1. Déterminer a, b, c tels que $\frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$
2. Déterminer a, b tels que $\frac{4}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$