

CHAPITRE 9

EXO 1

On y va à grand coup de Charles, les fonctions étant constantes sur chaque intervalle

$$\bullet \int_I f = 2 \times (-1) + 3 \times 2 + 2 \times (-3) + 2 \times 1 = \boxed{0} \quad \bullet \int_I f^2 = 2 \times 1 + 3 \times 4 + 2 \times 9 + 2 \times 1 = \boxed{34}$$

$$\bullet \int_I g = 1 \times 1 + 3 \times (-2) + 4 \times 3 + 1 \times (-1) = \boxed{6} \quad \bullet \int_I f \cdot g = \int_I f + \int_I g = 6$$

$$\bullet fg = -1 \text{ sur } [0;1[\quad // \quad 2 \text{ sur } [1;2[\quad // \quad -4 \text{ sur } [2;4[\quad // \quad 6 \text{ sur } [4;5[\\ -9 \text{ sur } [5;7[\quad // \quad 3 \text{ sur } [7;8[\quad // \quad -1 \text{ sur } [8;9[$$

donc $\int_I fg = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 2 \times (-4) + 1 \times 6 + 2 \times (-9) + 1 \times 3 + 1 \times (-1) = \boxed{-17}$

EXO 2

(a) $-x^2 \leq 0$ sur $[0;2]$ donc $\int_0^2 -x^2 dx \leq 0$

(b) $\ln(t) \leq 0$ sur $[0,5;1]$ donc $\int_{0,5}^1 \ln(t) dt \leq 0$ et $\int_1^{0,5} \ln(t) dt \geq 0$

(c) $e^{-u^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\int_5^{23} e^{-u^2} du > 0$

(d) $\sin(\tau) > 0$ et $\cos(\tau) > 0$ donc $\tan(\tau) > 0$ d'où $\int_{\pi}^{4\pi/3} \tan(\tau) d\tau > 0$

EXO 3

(a) Pour $x \in [1;2]$ $x^2 e^x - x e^x = x(x-1)e^x \geq 0$ donc $x e^x \leq x^2 e^x$ et $\int_1^2 x e^x dx \leq \int_1^2 x^2 e^x dx$

(b) Pour $t \in [0;1]$ $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2 - (1+t)}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{t(t-1)}{(1+t)(1+t^2)} \leq 0$ donc $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

(c) Pour $u \in [0; \pi/4]$ $\sin(u) \leq \cos(u)$ d'après trigo donc $\int_0^{\pi/4} \sin(u) du \leq \int_0^{\pi/4} \cos(u) du$

EXO 4

$$1) \forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in [a, b] \quad (f(x) + kg(x))^2 \geq 0 \quad \text{d'où} \quad P(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2 dx \geq 0$$

$$2) \forall k \in \mathbb{Z} \quad P(t) = \int_a^b (f(x)^2 + 2t f(x)g(x) + t^2 g(x)^2) dx = \int_a^b f(x)^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g(x)^2 dx$$

AINSI P est un polynôme du 2^{ème} degré (dont les coefficients sont des intégrales!)
Comme $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, son discriminant est négatif ou nul, soit

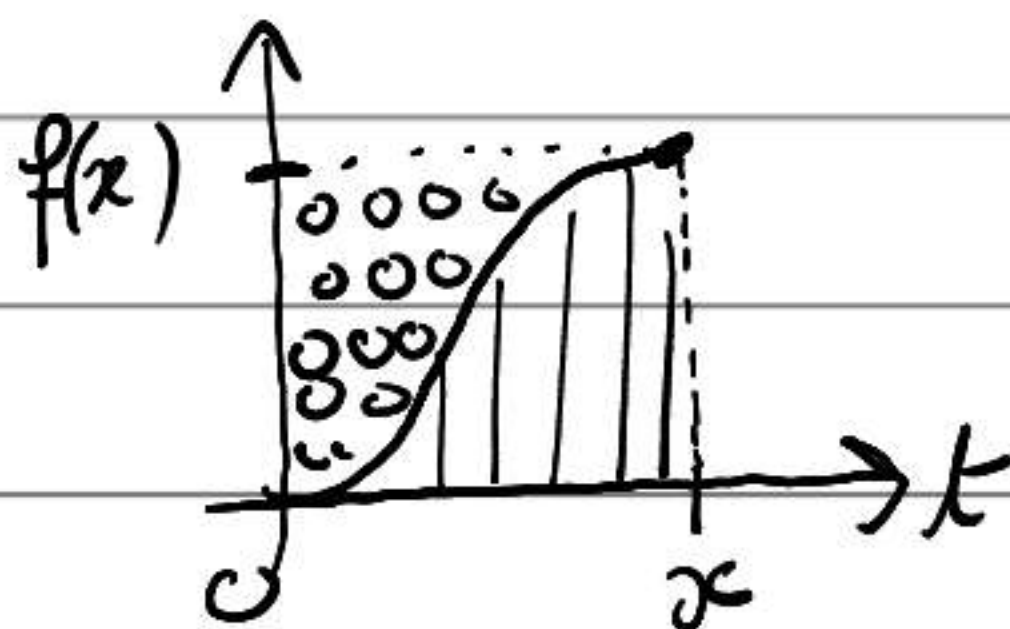
$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx \leq 0$$

$$\text{d'où} \quad \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$$

EXO 5

Soit $x > 0$

$$\int_0^x f(t) dt \text{ est l'aire hachurée } \text{||||}$$



$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt : \text{aire comprise entre la courbe de } f^{-1} \text{ et l'axe } (Ox) \text{ au-dessus de l'intervalle } [0, f(x)]$$

Cela correspond aux points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq f(x) \\ 0 \leq y \leq f'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ f(y) \leq x \leq f(x) \end{cases}$$

ce qui signifie que $M'(y, x)$ appartient au domaine |||| compris entre la courbe de f et la droite $y = f(x)$ au-dessus de l'intervalle $[0, x]$

M et M' étant symétriques par rapport à $\Delta: y = x$ et cette symétrie conservant les aires, on en déduit que $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$ est l'aire hachurée ||||

Or $\text{||||} \cup \text{||||}$ est un rectangle d'aire $xf(x)$, d'où

$$\boxed{\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)}$$

Dans le cas où f est dérivable, on peut procéder comme suit:
 on note F une primitive de f et G une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}_+$
 et l'on considère pour $x \geq 0$ la quantité

$$d(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - x f(x)$$

$$= F(x) - F(0) + G(f(x)) - G(0) - x f(x)$$

On observe que $d(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$. De plus, d est trivialement dérivable et

$$\begin{aligned} d'(x) &= F'(x) + f'(x) \times G'(f(x)) - f(x) - x f'(x) \\ &= f(x) + f'(x) \times x - f(x) - x f'(x) \quad (F' = f \text{ et } G' = f^{-1}) \end{aligned}$$

$\stackrel{=0}{=}$ donc la fonction d est constante et vaut 0, ce qui conduit au résultat

EXO 6

(a) CDV $\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases}$ alors $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \arctan(u) = \boxed{\frac{1}{2} \arctan(x^2)}$

(b) Par linéarité $\int \frac{2x+3}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 3 \int \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{\ln(1+x^2) + 3 \arctan(x)}$

(c) Il faut toujours simplifier les quotients de polynômes à l'aide d'une division euclidienne, sinon on ne peut pas trouver de primitive

$$\begin{array}{r} x^6 - 2x^5 + x^4 \\ -(x^6 + x^4) \\ \hline -2x^5 \\ -(-2x^5 - 2x^3) \\ \hline +2x^3 \\ -(2x^3 + 2x) \\ \hline -2x \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2+1 \\ x^4 - 2x^3 + 2x \end{array} \right.$$

AINSI $x^6 - 2x^5 + x^4 = (x^2+1)(x^4 - 2x^3 + 2x) - 2x$

d'où $\frac{x^4(1-x)^2}{x^2+1} = x^4 - 2x^3 + 2x - \frac{2x}{x^2+1}$ ← forme $\frac{u'}{u}$

d- $\int \frac{x^4(1-x)^2}{x^2+1} dx = \boxed{\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + x^2 - \ln(x^2+1)}$ assez facilement, tout compte fait !

(d) CDV $\begin{cases} u = x^3 - 1 \\ du = 3x^2 dx \end{cases}$ ainsi $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 1} = \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3} \ln|u| = \boxed{\frac{1}{3} \ln|x^3 - 1|}$

(c) Comme $x^2-1=(x+1)(x-1)$, on cherche à mettre $\frac{1}{x^2-1}$ sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$
 Or $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$

donc cette expression coïncide avec $\frac{1}{x^2-1}$ ssi $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1/2 \end{cases}$

AINSI on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|}$$

(f) Un peu délicate... et astucieuse, on déboule du programme de BCPST!

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

Tout d'abord $\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} = \ln(x^2+2x+3) \dots$ (forme u'/u)... car $x^2+2x+3 > 0$

En effet $x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2 = (x+1)^2+2 > 0$

donc $x^2+2x+3 = 2 \left(1 + \frac{(x+1)^2}{2} \right) = 2 \left(1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+3} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2} & \text{CDV} \begin{cases} u = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{dx}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2} du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}$

MÉTHODE À RETENIR : pour intégrer l'inverse d'un polynôme du second degré, on le met sous forme canonique $a(x+\alpha)^2+\beta$ puis on factorise et l'on effectue un changement de variable pour retrouver la dérivée de arctan

EXO 7

$$(a) \text{ CDV } \begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases} \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) = \boxed{\arctan(e^x)}$$

$$(b) \text{ CDV } \begin{cases} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x) dx \end{cases} \int \frac{\sin(x) dx}{1+\cos^2(x)} = \int \frac{-du}{1+u^2} = -\arctan(u) = \boxed{-\arctan(\cos x)}$$

$$(c) \text{ CDV } \begin{cases} u = \tan(x) \\ du = dx / \cos^2(x) \end{cases} \int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = \int e^u du = e^u = \boxed{e^{\tan(x)}}$$

LE CHANGEMENT DE VARIABLE, C'EST CHOUETTE!

(d) Là, c'est moins marrant: on recherche une primitive de $f: x \mapsto (x^3 + 5x^2 - 2)e^x$ sous la forme $F: x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$

$$\text{On a alors } F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x \\ = (ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d))e^x$$

$$\text{donc pour que } F' = f, \text{ il faut que } \begin{cases} a=1 \\ 3a+b=5 \\ 2b+c=0 \\ c+d=-2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a=1 \\ b=5-3=2 \\ c=-4 \\ d=-2+4=2 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \int (x^3 + 5x^2 - 2)e^x dx = \boxed{(x^3 + 2x^2 - 4x + 2)e^x}$$

(e) Même idée: on cherche une primitive de $f: x \mapsto \cos(x)e^{2x}$ sous la forme $F: x \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x))e^{2x}$

$$\text{On a alors } F'(x) = (-a\sin(x) + b\cos(x))e^{2x} + (2a\cos(x) + 2b\sin(x))e^{2x} \\ = (2a+b)\cos(x) + (2b-a)\sin(x)e^{2x}$$

$$\text{donc } F' = f \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ 2b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 5b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2/5 \\ b=1/5 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \int \cos(x)e^{2x} dx = \boxed{\frac{2\cos(x) + \sin(x)}{5} e^{2x}}$$

(f) Idem; pour $f: x \mapsto x^2 e^{-2x}$ et $F: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$, on obtient

$$F'(x) = (2ax + b)e^{-2x} - (2ax^2 + 2bx + 2c)e^{-2x} = (-2ax^2 + (2a-2b)x + (b-2c))e^{-2x}$$

$$\text{donc } F' = f \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= -1/2 \\ b &= a = -1/2 \\ c &= b/2 = -1/4 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \int x^2 e^{-2x} dx = \boxed{\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x}}$$

On pourrait également calculer (d), (e) et (f) via des IPP... mais c'est encore plus pénible! Recherche la primitive sous une forme adéquate reste la meilleure méthode... lorsque c'est envisageable!

EX08

$$(a) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = x \end{cases}$$

On déduit alors de la formule d'IPP que

$$\int_1^2 \ln(x) dx = \left[x \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 1 dx = 2 \ln 2 - 0 - (2-1) = \boxed{2 \ln 2 - 1}$$

$$(b) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = \arctan(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1/(1+x^2) \\ v(x) = x \end{cases}$$

Via la formule d'IPP, on obtient

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \boxed{x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$$

$$(c) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On en déduit que

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = \boxed{\sin(x) - x \cos(x)}$$

$$(d) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \left[x \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2 dx}{1+x^2} = \ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$\text{Or } x^2 = x^2 + 1 - 1 \text{ donc } \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \text{ et } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \left[x - \arctan(x) \right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi } \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \boxed{\ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2}$$

$$(e) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{ax} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$$

Ainsi

$$\int x e^{ax} dx = \frac{x}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} dx = \boxed{\frac{x}{a} e^{ax} - \frac{e^{ax}}{a^2}}$$

$$(f) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^\alpha \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) \end{cases} \quad (\text{pour } \alpha \neq -1)$$

Alors

$$\int x^\alpha \ln(x) dx = \frac{x^{\alpha+1} \ln(x)}{\alpha+1} - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1} dx = \boxed{\frac{x^{\alpha+1} \ln(x)}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}}$$

$$(\text{Si } \alpha = -1) \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1/x \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$$

d'où

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx \text{ soit } \boxed{\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln(x))^2}$$

REM dans dernier cas, il est plus simple d'effectuer un COV

$$\begin{cases} u = \ln(x) \\ du = \frac{dx}{x} \end{cases} \text{ donc } \int \frac{\ln(x) dx}{x} = \int u du = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

EXU 9

Changement : $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt$

CDV / $u = t - T$
 $du = dt$ $\int_T^{a+T} f(t) dt = \int_0^a f(u+T) du = \int_0^a f(u) du$ car f T -périodique
 $= - \int_a^0 f(t) dt$

d'où $\boxed{\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt}$

EXU 10

(a) $u = \cos(x)$
 $du = -\sin(x) dx$ $\int \sin^3(x) dx = \int -\sin^2(x) \times (-\sin(x) dx) = \int (\cos^2(x) - 1) \times (-\sin(x) dx)$
 $= \int (u^2 - 1) du = \frac{u^3}{3} - u = \boxed{\frac{1}{3} \cos^3(x) - \cos(x)}$

(b) $u = \sqrt{x}$ soit $x = u^2$
 $dx = 2u du$ $\int x e^{\sqrt{x}} dx = \int u^2 e^u \times 2u du = 2 \int u^3 e^u du$

On recherche une primitive de $f: u \mapsto u^3 e^u$ sous la forme $F: u \mapsto (au^3 + bu^2 + cu + d)e^u$
 Alors $F'(u) = (3au^2 + 2bu + c)e^u + (au^3 + bu^2 + cu + d)e^u$
 $= [au^3 + (3a + b)u^2 + (2b + c)u + (c + d)]e^u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$

donc $F' = f \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3a = -3 \\ c = -2b = 6 \\ d = -c = -6 \end{cases}$

AINSI $F(u) = (u^3 - 3u^2 + 6u - 6)e^u$ donc $\int x e^{\sqrt{x}} dx = \boxed{2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)e^{\sqrt{x}}}$

(c) $x = \tan(u)$
 $dx = (1 + \tan^2(u)) du$ $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1 + \tan^2(u)) du}{(1 + \tan^2(u))^2} = \int \frac{du}{1 + \tan^2(u)} = \int \cos^2(u) du$
 Or $\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u) = 2\cos^2(u) - 1$ d'où $\boxed{\cos^2(u) = \frac{1 + \cos(2u)}{2}}$

De a fait $\int \cos^2(u) du = \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}$

d'au $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2u + \sin(2u)}{4} = \boxed{\frac{2 \arctan(x) + \sin(2 \arctan(x))}{4}}$

(d) $\left| \begin{array}{l} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x) dx \end{array} \right. \int \cos^2(x) \sin^3(x) dx = - \int \cos^2(x) \sin^2(x) \times (-\sin(x) dx)$
 $= - \int u^2(1-u^2) du = \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} = \boxed{\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3}}$

EXO 11

Notons $I = \int_{1/a}^a \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et effectuons un changement de variable

$\left| \begin{array}{l} u = 1/t \text{ soit } t = 1/u \\ dt = -du/u^2 \end{array} \right. \text{ Alors } I = \int_a^{1/a} \frac{\ln(1/u) \times (-du)/u^2}{1 + (1/u)^2} = \int_a^{1/a} \frac{\ln(u) du}{u^2 + 1} = -I$

d'au $2I = 0$ et $\boxed{I = 0}$

EXO 12

(a) CDV $u = \sqrt{1+x^2}$ Alors $u^2 = 1+x^2$ donc $2u du = 2x dx$ soit $u du = x dx$

AINSI $\int x \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+x^2} \times x dx = \int u \times u du = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2}}$

N.B.: le CDV $u = 1+x^2$ fonctionne aussi.

(b) CDV $u = \sqrt{2x+1}$ Alors $u^2 = 2x+1$ donc $x = \frac{u^2-1}{2}$ et $dx = u du$

d'au $\int x \sqrt{2x+1} dx = \int \frac{u^2-1}{2} \times u \times u du = \int \frac{u^4 - u^2}{2} du = \frac{u^5}{10} - \frac{u^3}{6}$

$= \boxed{\frac{\sqrt{2x+1}^5}{10} - \frac{\sqrt{2x+1}^3}{6}}$

(c) CDV $u = \sqrt{x+1}$ Alors $x = u^2 - 1$ et $dx = 2u du$

$$\text{d'où } \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{(u^2-1) 2u du}{u} = \int (2u^2-2) du = \frac{2u^3}{3} - 2u$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1}}$$

(d) CDV $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u du$

$$\text{Alors } \int \frac{x dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{u^2 \times 2u du}{u^2+u} = \int \frac{2u^2}{u+1} du$$

$$\text{or } 2u^2 = (u+1)(2u-2) + 2$$

$$\text{donc } \frac{2u^2}{u+1} = 2u-2 + \frac{2}{u+1} \text{ et } \int \frac{2u^2}{u+1} du = u^2 - 2u + 2 \ln(1+u)$$

$$\begin{array}{r|l} 2u^2 & u+1 \\ - (2u^2+2u) & 2u-2 \\ \hline -2u & \\ + (2u+2) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\text{Ainsi } \int \frac{x dx}{x+\sqrt{x}} = \boxed{x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1+\sqrt{x})}$$

(e) CDV $u = \sqrt{2-x}$ d'où $u^2 = 2-x$, $x = 2-u^2$ et $dx = -2u du$

$$\text{Alors } \int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}} = \int \frac{-2u du}{(2-u^2)u} = \int \frac{2 du}{u^2-2} \text{ avec } u^2-2 = (u+\sqrt{2})(u-\sqrt{2})$$

On cherche a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2}{u^2-2} = \frac{a}{u+\sqrt{2}} + \frac{b}{u-\sqrt{2}}$ pour $|u| \neq \sqrt{2}$

$$\text{or } \frac{a}{u+\sqrt{2}} + \frac{b}{u-\sqrt{2}} = \frac{a(u-\sqrt{2})+b(u+\sqrt{2})}{u^2-2} = \frac{(a+b)u+(b-a)\sqrt{2}}{u^2-2}$$

$$\text{Il faut donc que } \begin{cases} a+b=0 \\ (b-a)\sqrt{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 2b\sqrt{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1/\sqrt{2} \\ a=-1/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \int \frac{2 du}{u^2-2} = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}} \right) du = \frac{1}{\sqrt{2}} (\ln|u-\sqrt{2}| - \ln|u+\sqrt{2}|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}} \right|$$

$$\text{et } \int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}} \right|}$$

(f) CDV on pose $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ d'où $\frac{x-1}{x+1} = u^2$, $x-1 = u^2 x + u^2$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u(1-u^2) + 2u(1+u^2)}{(1-u^2)^2} = \frac{4u}{(1-u^2)^2}$$

$$x(1-u^2) = 1+u^2$$

$$x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

$$1+x^2 = 1 + \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2} = \frac{1-2u^2+u^4+1+2u^2+u^4}{(1-u^2)^2} = \frac{2(1+u^4)}{(1-u^2)^2}$$

$$\text{donc } \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4u du}{(1-u^2)^2} \times \frac{(1-u^2)^2}{2(1+u^4)} = \frac{2u du}{1+u^4}$$

$$\text{et } \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{2 \int \frac{u^2 du}{1+u^4}} \dots \text{la suite est hors-programme en BCPST...}$$

EXO 13

On va utiliser la propriété $\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f continue sur $[0,1]$

(a) Avec $f: x \mapsto 2x+1$, on obtient $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{k}{n}\right) + 1 = \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \times k + \sum_{k=1}^n 1$

Or $\sum_{k=1}^n 1 = n$ et $\sum_{k=1}^n \frac{2}{n} k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} = n+1$ (suite arithmétique...)

donc $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 2n+1$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$

AINSI $\boxed{\int_0^1 (2x+1) dx = 2}$

(b) Avec $f: x \mapsto e^x$, on a $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^k = e^{\frac{1}{n}} \frac{(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

Or $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$ et $n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \sim 1$

De plus, $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^0 = 1$ par composition de limites

si bien que

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (e-1)$ et $\boxed{\int_0^1 e^u du = e-1}$

(c) E désigne la fonction partie entière, qui vérifie $E(x) = n$ pour $n \leq x < n+1$ (avec $n \in \mathbb{Z}$). Ainsi $E(x) = 0$ pour $0 \leq x < 1$, $E(x) = 1$ pour $1 \leq x < 2$ et $E(2) = 2$. De la suite, on obtient :

• Pour $n = 2p$
$$\sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{E\left(\frac{k}{p}\right)}_{=0} + \sum_{k=p}^{2p-1} \underbrace{E\left(\frac{k}{p}\right)}_{=1} + \underbrace{E(2)}_{=2} = p \times 1 + 1 \times 2 = p+2 = \frac{n}{2} + 2$$

donc
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{\frac{n}{2} + 2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$$

• Pour $n = 2p+1$
$$\sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) = \sum_{k=1}^p \underbrace{E\left(\frac{2k}{2p+1}\right)}_{=0} + \sum_{k=p+1}^{2p} \underbrace{E\left(\frac{2k}{2p+1}\right)}_{=1} + \underbrace{E(2)}_{=2} = p \times 1 + 1 \times 2 = p+2 = \frac{n-1}{2} + 2$$

donc
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{\frac{n-1}{2} + 2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n}$$

Ces expressions montrent que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ d'où
$$\boxed{\int_0^1 E(2z) dz = \frac{1}{2}}$$

EXO 14

Il faut reconnaître ou faire apparaître des sommes de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

(a)
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f: x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

Comme f est continue sur $[0,1]$,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln(2)}$$

(b)
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

(c)
$$\ln\left(\frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n+k)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^n \ln\left((n+k)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k)$$

or $\ln(n+k) = \ln\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ donc
$$\sum_{k=1}^n \ln(n+k) = n \ln(n) + \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

d'où
$$\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) = -\ln(n) + \ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

Comme $f: x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx$

IPP en posant $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) & \text{et} & u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ v'(x) = 1 & & v(x) = 1+x \end{cases}$

de sorte que $\int_0^1 \ln(1+x) dx = \left[(1+x) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx = 2\ln(2) - 1$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n})^{1/n}\right) = 2\ln 2 - 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n})^{1/n} = e^{2\ln 2 - 1} = \boxed{\frac{4}{e}}$

(d) $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$

EXO 15

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{2n+k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n(2+\frac{k}{n})}{n^2(1+\frac{k^2}{n^2})} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f: x \mapsto \frac{2+x}{1+x^2}$ sur $[0,1]$

Pour cela, $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{2 dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{t dt}{1+t^2} = 2 \left[\arctan(t) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\ln(1+t^2) \right]_0^1$
 $= 2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n+k}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$

(b) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$... intégrale H-P en BCPST

(c) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\arcsin(t) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

EXO 1 (ON RÉDIGE UN PEU!)

(a). (E.H.) $y' + 2y = 0$: $a(t) = 2$ donc $A(t) = 2t \Rightarrow g_c: t \mapsto Ce^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P.) $y_0(t) = K$: alors $y'_0 + 2y_0 = 8 \Leftrightarrow 0 + 2K = 8 \Leftrightarrow K = 4$

• CONCLUSION : les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $f: t \mapsto Ce^{-2t} + 4$ avec $C \in \mathbb{R}$

(b). Même équation homogène $\Rightarrow$ solutions de la forme $g_c: t \mapsto Ce^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P.) : on recherche sous la forme $y_0(t) = at^2 + bt + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

Alors $y'_0(t) = 2at + b$ et $y'_0(t) + 2y_0(t) = 2at^2 + (2a + 2b)t + (b + 2c)$

donc y_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + 2b = -1 \\ b + 2c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3/2 \\ c = 9/4 \end{cases}$

Ainsi $y_0(t) = t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}$

• CONCLUSION : les solutions de l'équation sont toutes les fonctions

de la forme $f: t \mapsto Ce^{-2t} + t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(c). Même équation homogène $\Rightarrow$ solutions de la forme $g_c: t \mapsto Ce^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P.) : on recherche sous la forme $y_0(t) = a \sin(t) + b \cos(t)$ avec a et $b \in \mathbb{R}$

Alors $y'_0(t) = a \cos(t) - b \sin(t)$ donc $y'_0(t) + 2y_0(t) = (2a - b) \sin(t) + (2b + a) \cos(t)$

donc y_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 2 \\ 2b + a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b = 4 \\ 5a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3/5 \\ b = -4/5 \end{cases}$

Ainsi $y_0(t) = \frac{3}{5} \sin(t) - \frac{4}{5} \cos(t)$

• CONCLUSION : les ⁵solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme

$f: t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{3 \sin(t) - 4 \cos(t)}{5}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(d). (E.H.) : $y' - 3y = 2$

On a $a(t) = -3$ et $A(t) = -3t$ donc les solutions sont toutes les fonctions de la forme $g_c : t \mapsto Ce^{3t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P.) : on recherche sous la forme $y_0 = K$. Alors $y'_0 - 3y_0 = -3K$

donc y_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow -3K = 2 \Leftrightarrow K = -2/3$. Ainsi $y_0(t) = -2/3$

• CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $f : t \mapsto Ce^{3t} - 2/3$ avec $C \in \mathbb{R}$

(e). (E.H.) : $y' + 2y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c : t \mapsto Ce^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P.) : $y_0(t) = Ke^{2t} \Rightarrow y'_0(t) + 2y_0(t) = 4Ke^{2t}$

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow 4K = 1 \Leftrightarrow K = 1/4$. Ainsi $y_0 : t \mapsto \frac{1}{4}e^{2t}$

• CONCLUSION solutions de (E) $f : t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(f). (E.H.) : $y' + y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c : t \mapsto Ce^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP1) pour $y' + y = e^{3t}$: $y_1(t) = Ke^{3t} \Rightarrow y'_1(t) + y_1(t) = 4Ke^{3t}$

Il faut que $4K = 1$ soit $K = 1/4$ et $y_1 : t \mapsto \frac{1}{4}e^{3t}$

• (SP2) pour $y' + y = 2\sin(t)$: $y_2(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$

$\Rightarrow y'_2(t) + y_2(t) = (a+b)\cos(t) + (a-b)\sin(t)$

Il faut que $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases}$ soit $a=1$ et $b=-1$ d'où $y_2 : t \mapsto \sin(t) - \cos(t)$

• (SP3) pour $y' + y = t^2$: $y_3(t) = at^2 + bt + c$

$\Rightarrow y'_3(t) + y_3(t) = at^2 + (b+2a)t + (c+b)$

Il faut que $\begin{cases} a=1 \\ b+2a=0 \\ c+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$ d'où $y_3 : t \mapsto t^2 - 2t + 2$

• CONCLUSION d'après le principe de superposition des solutions, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$f : t \mapsto Ce^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} + \sin(t) - \cos(t) + t^2 - 2t + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$

(g). (E.H): $y' + 3y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{-3t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P): $y_0(t) = K e^t \Rightarrow y_0'(t) + 3y_0(t) = 4K e^t$

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow 4K = 1 \Leftrightarrow K = 1/4$. Ainsi $y_0: t \mapsto \frac{1}{4} e^t$

• CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $f: t \mapsto C e^{-3t} + \frac{1}{4} e^t$ avec $C \in \mathbb{R}$

(h). (E.H): $y' - 3y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{3t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P): $y_0(t) = P(t) e^{-t} \Rightarrow y_0'(t) - 3y_0(t) = P'(t) e^{-t} - P(t) e^{-t} - 3P(t) e^{-t} = (P'(t) - 4P(t)) e^{-t}$

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow P'(t) - 4P(t) = t^3 + 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

On pose alors $P(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d$ de sorte que $P'(t) = 3a t^2 + 2b t + c$

$$\text{et } P'(t) - 4P(t) = -4a t^3 + (3a - 4b) t^2 + (2b - 4c) t + (c - 4d)$$

$$\text{Il faut donc que } \begin{cases} -4a = 1 \\ 3a - 4b = 0 \\ 2b - 4c = 0 \\ c - 4d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/4 \\ b = -3/16 \\ c = b/2 = -3/32 \\ d = \frac{c-1}{4} = -35/128 \end{cases}$$

$$\text{d'où } P(t) = -\frac{t^3}{4} - \frac{3t^2}{16} - \frac{3t}{32} - \frac{35}{128} \text{ et } y_0(t) = -\left(\frac{t^3}{4} + \frac{3t^2}{16} + \frac{3t}{32} + \frac{35}{128}\right) e^{-t}$$

• CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme

$$f: t \mapsto C e^{3t} - \left(\frac{t^3}{4} + \frac{3t^2}{16} + \frac{3t}{32} + \frac{35}{128}\right) e^{-t} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

(i). (E.H): $y' + y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P): $y_0(t) = a \cos(t) + b \sin(t) \Rightarrow y_0'(t) + y_0(t) = (a+b) \cos(t) + (b-a) \sin(t)$

$$\text{donc } y_0 \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1/2 \\ a=-1/2 \end{cases}$$

$$\text{soit } y_0(t) = \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2}$$

• CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $f: t \mapsto C e^{-t} + \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

EXO 2 (MÊME RÉDACTION)

(a). (E.H.) $y' - 5y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto Ce^{5t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)e^{5t} \Rightarrow y'_0(t) = C'(t)e^{5t} + 5C(t)e^{5t}$

d'où $y'_0(t) - 5C(t)e^{5t} = C'(t)e^{5t}$

et y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = 1$. On peut prendre $C(t) = t$
si bien que $y_0: t \mapsto te^{5t}$

• CONCLUSION

les solutions de l'équation sont toutes les fonctions
de la forme $f: t \mapsto (C+t)e^{5t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(b). (E.H.) $y' - y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto Ce^t$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)e^t \Rightarrow y'_0(t) = C'(t)e^t + C(t)e^t$

d'où $y'_0(t) - y_0(t) = C'(t)e^t$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = t^2 + 1$. On peut prendre $C(t) = \frac{t^3}{3} + t$
si bien que $y_0: t \mapsto (\frac{t^3}{3} + t)e^t$

• CONCLUSION

les solutions de l'équation sont toutes les fonctions
de la forme $f: t \mapsto (\frac{t^3}{3} + t + C)e^t$ avec $C \in \mathbb{R}$

(c). (E.H.) $y' + 2y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto Ce^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)e^{-2t} \Rightarrow y'_0(t) = C'(t)e^{-2t} - 2C(t)e^{-2t}$

donc $y'_0(t) + 2y_0(t) = C'(t)e^{-2t}$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = \cos(t)$. On peut prendre $C(t) = \sin(t)$
si bien que $y_0: t \mapsto \sin(t)e^{-2t}$

• CONCLUSION

les solutions de l'équation sont toutes les
fonctions $f: t \mapsto (\sin(t) + C)e^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(d). (E.H.) $y' - y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto Ce^t$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP1) pour $y' - y = 2\sin(t)$: $y_1(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$

On obtient $y'_1(t) - y_1(t) = (b-a)\cos(t) - (a+b)\sin(t)$

donc y_1 solution de (E1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -a-b=2 \\ b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=-1$

Ainsi $y_1(t) = -\cos(t) - \sin(t)$

• (SP2) pour $y' - y = \frac{e^t}{t^2 + 1}$: $y_2(t) = C(t)e^t$

Alors $y_2'(t) - y_2(t) = C'(t)e^t$ donc y_2 solution de $(E_2) \Leftrightarrow C'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

On peut prendre $C(t) = \arctan(t)$ d'où $y_2(t) = \arctan(t)e^t$

• CONCLUSION d'après le principe de superposition des solutions, les solutions de l'équation sont les fonctions

$$f: t \mapsto Ce^t - \cos(t) - \sin(t) + \arctan(t)e^t \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

(e) • (E.H.) $y' + y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto Ce^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP1) pour $y' + y = (t+2)e^t$: $y_1 = (at+b)e^t$

Alors $y_1'(t) + y_1(t) = ae^t + (at+b)e^t = (2a + a + b)t + (a + 2b)e^t = (2a + a + b)t + (a + 2b)e^t$

donc y_1 solution de $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/4 \end{cases}$

AINSI $y_1: t \mapsto \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^t$

• (SP2) pour $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$: $y_2(t) = C(t)e^{-t}$

Alors $y_2'(t) + y_2(t) = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = C'(t)e^{-t}$

donc y_2 solution de $(E_2) \Leftrightarrow C'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}$

$\Leftrightarrow C'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$: on peut prendre $C(t) = \ln(1+e^t)$

AINSI $y_2: t \mapsto \ln(1+e^t)e^{-t}$

• CONCLUSION d'après le principe de superposition des solutions, les solutions sont toutes les fonctions

$$f: t \mapsto Ce^{-t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^t + \ln(1+e^t)e^{-t} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

(f) • (E.H.) $y' - y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto Ce^t$

• (SP) $y_0(t) = C(t)e^t \Rightarrow y_0'(t) - y_0(t) = C'(t)e^t$

AINSI y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et on peut prendre $C(t) = \arcsin(t)$

• CONCLUSION

$$f: t \mapsto (\arcsin(t) + C)e^t \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

EXO 3

(1). Soit f une telle fonction. On pose $g: x \mapsto f(x)f(-x)$: la fonction g est dérivable et $g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$

$$= f'(x)f(-x) - f'(-x)f(-(-x)) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{donc } g(x) = c^{\text{te}} = f(0)^2$$

QUESTION: $f(0)$ peut-il être nul ?

• En outre $f'(x)f(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(0)f(0) = 1 \Rightarrow f(0) \neq 0$

$$\text{Ainsi } g(x) = f(x)f(-x) = f(0)^2 \neq 0$$

et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f'(x)f(-x) = 1 \\ f(x)f(-x) = f(0)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{f(0)^2} \text{ et } f'(x) = \frac{1}{f(0)^2} f(x)$$

• On déduit de cette (E.H.) que $f(x) = C e^{\frac{x}{f(0)^2}} = C e^{\frac{x}{c^2}}$ avec $C = f(0) \in \mathbb{R}^*$

(2) Réciproquement, si $f: x \mapsto C e^{\frac{x}{c^2}}$ avec $C \in \mathbb{R}^*$, on a bien une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{c} e^{\frac{x}{c^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\text{si bien que } f'(x)f(x) = \frac{1}{c} e^{\frac{x}{c^2}} \times C e^{-\frac{x}{c^2}} = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

EXO 4

1) Pour $x=y=0$ on obtient $f(0) = f(0)^2$. Or $x = x^2 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou 1 .
De ce fait, on a nécessairement $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

2) Fixons $y \in \mathbb{R}$ et dérivons la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à x .

$$\text{On obtient : } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x+y) = f'(x) \times f(y)$$

$$\text{d'où pour } x=0 \quad f'(y) = f'(0) \times f(y)$$

Ceci étant valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, il vient

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f'(y) = f'(0) f(y)$$

3) De ce fait $f: y \mapsto C e^{f'(0)y}$ avec $C = f(0) \in \{0, 1\}$ et $f'(0) \in \mathbb{R}$

d'où

$$f = 0$$

ou

$$f: y \mapsto e^{\alpha y}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ || ON VÉRIFIE QUE CES FONCTIONS SATISFAIT L'EQUATION INITIALE

EX05

- On effectue le changement de fonction inconnue $z = 1/y$ soit $y = 1/z$, avec z inconnue

$$y' = y(1-y) \Leftrightarrow \frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow -z' = z - 1$$

$$\Leftrightarrow z' + z = 1$$

- (E.H.) $z' + z = 0 \leadsto g_c: t \mapsto C e^{-t}$
- (S.P.) $z_0(t) = K \leadsto K = 1$ donc $z_0(t) = 1$
- CONCLUSION $z: t \mapsto C e^{-t} + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$

- AINSI les solutions de l'équation initiale sont les fonctions

$$y: t \mapsto \frac{1}{C e^{-t} + 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Ce changement de fonction est très classique et parfaitement adapté aux EQUATIONS DE BERNOULLI, qui sont de la forme $y' = ay + by^2$

EX06 (MAINTENANT $a(t)$ N'EST PLUS CONSTANCE)

- (a). (E.H.): $y' + t y = 0 \leadsto a(t) = t, A(t) = \frac{-t^2}{2} \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{-t^2/2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

- (S.P.) $y_0(t) = at^2 + bt + c$. Alors $y'_0(t) + t y_0(t) = 2at + b + t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + (2a+c)t + b$

$$\text{donc } y_0 \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ 2a+c=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1, b=0 \text{ et } c=-2.$$

Ainsi $y_0: t \mapsto t^2 - 2$

- CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $f: t \mapsto C e^{-t^2/2} + t^2 - 2$ avec $C \in \mathbb{R}$

- (b). (E.H.): $y' + 3t^2 y = 0 \leadsto a(t) = 3t^2, A(t) = t^3 \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{-t^3}$ avec $C \in \mathbb{R}$

- (SP1) pour $y' + 3t^2 y = t^3$: $y_1(t) = K$. Alors $y'_1 + 3t^2 y_1 = 3Kt^2$ donc y_1 solution $\Leftrightarrow K = 1/3$

- (SP2) pour $y' + 3t^2 y = e^{-t^3}$: $y_2(t) = C(t) e^{-t^3}$. Alors $y'_2(t) = C'(t) e^{-t^3} - 3t^2 C(t) e^{-t^3}$
soit $y'_2(t) + 3t^2 y_2(t) = C'(t) e^{-t^3}$

donc y_2 solution $\Leftrightarrow C'(t) = 1$: on peut prendre $C(t) = t$ soit $y_2(t) = t e^{-t^3}$

• CONCLUSION : d'après le principe de superposition, les solutions sont les fonctions $f: t \mapsto (t+C)e^{-t^3} + \frac{1}{3}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(c) • (E.H) $y' + \tan(t)y = 0 \leadsto a(t) = \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ et $A(t) = -\ln|\cos(t)|$

donc les solutions sont les fonctions $g_C: t \mapsto Ce^{\pm \ln|\cos(t)|} = \pm C \cos(t)$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P) $y_0(t) = C(t) \cos(t)$. Alors $y_0'(t) + \tan(t)y_0(t) = C'(t) \cos(t) - C(t) \sin(t) + C(t) \sin(t)$

donc y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t) \cos(t) = \sin(t) \Leftrightarrow C'(t) = \tan(t) = a(t)$

On peut prendre $C(t) = A(t) = -\ln|\cos(t)|$ soit $y_0: t \mapsto -\ln|\cos(t)| \cos(t)$

• CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions $f: t \mapsto (-\ln|\cos(t)| + C) \cos(t)$ avec $C \in \mathbb{R}$

REMARQUE : cette résolution n'est valable que sur un intervalle de la forme $] -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, pour que l'équation soit bien définie !!!

(d) On résout l'équation sur $]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$, pour pouvoir diviser par t et obtenir

$y' - \frac{1}{t}y = te^t$

• (E.H) $y' - \frac{1}{t}y = 0 \leadsto a(t) = -\frac{1}{t}$, $A(t) = -\ln|t| \Rightarrow$ solutions $g_C: t \mapsto Ce^{\ln|t|} = \pm Ct$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P) $y_0(t) = C(t)t$. Alors $y_0'(t) - \frac{1}{t}y_0(t) = C'(t)t + C(t) - C(t) = C'(t)t$

donc y_0 est solution $\Leftrightarrow C'(t)t = te^t \Leftrightarrow C'(t) = e^t$. On peut prendre $C(t) = e^t$

si bien que $y_0: t \mapsto te^t$

CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions $f: t \mapsto (e^t + C)t$ avec $C \in \mathbb{R}$

REMARQUE : en toute rigueur, les solutions sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle sont toutes les fonctions $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$t \mapsto \begin{cases} (e^t + C_1)t & \text{si } t < 0 \\ (e^t + C_2)t & \text{si } t > 0 \end{cases}$

avec C_1 et C_2 deux constantes réelles (pas forcément égales)

(e) On résout l'équation sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$ pour pouvoir diviser par $(1-t^2)$ et obtenir
$$y' - \frac{2t}{1-t^2} y = \frac{1}{1-t^2}$$

• (E.H.) $y' - \frac{2t}{1-t^2} y = 0 \leadsto a(t) = \frac{-2t}{1-t^2}$ et $A(t) = \ln|1-t^2|$
 $\Rightarrow$ solutions $g_C: t \mapsto C e^{-\ln|1-t^2|} = \frac{\pm C}{1-t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P.) $y_0(t) = \frac{C(t)}{1-t^2}$. Alors $y'_0(t) - \frac{2t}{(1-t^2)} y_0(t) = \frac{C'(t)}{1-t^2} + \frac{2t C(t)}{(1-t^2)^2} - \frac{2t C(t)}{(1-t^2)^2} = \frac{C'(t)}{1-t^2}$

d'où y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = 1$. On peut prendre $C(t) = t$ soit $y_0(t) = \frac{t}{1-t^2}$

• CONCLUSION Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $f: t \mapsto \frac{t+C}{1-t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

En toute rigueur, les solutions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ sont les fonctions $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{t+C_1}{1-t^2} & \text{si } t < -1 \\ \frac{t+C_2}{1-t^2} & \text{si } -1 < t < 1 \\ \frac{t+C_3}{1-t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On peut alors chercher les valeurs de C_1, C_2 et C_3 pour lesquelles les fonctions se prolongent en 1 et/ou en -1

avec C_1, C_2 et C_3 trois constantes réelles

(f) L'équation s'écrit
$$y' - \frac{t}{1+t^2} y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
 après division par $1+t^2$

• (E.H.) $y' - \frac{t}{1+t^2} y = 0 \leadsto a(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ et $A(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2)$

Les solutions sont les fonctions $g_C: t \mapsto C e^{\frac{1}{2} \ln(1+t^2)} = C \sqrt{1+t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P.) $y_0(t) = C(t) \sqrt{1+t^2}$. Alors $y'_0(t) - \frac{t}{1+t^2} y_0(t) = C'(t) \sqrt{1+t^2} + \frac{t C(t)}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t C(t)}{\sqrt{1+t^2}}$

d'où y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t) \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Leftrightarrow C'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

On peut prendre $C(t) = \arctan(t)$ soit $y_0(t) = \arctan(t) \sqrt{1+t^2}$

• CONCLUSION Les solutions de l'équation sont les fonctions $f: t \mapsto (\arctan(t) + C) \sqrt{1+t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

EXO 7 (AVEC LES RECHERCHES DE PROLONGEMENT, ÇA DEVIENT LONG!)

(a) On résout l'équation sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$: elle s'écrit $y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t}$

• (E.H.) $y' + \frac{1}{t}y = 0 \rightsquigarrow a(t) = \frac{1}{t}$, $A(t) = \ln|t| \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{-\ln|t|} = \frac{C}{|t|} = \pm \frac{C}{t}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)/t$. Alors $y'_0(t) = \frac{tC'(t) - C(t)}{t^2} = \frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2}$ donc $y'_0(t) + \frac{1}{t}y_0(t) = \frac{C'(t)}{t}$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = 1$: on peut prendre $C(t) = t$ soit $y_0(t) = 1$!

C'est Mabin, on aurait pu s'en apercevoir plus tôt, ah là là !

CONCLUSION les solutions de l'équation sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $f: t \mapsto \frac{C}{t} + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$

SOLUTIONS MAXIMALES

Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions $f: t \mapsto \begin{cases} \frac{C}{t} + 1 & \text{si } t > 0 \\ \frac{D}{t} + 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ avec C et $D \in \mathbb{R}$. Peut-on les prolonger en 0 ?

Pour que f ait une limite finie en 0^+ , il faut nécessairement que $C = 0$. De même, $D = 0$ pour la limite en 0^- . Alors $f: t \mapsto 1$, qui est bien solution !

$\Rightarrow$ la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction $f: t \mapsto 1$

(b) On résout l'équation sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$: elle s'écrit $y' - \frac{2}{t}y = t^2$

• (E.H.) $y' - \frac{2}{t}y = 0 \Rightarrow a(t) = -\frac{2}{t}$, $A(t) = -2 \ln|t| \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{2 \ln|t|} = C t^2$

• (SP) $y_0(t) = K t^3$. Alors $y'_0(t) - \frac{2}{t}y_0(t) = 3K t^2 - 2K t^2 = K t^2$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow K = 1$ c'est-à-dire $y_0(t) = t^3$

CONCLUSION les solutions de l'équation sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$ sont les fonctions $f: t \mapsto C t^2 + t^3$ avec $C \in \mathbb{R}$

SOLUTIONS MAX les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions $f: t \mapsto \begin{cases} C t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \\ D t^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ avec C et $D \in \mathbb{R}$

Les fonctions se prolongent en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0} (ct^2 + t^3) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} (Dt^2 + t^3)$ quels que soient les réels C et D . On pose ainsi $f(0) = 0$

De plus, le prolongement est encore dérivable en 0 car

$$\begin{cases} \forall t > 0 & \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = ct + t^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \\ \forall t < 0 & \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = Dt + t^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 0 \end{cases} \text{ si bien que } f'(0) = 0$$

Ainsi

les solutions maximales de (E) sont les fonctions

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} ct^2 + t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ Dt^2 + t^3 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \text{ avec } C, D \in \mathbb{R}$$

(c) On résout l'équation sur $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$: elle s'écrit $y' - \frac{1}{1-t} y = \frac{t}{1-t}$

- (E.H.): $y' - \frac{1}{1-t} y = 0 \rightsquigarrow a(t) = \frac{-1}{1-t}$, $A(t) = \ln|t-1| \Rightarrow$ solutions $g_C: t \mapsto C e^{-\ln|t-1|} = \frac{C}{|t-1|}$
- (SP): $y_0(t) = \frac{C(t)}{t-1}$. Alors $y_0'(t) = \frac{C'(t)}{t-1} - \frac{C(t)}{(t-1)^2}$ soit $y_0'(t) - \frac{1}{1-t} y_0(t) = \frac{C'(t)}{t-1}$

Ainsi y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = -t$: on peut prendre $C(t) = -\frac{t^2}{2}$ soit $y_0(t) = \frac{-t^2}{2(t-1)}$

..CONCLUSION

les solutions de l'équation sur $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ sont les fonctions $f: t \mapsto \frac{C}{t-1} - \frac{t^2}{2(t-1)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

SOLUTIONS MAXIMALES

Les solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sont les fonctions $f: t \mapsto \begin{cases} \frac{C}{t-1} - \frac{t^2}{2(t-1)} & \text{si } t > 1 \\ \frac{D}{t-1} - \frac{t^2}{2(t-1)} & \text{si } t < 1 \end{cases}$ avec $C, D \in \mathbb{R}$ deux constantes réelles.

Examinons les limites en 1: pour $t > 1$, $f(t) = \frac{2C - t^2}{2(t-1)}$ donc $f(t) \rightarrow \pm\infty$ si $2C \neq 1$ et pour $C = \frac{1}{2}$, il vient $f(t) = \frac{1-t^2}{2(t-1)} = -\frac{(t+1)}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 1} -1$

Même chose à gauche: f admet une limite finie en 1 si $D = \frac{1}{2}$, auquel cas $f: t \mapsto -\frac{t+1}{2}$

Ainsi

la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est $f: t \mapsto -\frac{t+1}{2}$

(d). On résout l'équation sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$: elle s'écrit $y' - \frac{1}{t^2}y = 0$

C'est une équation homogène, ça ira vite!

On a ici $a(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $A(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto Ce^{-1/t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

SOLUTIONS MAXIMALES

les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions $f: t \mapsto \begin{cases} Ce^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ D e^{-1/t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$
avec $C, D \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} * \lim_{t \rightarrow 0^+} -1/t = -\infty \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0 \text{ (composition)} \end{cases}$

$\begin{cases} * \lim_{t \rightarrow 0^-} -1/t = +\infty \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 0^-} e^{-1/t} = +\infty: \text{ ainsi, } f \text{ n'a une limite finie en } 0^- \text{ que si } D=0 \end{cases}$

On peut prolonger f en 0 dans ce cas et on obtient

$$f: t \mapsto \begin{cases} Ce^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Il reste à vérifier que cette fonction est dérivable en 0

$\begin{cases} * \text{ Pour } t < 0, f(t) = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 0 \end{cases} \quad (f(0) = 0)$

$\begin{cases} * \text{ Pour } t > 0, \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{1}{t} e^{-1/t} = -(-1/t) e^{-1/t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$
car $\lim_{t \rightarrow 0^+} -1/t = -\infty$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

EXO 8 (ENCORE UN EXERCICE LONG)

On résout cette équation homogène sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$: elle s'écrit $y' - \frac{\alpha}{t^M} y = 0$

Si $M=1$

⚠ J'AVAIS OUBLIÉ QUE $\alpha > 0$ DANS L'ÉNONCÉ avec $\alpha > 0$ et $M \in \mathbb{N}^*$
DU COUP LES CAS $\alpha=0$ ET $\alpha < 0$ SONT INUTILES

$a(t) = -\alpha/t^M$ et $A(t) = -\alpha \ln|t| \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{\alpha \ln|t|} = C|t|^\alpha$
avec $C \in \mathbb{R}$

Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont alors les fonctions

$$f: t \mapsto \begin{cases} C t^\alpha & \text{si } t > 0 \\ D (-t)^\alpha & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Si $\alpha < 0$, f ne se prolonge en 0 que si $C=D=0$
car $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^-} (-t)^\alpha = +\infty$

donc dans le cas $\alpha < 0$, la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est $f: t \mapsto 0$

• Si $\alpha = 0$, alors $f: t \mapsto \begin{cases} C & \text{si } t > 0 \\ D & \text{si } t < 0 \end{cases}$ se prolonge en 0 uniquement si $D = C$

Dans ce cas, les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes $f: t \mapsto C$

• Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ donc f se prolonge en 0 en posant $f(0) = 0$

Mais pour la dérivabilité en 0, comme $\frac{f(t)}{t} = \begin{cases} C t^{\alpha-1} & \text{si } t > 0 \\ D(-t)^{\alpha-1} & \text{si } t < 0 \end{cases}$, on en déduit que

- si $0 < \alpha < 1$, f n'est dérivable en 0 que pour $C = D = 0$. De ce fait, la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est $f: t \mapsto 0$
- si $\alpha = 1$, f n'est dérivable en 0 que pour $C = -D$. De ce fait, les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f: t \mapsto Ct$ avec $C \in \mathbb{R}$
- si $\alpha > 1$, $\frac{f(t)}{t} \rightarrow 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions avec C et D deux constantes réelles.

$$f: t \mapsto \begin{cases} C t^\alpha & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ D(-t)^\alpha & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Si $n > 1$

et $\alpha > 0$

$a(t) = -\alpha t^{-n}$ et $A(t) = -\frac{\alpha}{1-n} t^{1-n} \Rightarrow$ solutions $g_c: t \mapsto C e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont alors les fonctions $f: t \mapsto \begin{cases} C e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}} & \text{si } t > 0 \\ D e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}} & \text{si } t < 0 \end{cases}$ avec C et D deux réels. Examinons le prolongement en 0.

Pour $n > 1$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-n} = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha \frac{t^{1-n}}{1-n} = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0 \quad \forall C \in \mathbb{R}$

De même, $\lim_{t \rightarrow 0^-} \alpha \frac{t^{1-n}}{1-n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair (1-n pair donc } t^{1-n} \rightarrow +\infty) \\ +\infty & \text{si } n \text{ pair (1-n impair donc } t^{1-n} \rightarrow -\infty) \end{cases}$

donc $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0 \quad \forall D$ si n impair / $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$ admet une limite $< \infty$ (qui sera 0) uniquement pour $D = 0$ si n pair

Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont donc :

* si n est impair

$$f: t \mapsto \begin{cases} C e^{\alpha \frac{t^{1+n}}{1+n}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ D e^{\alpha \frac{t^{1+n}}{1+n}} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

* si n est pair

$$f: t \mapsto \begin{cases} C e^{\alpha \frac{t^{1+n}}{1+n}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Les fonctions sont bien dérivables en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0$ par croissances comparées (à détailler à l'aide du changement de variables $u = t^{1+n}$)

EXO 9 (ON RETROUVE DES ÉQUATIONS UN PEU PLUS HUMAINES!)

(a). (EH) $y' + \cos(t)y = 0 \leadsto a(t) = \cos(t)$ et $A(t) = \sin(t)$
 solutions $y: t \mapsto C e^{-\sin(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(SP) $y_0(t) = C(t) e^{-\sin(t)}$. Alors $y_0'(t) = C'(t) e^{-\sin(t)} - C(t) \cos(t) e^{-\sin(t)}$
 d'où $y_0'(t) + \cos(t) y_0(t) = C'(t) e^{-\sin(t)}$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) e^{-\sin(t)} = \sin(t) \cos(t)$
 $\Leftrightarrow C'(t) = \cos(t) \sin(t) e^{\sin(t)}$

Alors $C(t) = \int \sin(t) e^{\sin(t)} \cos(t) dt = \int u e^u du$ CDV $\begin{cases} u = \sin(t) \\ du = \cos(t) dt \end{cases}$

Primitive de $u e^u$: $F(u) = (au+b)e^u$ pour $u \in \mathbb{R}$
 $F'(u) = a e^u + (au+b)e^u = (au + a+b)e^u$

d'où $F'(u) = u e^u \Leftrightarrow a = 1$ et $a+b = 0 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = -1$

soit $F(u) = (u-1)e^u$.

Dans notre cas, on a donc $C(t) = (u-1)e^u = (\sin(t)-1)e^{\sin(t)}$ d'où $y_0: t \mapsto \sin(t)-1$

. CONCLUSION solutions $f: t \mapsto C e^{-\sin(t)} + \sin(t) - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$

(b) Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $(E) \Leftrightarrow y' + y \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = e^{-t} \cos(t)$

• (E.H.) $y' + \frac{\sin(t)}{\cos(t)} y = 0 \leadsto a(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ et $A(t) = -\ln(\cos t)$

solutions $g: t \mapsto C e^{\ln(\cos t)} = C \cos t$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t) \cos(t)$. Alors $y_0'(t) = C'(t) \cos(t) - C(t) \sin(t)$

donc $y_0'(t) + \frac{\sin(t)}{\cos(t)} y_0(t) = C'(t) \cos(t) - C(t) \sin(t) + C(t) \sin(t) = C'(t) \cos(t)$

AINSI y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow C'(t) = e^{-t}$: on peut prendre $C(t) = -e^{-t}$ soit $y_0(t) = -e^{-t} \cos(t)$

• CONCLUSION solutions $\boxed{f: t \mapsto (C - e^{-t}) \cos(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(c) Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ $(E) \Leftrightarrow y' + \frac{y}{\tan t} = \frac{\sin t}{\tan t} \Leftrightarrow y' + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} y = \cos(t)$

• (E.H.) $y' + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} y = 0 \leadsto a(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ et $A(t) = \ln(\sin t)$

solutions $g: t \mapsto C e^{-\ln(\sin t)} = C / \sin(t)$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t) / \sin(t)$. Alors $y_0'(t) = \frac{C'(t)}{\sin(t)} - \frac{C(t) \cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{C'(t)}{\sin(t)} - y_0(t) \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

donc $y_0'(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} y_0(t) = \frac{C'(t)}{\sin(t)}$

AINSI y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow C'(t) = \sin(t) \cos(t)$: on peut prendre $C(t) = \frac{1}{2} \sin^2(t)$

soit $y_0(t) = \frac{1}{2} \sin(t)$

CONCLUSION solutions $\boxed{f: t \mapsto \frac{C}{\sin(t)} + \frac{1}{2} \sin(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Pour cette équation, on obtient même une solⁿ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$... pas surprenant car l'équation $y' + \frac{\cos t}{\sin t} y = \cos t$ est définie sur cet intervalle

POUR LES ÉQUATIONS (b) & (c), ON S'EST CONTENTÉS ICI DE LA RÉOLUTION SUR UN INTERVALLE ... ON PEUT ÉVIDEMMENT RECHERCHER DES SOLUTIONS MAXIMALES

EXO 10 (UNE DERNIÈRE RECHERCHE DE SOLUTION MAXIMALE ?)

• Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ $(E) \Leftrightarrow y' + \frac{1}{2t}y = \frac{1}{2t(t+1)}$

On va résoudre (E) sur $]0, +\infty[$, $] -1/2, 0[$ et $] -\infty, -1[$. Commençons par $]0, +\infty[$

• (EH) $y' + \frac{1}{2t}y = 0 \leadsto a(t) = \frac{1}{2t}$ et $A(t) = \frac{1}{2} \ln(t)$

Solutions $g_c: t \mapsto c e^{-\frac{1}{2} \ln(t)} = \frac{c}{\sqrt{t}}$ avec $c \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)/\sqrt{t}$ Alors $y'_0(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{C(t)}{2\sqrt{t}} = \frac{C'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}y_0(t)$

d'où $y'_0(t) + \frac{1}{2t}y_0(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{t}}$. D'où fait, y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t(t+1)} = \frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)}$

Ainsi $C(t) = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}(t+1)} = \int \frac{2u du}{2u(u^2+1)} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(u) = \arctan(\sqrt{t})$

et $y_0: t \mapsto \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$

avec la C.D.V $\begin{cases} u = \sqrt{t} \\ t = u^2 \\ dt = 2u du \end{cases}$

• CONCLUSION solutions sur $]0, +\infty[$ $f: t \mapsto \frac{C + \arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Et maintenant passons à $] -1/2, 0[$

• (EH) $\leadsto$ on a $\ln|t|$ au lieu de $\ln(t)$, ce qui mène à $g_c: t \mapsto \frac{c}{\sqrt{|t|+1}} = \frac{c}{\sqrt{-t}}$

(SP) $y_0(t) = C(t)/\sqrt{-t}$ Alors $y'_0(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{-t}} + \frac{C(t)}{2(-t)\sqrt{-t}} = \frac{C'(t)}{\sqrt{-t}} - \frac{1}{2t}y_0(t)$

d'où $y'_0(t) + \frac{1}{2t}y_0(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{-t}}$ et y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t) = \frac{\sqrt{-t}}{2t(t+1)} = \frac{-1}{2\sqrt{-t}(t+1)}$

$\Delta t = -(-t) = -\sqrt{-t}^2$

Ainsi $C(t) = \int \frac{-dt}{2\sqrt{-t}(t+1)} = \int \frac{+2u du}{2u(1-u^2)} = \int \frac{-du}{u^2-1}$

C.D.V $\begin{cases} u = \sqrt{-t} \in]0, 1[\\ t = -u^2 \\ dt = -2u du \end{cases}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u-1} = \frac{1}{2} (\ln|u+1| - \ln|u-1|)$
 $= \frac{1}{2} (\ln(u+\sqrt{-t}) - \ln(1-\sqrt{-t}))$

$\frac{-1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right)$

$$\text{et } y_0(t) = \frac{\ln(1+\sqrt{t}) - \ln(1-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

CONCLUSION solutions sur $] -1, 0[$

$$f: t \mapsto \frac{2C + \ln(1+\sqrt{t}) - \ln(1-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Et on termine avec $] -\infty, -1[$

Pas de grosse différence avec le cas précédent, le $\ln|1-\sqrt{t}|$ dans l'expression de $C(t)$ devient cette fois-ci $\ln(\sqrt{t}-1)$ au lieu de $\ln(1-\sqrt{t})$

solutions sur $] -\infty, -1[$

$$f: t \mapsto \frac{2C + \ln(1+\sqrt{t}) - \ln(\sqrt{t}-1)}{2\sqrt{t}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$$f: t \mapsto \begin{cases} \frac{C + \arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \\ \frac{2D + \ln(1+\sqrt{t}) - \ln(1-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} & \text{si } -1 < t < 0 \\ \frac{2E + \ln(1+\sqrt{t}) - \ln(\sqrt{t}-1)}{2\sqrt{t}} & \text{si } t < -1 \end{cases}$$

Peut-on les prolonger en 0 ou en -1 ?

* En -1, c'est noté car $\lim_{t \rightarrow -1} |1-\sqrt{t}| = 0^+$ donc $\lim_{t \rightarrow -1} \ln|1-\sqrt{t}| = -\infty$

donc $\lim_{t \rightarrow -1} f = -\infty$ indépendamment des valeurs de D et E

* En 0 : comme $\sqrt{t} \rightarrow 0$ et $\sqrt{t} \rightarrow 0$, il faut que $C + \arctan(\sqrt{t}) \rightarrow 0$ soit $C=0$ et $2D + \ln(1+\sqrt{t}) - \ln(1-\sqrt{t}) \rightarrow 0$ soit $D=0$

Examinons donc le prolongement en 0 de la fonction définie sur $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$ par

$$f: t \mapsto \begin{cases} \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\ln(1+\sqrt{t}) - \ln(1-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} & \text{si } -1 < t < 0 \end{cases}$$

On sait que autour $u \sim u$ donc autour $\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$

De même $\ln(1+u) = u + o(u)$ _{$u \rightarrow 0$} donc $\ln(1+\sqrt{t}) - \ln(1-\sqrt{t}) = 2\sqrt{t} + o(\sqrt{t}) \sim 2\sqrt{t}$
et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$

Ainsi on peut prolonger f en 0 en posant $\boxed{f(0) = 1}$

Pour étudier la dérivabilité, il va falloir peiner un peu car les Développements Limités vont s'avérer indispensables!

EXO 11 (AFAIR, UN PROBLÈME DE CAUCHY!)

Sur $]0, +\infty[$, l'équation s'écrit $y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right)y = \frac{e^t}{t^2 + 1}$

• (EH) $y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right)y = 0 \leadsto a(t) = \frac{1}{t} - 1$ et $A(t) = \ln(t) - t$

solutions $g_c: t \mapsto C e^{t - \ln(t)} = \frac{C e^t}{t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = \frac{C(t)e^t}{t}$: alors $y_0'(t) = C'(t) \frac{e^t}{t} + C(t) \left(\frac{e^t t - e^t}{t^2} \right) = \frac{C'(t)e^t}{t} + \frac{C(t)e^t}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)$

d'où $y_0'(t) + \left(\frac{1}{t} - 1\right)y_0(t) = C'(t) \frac{e^t}{t}$. Ainsi y_0 solution $\Leftrightarrow \frac{C'(t)}{t} = \frac{1}{1+t^2}$

soit $C'(t) = \frac{t}{1+t^2}$. On peut prendre $C(t) = \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$ d'où $y_0(t) = \frac{\ln(1+t^2)}{2t} e^t$

• CONCLUSION solutions

$\boxed{f: t \mapsto \left(\frac{2C + \ln(1+t^2)}{2t} \right) e^t \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

• SACRÉ CAUCHY! Pour une telle fonction, $f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2C + \ln(2)}{2} e = 0 \Leftrightarrow 2C = -\ln 2$

La solution $\epsilon_C(t)$ qui prend la valeur 0 en 1

est $\boxed{f: t \mapsto \ln\left(\frac{1+t^2}{2}\right) \cdot \frac{e^t}{2t}}$

EXO 12 (UN DERNIER PROBLÈME DE CAUCHY POUR LA ROUTE)

$$\text{Sur }]0, +\infty[, (E) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{t}y = t^2$$

$$\bullet (EH) \quad y' - \frac{1}{t}y = 0 \leadsto a(t) = -\frac{1}{t} \text{ et } A(t) = -\ln(t)$$

$$\text{solutions: } \underline{g_C: t \mapsto C e^{\ln(t)} = Ct} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\bullet (SP) \quad y_0(t) = kt^3 \quad \text{Alors } y'_0(t) - \frac{1}{t}y_0(t) = 3kt^2 - kt^2 = 2kt^2$$

donc y_0 solution $\Leftrightarrow 2k=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$ Ainsi $\underline{y_0: t \mapsto \frac{1}{2}t^3}$

CONCLUSION solutions $\boxed{f: t \mapsto Ct + \frac{1}{2}t^3 \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

PR DE CAUCHY Pour une telle fonction $f(1)=0 \Leftrightarrow C + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$

La solution de notre problème de Cauchy est donc $\boxed{f: t \mapsto \frac{t^3 - t}{2}}$

CHAPITRE 10

Partie 2 - Equations du 2nd ordre

Exo 13

(a) $y'' - 2y' + y = 0$ est une EDL homogène du 2nd ordre

(E.C.): $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightsquigarrow$ une racine double $\lambda_0 = 1$

donc

les solutions de (E) sont les fonctions de la forme
 $f: t \mapsto (At + B)e^t$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(b) $y'' - 5y' + 6y = 0$ (E.C.): $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$

solutions

$f: t \mapsto Ae^{2t} + Be^{3t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(c) $y'' - 3y' = 0$ (E.C.): $\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 3$

solutions

$f: t \mapsto A + Be^{3t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(d) .(EH) $y'' - 4y' + 3y = 0$ (E.C) $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 3$

solutions $g: t \mapsto Ae^t + Be^{3t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = at^2 + bt + c$ Alors $y_0'(t) = 2at + b$ et $y_0''(t) = 2a$

Ainsi $y_0''(t) - 4y_0'(t) + 3y_0(t) = 3at^2 + 3bt + 3c - 8at - 4b + 2a = 3at^2 + (3b - 8a)t + (3c - 4b + 2a)$

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3b - 8a = -2 \\ 3c - 4b + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ 3b = 8/3 - 2 = 2/3 \Rightarrow b = 2/9 \\ 3c = 8/9 - 2/3 = 2/3 \Rightarrow c = 2/27 \end{cases}$

$y_0: t \mapsto \frac{t^2}{3} + \frac{2t}{9} + \frac{2}{27}$

• CONCLUSION solutions $f: t \mapsto Ae^t + Be^{3t} + \frac{t^2}{3} + \frac{2t}{9} + \frac{2}{27}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(e) .(EH) $y'' + 4y' = 0$ (E.C) $\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = -4$

solutions $g: t \mapsto A + Be^{-4t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = at^3 + bt^2 + ct$ alors $y_0'(t) = 3at^2 + 2bt + c$ et $y_0''(t) = 6at + 2b$

Ainsi $y_0''(t) + 4y_0'(t) = 12at^2 + (8b + 6a)t + (4c + 2b)$

⚠ (//) COMME $y_0'' + 4y_0'$ EST DU DEGRÉ DE y_0' , ON CHERCHE UNE (SP) DE DEGRÉ 3

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 12a = 1 \\ 8b + 6a = 7 \\ 4c + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/12 \\ 8b = 7 - 1/2 = 13/2 \Rightarrow b = 13/16 \\ 4c = -13/8 - 2 = -29/8 \Rightarrow c = -29/32 \end{cases}$

De fait, $y_0: t \mapsto \frac{t^3}{12} + \frac{13t^2}{16} - \frac{29t}{32}$

• CONCLUSION solutions $f: t \mapsto A + B e^{-4t} + \frac{t^3}{12} + \frac{13}{16} t^2 - \frac{29}{32} t$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(7) (EH) $y'' + 2y' - 8y = 0$ (EC): $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ et $\lambda = -4$
solutions $y: t \mapsto A e^{2t} + B e^{-4t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(SP) $y_0(t) = K e^{3t}$. Alors $y_0'(t) = 3K e^{3t}$ et $y_0''(t) = 9K e^{3t}$
Soit $y_0''(t) + 2y_0'(t) - 8y_0(t) = 9K e^{3t} + 6K e^{3t} - 8K e^{3t} = 7K e^{3t}$
Ainsi y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow 7K = 1 \Leftrightarrow K = 1/7$ $y_0: t \mapsto \frac{1}{7} e^{3t}$

CONCLUSION solutions $f: t \mapsto A e^{2t} + B e^{-4t} + \frac{1}{7} e^{3t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

EXO 14

L'équation proposée est une EDC homogène de 2nd ordre

(EC): $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $\Delta = a^2 - 4b$

• Si $\Delta = 0$: $\lambda_0 = -a/2$ racine double $\Rightarrow$ solutions $f: t \mapsto (At + B) e^{-at/2}$
qui sont bornées sur $[0, +\infty[$ uniquement si $a > 0$. Dans ce cas, $b = \frac{a^2}{4} > 0$

• Si $\Delta < 0$: en notant $\delta = \sqrt{-\Delta}$, on a $\lambda = \frac{-a + i\delta}{2}$ et $\bar{\lambda} = \frac{-a - i\delta}{2}$
 $\Rightarrow$ solutions $f: t \mapsto (A \cos(\frac{\delta t}{2}) + B \sin(\frac{\delta t}{2})) e^{-at/2}$

qui sont bornées sur $[0, +\infty[$ uniquement si $a > 0$. Dans ce cas, $b > \frac{a^2}{4} > 0$

• Si $\Delta > 0$: $\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow$ solution $f: t \mapsto A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$
qui sont bornées sur $[0, +\infty[$ si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, c'est-à-dire $\lambda_1 < 0$ car $\lambda_2 < \lambda_1$
Or $\lambda_1 < 0 \Leftrightarrow -a + \sqrt{\Delta} < 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\Delta} < a$: déjà, c'est mort si $a \leq 0$!

Si $a > 0$, $\sqrt{\Delta} < a \Leftrightarrow \Delta < a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4b < a^2 \Leftrightarrow b > 0$

Conclusion: les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur $[0, +\infty[$ si $a > 0$ et $b > 0$

Exo 15

(a). (EH) $y'' + 4y' + 4y = 0$ (EC): $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ racine double

$\Rightarrow$ solutions: $g: t \mapsto (At+B)e^{-2t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = Q(t)e^{2t}$. Alors $y_0'(t) = Q'(t)e^{2t} + 2Q(t)e^{2t}$

$$\text{et } y_0''(t) = Q''(t)e^{2t} + 4Q'(t)e^{2t} + 4Q(t)e^{2t}$$

$$\text{donc } y_0''(t) + 4y_0'(t) + 4y_0(t) = e^{2t}(Q''(t) + 8Q'(t) + 16Q(t))$$

$$\text{Ainsi } y_0 \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow Q''(t) + 8Q'(t) + 16Q(t) = 2t^2 + 1$$

On cherche Q sous la forme $Q(t) = at^2 + bt + c$. Alors $Q'(t) = 2at + b$ et $Q''(t) = 2a$

$$\text{d'où } Q''(t) + 8Q'(t) + 16Q(t) = 16at^2 + (16a + 16b)t + (2a + 8b + 16)$$

$$\text{Ainsi } y_0 \text{ solution} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a = 2 \\ 16a + 16b = 0 \\ 2a + 8b + 16c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/8 \\ b = -1/8 \\ c = \frac{-2a - 8b}{16} = \frac{6}{128} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } Q(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{t}{8} + \frac{6}{128}$$

$$\text{et } y_0(t) = \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{8} + \frac{6}{128}\right)e^{2t}$$

• conclusion solutions $f: t \mapsto (At+B)e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{8} + \frac{6}{128}\right)e^{2t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(b). (EH) $\Rightarrow$ comme (a) $g: t \mapsto (At+B)e^{-2t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = Q(t)e^{-2t}$. Alors $y_0'(t) = Q'(t)e^{-2t} - 2Q(t)e^{-2t}$

$$\text{et } y_0''(t) = Q''(t)e^{-2t} - 4Q'(t)e^{-2t} + 4Q(t)e^{-2t}$$

$$\text{donc } y_0''(t) + 4y_0'(t) + 4y_0(t) = Q''(t)e^{-2t} \text{ après simplification}$$

$$\text{Ainsi } y_0 \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow Q''(t) = 2t^2 + 1. \text{ On peut prendre } Q'(t) = \frac{2t^3}{3} + t \text{ et } Q(t) = \frac{t^4}{6} + \frac{t^2}{2}$$

$$\text{si bien que } y_0: t \mapsto \left(\frac{t^4}{6} + \frac{t^2}{2}\right)e^{-2t}$$

• conclusion solutions $f: t \mapsto \left(\frac{t^4}{6} + \frac{t^2}{2} + At+B\right)e^{-2t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(c). (EH) $y'' - 2y' + y = 0$ (EC) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ racine double

solutions: $g: t \mapsto (At+B)e^t$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP1) pour $y'' - 2y' + y = -e^t$ (E1): $y_1(t) = Ke^{-t}$. Alors $y_1'(t) = -Ke^{-t}$ et $y_1''(t) = Ke^{-t}$

$$\text{d'où } y_1''(t) - 2y_1'(t) + y_1(t) = Ke^{-t} + 2Ke^{-t} + Ke^{-t} = 4Ke^{-t}$$

$$\text{donc } y_1 \text{ solution de (E1)} \Leftrightarrow 4K = -1 \Leftrightarrow K = -1/4 \quad y_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}$$

- (SP2) pour $y'' - 2y' + y = e^t$ (E_2) : $y_2(t) = P(t)e^t$
 Alors $y_2'(t) = P'(t)e^t + P(t)e^t$ et $y_2''(t) = P''(t)e^t + 2P'(t)e^t + P(t)e^t$
 d'où $y_2''(t) - 2y_2'(t) + y_2(t) = P''(t)e^t$ après simplification
 Ainsi y_2 solution de (E_2) $\Leftrightarrow P''(t) = 1$. On peut prendre $P'(t) = t$ et $P(t) = \frac{1}{2}t^2$
 à bon que $y_2(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t$

• CONCLUSION superposition des solutions $\Rightarrow f: t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2 + At + B\right)e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

- (d). (EH) $y'' + 2y' + 2y = 0$ (E_C) $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1+i$ ou $\lambda = -1-i$ deux racines complexes conjuguées
 solutions $y: t \mapsto (A \cos(t) + B \sin(t))e^{-t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) le plus simple est ici de passer en complexes : $2e^{-t} \cos(t) = \operatorname{Re}(2e^{(-1+i)t})$

donc on cherche une solution de $y'' + 2y' + 2y = 2e^{(-1+i)t}$ sous la forme

$y_0(t) = P(t)e^{(-1+i)t}$... et on prendra la partie réelle ensuite

Alors $y_0'(t) = P'(t)e^{(-1+i)t} + (-1+i)P(t)e^{(-1+i)t}$

$y_0''(t) = P''(t)e^{(-1+i)t} + 2(-1+i)P'(t)e^{(-1+i)t} + (-1+i)^2 P(t)e^{(-1+i)t}$

donc $y_0''(t) + 2y_0'(t) + 2y_0(t) = P''(t)e^{(-1+i)t} + 2iP'(t)e^{(-1+i)t} + \underbrace{((-1+i)^2 + 2(-1+i) + 2)}_{=0 \text{ d'EC}} P(t)e^{(-1+i)t}$
 $= (P''(t) + 2iP'(t))e^{(-1+i)t}$

AINS y_0 solution $\Leftrightarrow P''(t) + 2iP'(t) = 2$

On peut prendre $P'(t) = \frac{1}{-2i} = i$ (car alors $P''(t) = 0$) et $P(t) = it$

Par conséquent $y_0(t) = -it e^{(-1+i)t} = -it e^{-t} (\cos(t) + i \sin(t)) = e^{-t} (t \sin(t) - it \cos(t))$
 $\Rightarrow$ on garde $y_0(t) = e^{-t} t \sin(t)$ pour notre équation réelle

• CONCLUSION solutions $f: t \mapsto (A \cos(t) + B \sin(t) + t \sin(t))e^{-t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

- (e). (EH) $y'' + 4y = 0$ (E_C) $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda = 2i$ ou $\lambda = -2i$
 solutions $y: t \mapsto A \cos(2t) + B \sin(2t)$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) On linéarise d'abord $\cos^2(t)$: $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 \Rightarrow \cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

donc l'équation se écrit $y'' + 4y = \frac{t}{2} + \frac{t \cos(2t)}{2}$

• (SP1) pour $y'' + 4y = \frac{t}{2}$ (E1) : on prend $y_1(t) = at + b$. Alors $y_1''(t) = 0$
 donc $y_1'' + 4y_1 = 4at + 4b$ et y_1 solution de (E1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 1/2 \\ 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/8 \\ b = 0 \end{cases}$
 soit $y_1: t \mapsto t/8$

• (SP2) pour $y'' + 4y = \frac{1}{2} t \cos(2t)$ (E2)

$\Rightarrow$ on passe en complexe $y'' + 4y = \frac{1}{2} t e^{2it}$ et on cherche y_2 sous la forme
 $y_2(t) = P(t) e^{2it}$. Alors $y_2'(t) = P'(t) e^{2it} + 2i P(t) e^{2it}$
 et $y_2''(t) = P''(t) e^{2it} + 4i P'(t) e^{2it} - 4 P(t) e^{2it}$

d'où $y_2''(t) + 4y_2(t) = [P''(t) + 4i P'(t)] e^{2it}$

AINSI y_2 solution de (E2) $\Leftrightarrow P''(t) + 4i P'(t) = \frac{1}{2} t$

Prendons $P'(t) = at + b$: alors $P''(t) = a$ et $P''(t) + 4i P'(t) = 4iat + a + 4ib = t/2$

soit $\begin{cases} 4ia = 1/2 \\ a + 4ib = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 1/8i = -i/8 \\ b = -a/4i = 1/32 \end{cases}$ et $P'(t) = -\frac{it}{8} + \frac{1}{32}$

On peut prendre $P(t) = -\frac{it^2}{16} + \frac{t}{32}$ et bien que $y_2(t) = \left(-\frac{it^2}{16} + \frac{t}{32}\right) e^{2it}$

$y_2(t) = \left(-\frac{it^2}{16} + \frac{t}{32}\right) (\cos(2t) + i \sin(2t)) = \frac{t^2}{16} \sin(2t) + \frac{t \cos(2t)}{32} + i(\dots)$

$\Rightarrow$ on garde $y_2(t) = \frac{t^2}{16} \sin(2t) + \frac{t \cos(2t)}{32}$ pour notre équation réelle

• CONCLUSION solutions $f: t \mapsto \left(\frac{t}{32} + A\right) \cos(2t) + \left(\frac{t^2}{16} + B\right) \sin(2t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

(*) (E1) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (EC) $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1+i$ ou $\lambda = 1-i$

solutions $g: t \mapsto (A \cos(t) + B \sin(t)) e^t$

• (SP) $y_0(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$. Alors $y_0'(t) = -a \sin(t) + b \cos(t)$ et $y_0''(t) = -a \cos(t) - b \sin(t) = -y_0(t)$

d'où $y_0''(t) - 2y_0'(t) + 2y_0(t) = (a - 2b) \cos(t) + (b + 2a) \sin(t)$

AINSI y_0 solution $\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ b + 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 5b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4/5 \\ b = 2/5 \end{cases}$ soit $y_0(t) = \frac{4 \cos(t) + 2 \sin(t)}{5}$

CONCLUSION solutions $f: t \mapsto (A \cos(t) + B \sin(t)) e^t + \frac{4 \cos(t) + 2 \sin(t)}{5}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

EXO 17

1). (EH) $y' - y = 0 \Rightarrow$ solutions $g: t \mapsto Ce^t$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)e^t$. Alors $y'_0(t) = C'(t)e^t + C(t)e^t$ donc $y'_0(t) - y_0(t) = C'(t)e^t$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$: on peut prendre $C(t) = \sqrt{t}$ soit $y_0(t) = \sqrt{t}e^t$

• CONCLUSION solutions $f: t \mapsto (C + \sqrt{t})e^t$ avec $C \in \mathbb{R}$

2). PETIT CAUCHY! Pour une telle fonction, $f(1) = e \Leftrightarrow (C+1)e = e \Leftrightarrow C+1 = 1 \Leftrightarrow C=0$

Ainsi, la solution de (E) pour laquelle $f(1) = e$ est $f: t \mapsto \sqrt{t}e^t$ sur $]0, +\infty[$

3) $f(t) = \sqrt{t}e^t$, $f'(t) = \sqrt{t}e^t + \frac{e^t}{2\sqrt{t}}$, $f''(t) = \sqrt{t}e^t + \frac{e^t}{\sqrt{t}} + e^t \times \frac{-1/\sqrt{t}}{4t}$
donc $f''(t) + f(t) = 2\sqrt{t}e^t + \frac{e^t}{\sqrt{t}} - \frac{e^t}{4\sqrt{t}}$ soit $f''(t) - 2f'(t) + f(t) = \frac{-e^t}{4\sqrt{t}}$

AINS f est une solution de (F) sur $]0, +\infty[$ Cool! On a une solution particulière

4). (EH) $y'' - 2y' + y = 0$ (EC) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$: $\lambda_0 = 1$ racine double
solutions $g: t \mapsto (At + B)e^t$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0: t \mapsto \sqrt{t}e^t$

• CONCLUSION solutions de (E) $f: t \mapsto (At + B)e^t + \sqrt{t}e^t$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

EXO 18

1). (EH) $y'' + (1 - 2m)y' - 2my = 0$ (EC) $\lambda^2 + (1 - 2m)\lambda - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2m(\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2m) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 2m > 0$$

solutions $g: t \mapsto Ae^{-t} + Be^{2mt}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$ (2 racines distinctes)

• (SP) $y_0(t) = Ke^{2t}$ Alors $y'_0(t) = 2Ke^{2t}$ et $y''_0(t) = 4Ke^{2t}$ (Si $m \neq 1$)

$$\text{d'où } y''_0(t) + (1-2m)y'_0(t) - 2my_0(t) = (4K + (1-2m)2K - 2mK)e^{2t} \\ = 6K(1-m)e^{2t}$$

$$\text{donc } y_0 \text{ solution} \Leftrightarrow 6K(1-m) = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{6(1-m)} \text{ soit } y_0: t \mapsto \frac{e^{2t}}{6(1-m)}$$

• CONCLUSION solutions $f: t \mapsto A\bar{e}^t + Be^{2mt} + \frac{e^{2t}}{6(1-m)}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• PETIT CAUCHY! Pour une telle fonction, on a $f'(t) = -A\bar{e}^t + 2mBe^{2mt} + \frac{e^{2t}}{3(1-m)}$

$$\text{donc } \begin{cases} f(t) = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + \frac{1}{6(1-m)} = 0 \\ -A + 2mB + \frac{1}{3(1-m)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = \frac{1}{6(1-m)} \quad (L1) \\ -A + 2mB = \frac{1}{3(1-m)} \quad (L2) \end{cases}$$

$$(L1) + (L2): (2m+1)B = \frac{1}{2(1-m)} \text{ d'où } B = \frac{1}{(2m+1)2(1-m)}$$

$$\text{et } A = \frac{1}{6(1-m)} - \frac{1}{(2m+1)2(1-m)} = \frac{(2m+1) - 3}{6(2m+1)(1-m)} = \frac{2m-2}{6(1-m)(2m+1)} = \frac{1}{3(2m+1)}$$

AINSI l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ est

$$y_m: t \mapsto \frac{e^{-t}}{3(2m+1)} + \frac{e^{2mt}}{2(m-1)(2m+1)} + \frac{e^{2t}}{6(1-m)} \text{ pour } m \neq 1$$

(SP) (Si $m=1$) $y_0(t) = P(t)e^{2t}$. Alors $y'_0(t) = P'(t)e^{2t} + 2P(t)e^{2t}$
et $y''_0(t) = P''(t)e^{2t} + 4P'(t)e^{2t} + 4P(t)e^{2t}$

$$\text{donc } y''_0(t) + (1-2m)y'_0(t) - 2my_0(t) = y''_0(t) - y'_0(t) - 2y_0(t) \\ = P''(t)e^{2t} + 3P'(t)e^{2t} = (P''(t) + 3P'(t))e^{2t}$$

AINSI y_0 solution $\Leftrightarrow P''(t) + 3P'(t) = 1$. On peut prendre $P'(t) = \frac{1}{3}$ (car alors $P''(t) = 0$)
et $P(t) = t/3$, c'est $y_0(t) = \frac{te^{2t}}{3}$

• CONCLUSION solutions $f: t \mapsto A\bar{e}^t + (B + \frac{t}{3})e^{2t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• QUEL CAUCHY! Pour une telle fonction, on a $f'(t) = -A\bar{e}^t + (2B + \frac{2t}{3})e^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t}$

$$\text{donc } \begin{cases} f(t)=0 \\ f'(t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+2B+\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 3B+\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/9 \\ B=-1/9 \end{cases}$$

Ainsi l'unique solution de (E) vérifiant $f(0)=f'(0)=0$ est

$$y_1: t \mapsto \frac{e^{-t}}{9} + \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{2t} \quad \text{dans le cas où } \underline{m=1}$$

2) Pour $m \neq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on a d'après ce qui précède

$$y_m(t) = \frac{e^{-t}}{3(2m+1)} + \frac{e^{2mt}}{2(m-1)(2m+1)} - \frac{e^{2t}}{6(m-1)} \quad \text{Pour } m=1+h: \text{ on obtient alors}$$

$$\begin{aligned} y_{1+h}(t) &= \frac{e^{-t}}{3(3+2h)} + \frac{e^{2t+2ht}}{2h(3+2h)} - \frac{e^{2t}}{6h} = \frac{e^{-t}}{3(3+2h)} + \frac{e^{2t}}{6h(3+2h)} \underbrace{(3e^{2ht} - 3 - 2h)}_{3(e^{2ht}-1)-2h} \\ &= \frac{e^{-t}}{3(3+2h)} + \frac{e^{2t}}{3+2h} \times \frac{e^{2ht}-1}{2h} - \frac{e^{2t}}{3(3+2h)} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} 3+2h=3$ et que $e^{2ht}-1 \sim 2ht$ d'où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2ht}-1}{2h} = t$

on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} y_{1+h}(t) = \frac{e^{-t}}{9} + \frac{e^{2t}}{3}t - \frac{e^{2t}}{9} = y_1(t)$

si bien que $\lim_{m \rightarrow 1} y_m(t) = y_1(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

EXO 19

On recherche les solutions sous la forme $y(t) = tz(t)$ pour $t \in]0, +\infty[$

Alors $y'(t) = z(t) + tz'(t)$ et $y''(t) = 2z'(t) + tz''(t)$

donc $t^2 y''(t) - 2t y'(t) + (2-t^2)y(t) = 2t^2 z'(t) + t^3 z''(t) - 2tz(t) - 2t^2 z'(t) + (2t-t^3)z(t) = t^3(z''(t) - z(t))$

De fait, y solution de (E) $\Leftrightarrow z''(t) - z(t) = 0$

(EC): $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } -1 \leadsto$ solutions $z: t \mapsto A e^t + B e^{-t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

CONCLUSION solutions $y: t \mapsto A t e^t + B t e^{-t}$ sur $]0, +\infty[$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

EXO 20

1) Si l'on cherche y sous la forme $y(t) = z(\sin t)$, on a alors

$$y'(t) = \cos t \times z'(\sin t) \quad \text{et} \quad y''(t) = -\sin t \times z'(\sin t) + \cos^2(t) z''(\sin t)$$

$$\text{d'où} \quad y''(t) + y'(t) \cos(t) - y(t) \cos^2(t) = \cos^2(t) z'' - \sin t z' + \underbrace{\cos(t) \cos(t)}_{=\sin(t)} z' - \cos^2(t) z \\ = \cos^2(t) (z'' - z)$$

• Comme $\cos^2(t) \neq 0$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, on en déduit que y est solution de (E) $\Leftrightarrow z'' - z = 0$
 Ceci conduit (cf. exo 19!) à $z(u) = A e^u + B e^{-u}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• CONCLUSION solutions sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

$$f: t \mapsto A e^{\sin(t)} + B e^{-\sin(t)} \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

2) Si l'on cherche y sous la forme $y(t) = z(t^2)$, on obtient alors

$$y'(t) = 2t z'(t^2) \quad \text{et} \quad y''(t) = 2 z'(t^2) + 4t^2 z''(t^2)$$

$$\text{d'où} \quad t y'' + (4t^2 - 1) y' + 4t^3 y = 2t z' + 4t^3 z'' + (8t^3 - 2t) z' + 4t^3 z \\ = 4t^3 (z'' + 2z' + z)$$

• Comme $4t^3 \neq 0$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que y est solution de (E) $\Leftrightarrow z'' + 2z' + z = 2$ (F)

$$*(EH) \quad z'' + 2z' + z = 0 \quad (EC) \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 : \lambda = -1 \text{ racine double}$$

$\leadsto$ solutions $g: u \mapsto (Au + B)e^{-u}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

$$*(SP) \quad z_0 = K \leadsto K = 2 \quad \text{d'où} \quad z_0: u \mapsto 2$$

* CONCLUSION les solutions de (F) sont les fonctions $z: u \mapsto (Au + B)e^{-u} + 2$

• On en déduit que les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

sont les fonctions

$$f: t \mapsto (At^2 + B)e^{-t^2} + 2 \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

3) Avec $y(t) = z(e^{-t})$ on obtient $y'(t) = -e^{-t} z'(e^{-t})$ et $y''(t) = e^{-t} z'(e^{-t}) + e^{-2t} z''(e^{-2t})$

$$\text{d'où} \quad y'' + y' + e^{2t} y = e^{2t} z'' + e^{2t} z = e^{2t} (z'' + z)$$

$$\text{AINSI } y \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow z'' + z = e^{2t} + 2e^{-t} - 3 = u^2 + 2u - 3 \quad (F)$$

• (EH) $z'' + z = 0$ (EC) $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$ $\leadsto$ solutions $g: u \mapsto A \cos(u) + B \sin(u)$

• (SP) $z_0(u) = au^2 + bu + c : z'_0(u) = 2au + b$ et $z''_0(u) = 2a$

$$\text{d'où} \quad z''_0 + z_0 = au^2 + bu + (c + 2a). \text{ AINSI } z_0 \text{ solution de (F)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c+2a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-5 \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad z_0: u \mapsto u^2 + 2u - 5$$

• CONCLUSION les solutions de (F) sont les fonctions $z: u \mapsto A \cos(u) + B \sin(u) + u^2 + 2u - 5$

On en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$f: t \mapsto A \cos(e^t) + B \sin(e^t) + e^{2t} + 2e^t - 5 \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

4) Pour $y(t) = z(\ln(t))$, on obtient $y'(t) = \frac{1}{t} z'(\ln t)$ et $y''(t) = -\frac{1}{t^2} z'(\ln t) + \frac{1}{t^2} z''(\ln t)$

de sorte que $t^2 y''(t) + 3t y'(t) + y(t) = z'' - z' + 3z' + z = z'' + 2z' + z$

AINSI y solution de (E) $\Leftrightarrow z''(u) + 2z'(u) + z(u) = 1 + t^2 = 1 + e^{2u}$ (F)

* (EH) $z'' + 2z' + z = 0$ (Energie!) $\leadsto$ solutions $g: u \mapsto (Au + B)e^{-u}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

* (SP) $z_0(u) = K_1 + K_2 e^{2u}$ alors $z'_0(u) = 2K_2 e^{2u}$ et $z''_0(u) = 4K_2 e^{2u}$

d'où $z''_0(u) + 2z'_0(u) + z_0(u) = 9K_2 e^{2u} + K_1$

AINSI z_0 solution de (F) $\Leftrightarrow K_1 = 1$ et $K_2 = 1/9$. De ce fait, $z_0: u \mapsto 1 + \frac{e^{2u}}{9}$

* CONCLUSION solutions de (F) $z: u \mapsto (Au + B)e^{-u} + 1 + \frac{e^{2u}}{9}$ avec A et B

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions

$$f: t \mapsto \frac{A \ln(t) + B}{t} + 1 + \frac{t^2}{9} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

EXO 21

Sur $] -\infty; -1[$ ou $] 1; +\infty[$, l'équation s'écrit $y'' + \frac{1}{1+x} y' = \frac{2}{(1+x)^2}$ (E)

* Notons $z = y'$: alors (E) $\Leftrightarrow z' + \frac{1}{1+x} z = \frac{2}{(1+x)^2}$ (F)

• (EH) $z' + \frac{1}{1+x} z = 0 \leadsto a(x) = \frac{1}{1+x}$ et $A(x) = \ln|1+x|$

d'où les solutions sont les fonctions $g_C: x \mapsto C e^{-\ln|1+x|} = \frac{C}{|1+x|} = \pm \frac{C}{1+x}$

• (SP) $z_0(x) = \frac{C(x)}{1+x}$. Alors $z'_0(x) = \frac{C'(x)}{1+x} - \frac{C(x)}{(1+x)^2}$ et $z'_0(x) + \frac{1}{1+x} z_0(x) = \frac{C'(x)}{1+x}$

De ce fait z_0 solution de (F) $\Leftrightarrow C'(x) = \frac{2}{1+x}$. On peut prendre $C(x) = 2 \ln|1+x|$
d'où bien que $z_0: x \mapsto \frac{\ln((1+x)^2)}{1+x} = \ln((1+x)^2)$

• CONCLUSION les solutions de (F) sont les fonctions $z: x \mapsto \frac{C + \ln((1+x)^2)}{1+x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Mais ce n'est pas encore fini ! On a seulement trouvé y'

* Ainsi y solution de (E) ssi $y'(x) = \frac{C + \ln((1+x)^2)}{1+x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Il n'y a plus qu'à trouver les primitives de cette même expression

Sur $] -1; +\infty[$

$$y'(x) = \frac{C}{1+x} + 2 \times \frac{1}{1+x} \times \ln(1+x)$$

$$\text{donc } y(x) = C \ln(1+x) + (\ln(1+x))^2 + D \text{ avec } C \text{ et } D \in \mathbb{R}$$

Sur $] -\infty; -1[$

$$y'(x) = \frac{C}{1+x} + \frac{2 \ln|1+x|}{1+x} = \frac{C}{1+x} + 2 \times \frac{1}{1+x} \times \ln|1+x|$$

$$\text{donc } y(x) = C \ln|1+x| + 2 (\ln|1+x|)^2 + D \text{ avec } C \text{ et } D \in \mathbb{R}$$

Et voilà ! C'est fini pour ce joli chapitre...

il y a effectivement une dizaine d'exercices, mais vous avez au moins de quoi vous entraîner !

CHAPITRE 11

EXO 1

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $1+2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$ "

① INITIALISATION

Pour $n=0$, on a $2^{0+1}-1=1$ donc $P(0)$ vraie

② HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie.

Alors $1+2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$

$$\begin{aligned} \text{donc } 1+2+\dots+2^{n+1} &= (1+2+\dots+2^n) + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}-1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

si bien que la proposition $P(n+1)$ est vraie

③ CONCLUSION

On déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,
c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1+2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $2^{3n}-1$ est divisible par 7"

① INITIALISATION

Pour $n=0$, on obtient $2^{3 \times 0}-1 = 1-1=0=7 \times 0$ qui est un multiple de 7
donc la proposition $P(0)$ est vraie.

② HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie.

Alors $2^{3n}-1 = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit $2^{3n} = 1+7k$

De ce fait $2^{3(n+1)} = 2^3 \times 2^{3n} = 8 \times 2^{3n} = 8 + 8 \times 7k$

donc $2^{3(n+1)}-1 = 7 + 8 \times 7k = 7(1+8k)$ est divisible par 7

Ainsi, la proposition $P(n+1)$ est vraie.

③ CONCLUSION

$$2^{3n}-1 \text{ est divisible par 7 pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(c) Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $P(m): "m^2 \leq 2^m"$

• INITIALISATION

On a $4^2 = 16$ et $2^4 = 16$ donc $4^2 \leq 2^4$. Ainsi, $P(4)$ est vraie

• HÉRÉDITÉ

Soit $m \geq 4$. On suppose que $P(m)$ est vraie

On a alors $m^2 \leq 2^m$ si bien que $2m^2 \leq 2^{m+1}$. Vérifions que $2m^2 \geq (m+1)^2$

Notons que $2m^2 - (m+1)^2 = 2m^2 - m^2 - 2m - 1 = m^2 - 2m - 1$

$$\geq 4m - 2m - 1 \quad \text{car } m \geq 4$$

$$\geq 2m - 1 \geq 7$$

d'où $(m+1)^2 \leq 2m^2 \leq 2^{m+1}$. Ainsi, $P(m+1)$ est vraie

• CONCLUSION

On déduit du principe de récurrence que $m^2 \leq 2^m$ pour tout $m \geq 4$

EXO 2

1) Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $P(m): "u_m < \left(\frac{7}{4}\right)^m"$

On va effectuer une récurrence DOUBLE

• INITIALISATION

$u_0 = 0 < 1 = \left(\frac{7}{4}\right)^0$ et $u_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

• HÉRÉDITÉ

Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(m)$ et $P(m+1)$ sont vraies.

Alors $u_m < \left(\frac{7}{4}\right)^m$ et $u_{m+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{m+1}$

d'où $u_{m+2} = u_m + u_{m+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^m \left(1 + \frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^m \times \frac{11}{4}$

or $\frac{11}{4} = \frac{44}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ donc $u_{m+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{m+2}$: $P(m+2)$ est vraie

• CONCLUSION



pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_m < \left(\frac{7}{4}\right)^m$

REMARQUE dans cet exemple, il est important d'avoir noté que l'on cherche à montrer que $u_{m+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{m+2}$. C'est cela qui nous pousse à comparer $\frac{11}{4}$ à $\frac{49}{16}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$ "

• INITIALISATION

$u_2 = u_0 + u_1 = 1$ donc $u_2 - 1 = 0 = u_0$. Ainsi $P(0)$ est vraie

• HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie

Ce fait, $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$

d'où $u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} = \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2}} - 1 = u_{n+3} - 1$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

• CONCLUSION

On déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,
c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$$

EXO 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $f(n) \geq n$ "

• INITIALISATION

On a $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ donc $f(0) \in \mathbb{N}$ d'où $f(0) \geq 0$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.

• HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie: ce fait, $f(n) \geq n$.

Par croissance de f , on a $f(n+1) > f(n)$ donc $f(n+1) \geq f(n) + 1$ (ce sont des entiers)
si bien que $f(n+1) \geq n+1$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• CONCLUSION



$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \geq n$$

EXO 4

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $0 \leq u_n \leq 5$ "

• INITIALISATION: $0 \leq u_0 \leq 5$ par hypothèse donc $P(0)$ est vraie

• HÉRÉDITÉ: soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors $0 \leq u_n \leq 5$

d'où $5 \leq 15 + u_n \leq 20$ et $0 < \sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{20} < 5$ par croissance de $\sqrt{\cdot}$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

• CONCLUSION:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 5$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $4 \leq u_n \leq 10$ "

• INITIALISATION

Par hypothèse, $4 \leq u_0 \leq 10$ donc $P(0)$ est vraie

• HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Alors $4 \leq u_n \leq 10$

d'où $19 \leq u_n + 15 \leq 25$ et $4 \leq \sqrt{19} \leq u_{n+1} \leq 5$ par croissance de $\sqrt{}$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

• CONCLUSION

On déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4 \leq u_n \leq 10$

EXO 5

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $2 \leq u_n \leq 3$ "

• INITIALISATION

On a $u_0 = 3$ et $2 \leq 3 \leq 3$ donc $P(0)$ est vraie

• HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Alors $2 \leq u_n \leq 3$

d'où $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{3}$ (décroissance de l'inverse sur $]0, +\infty[$ et $3 \geq 2 + \frac{1}{2} \geq u_{n+1} \geq 2 + \frac{1}{3} \geq 2$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

• CONCLUSION



$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq 3$

EXO 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $0 \leq u_{n+1} < u_n \leq 1$ "

• INITIALISATION: $u_1 = \sin(1) < 1$ donc $0 \leq u_1 < \sin(u_0) < u_1 \leq 1$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

• HÉRÉDITÉ: Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $P(n)$ est vraie soit $0 \leq u_{n+1} < u_n \leq 1$.

Par croissance de $\sin$ sur $[0, 1]$, on obtient $0 \leq \sin(u_{n+1}) < \sin(u_n) \leq \sin(1) \leq 1$

soit $0 \leq u_{n+2} < u_{n+1} \leq 1$. Autrement dit, $P(n+1)$ est vraie

• CONCLUSION:



$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} < u_n \leq 1$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante et bornée (entre 0 et 1)

EXO 7

1) $u_0 = 1$ donc $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$, ...

CONJECTURE $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $u_n = \frac{1}{n+1}$ "

INITIALISATION

$\frac{1}{0+1} = 1 = u_0$ donc $P(0)$ est vraie

HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie

Alors $u_n = \frac{1}{n+1}$ d'où $u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)+1}$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

CONCLUSION

D'après le principe de récurrence, ...  ...

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n+1}$

2) $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 3u_1 - 2u_0 = 5$, $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 9$, $u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 17$

Ah! Je l'ai: $u_n = 1 + 2^n$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $u_n = 1 + 2^n$ ". Procédons par récurrence DOUBLE

INITIALISATION: $1 + 2^0 = 2 = u_0$ donc $P(0)$ est vraie

$1 + 2^1 = 3 = u_1$ donc $P(1)$ est vraie

HÉRÉDITÉ: soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.

Alors $u_n = 1 + 2^n$ et $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1} = 1 + 2 \times 2^n$

d'où $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3 + 6 \times 2^n - 2 - 2 \times 2^n = 1 + 4 \times 2^n = 1 + 2^{n+2}$: ainsi, $P(n+1)$ est vraie

CONCLUSION: 

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 + 2^n$

3) $M_0 = 0, M_1 = 0+0=0, M_2 = 0+1, M_3 = 0+1+2, M_4 = 0+1+2+3$

À vue de nez, $M_n = \underbrace{0+1+\dots+n-1}_{n \text{ termes}} = \frac{n(n-1)}{2}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \ll M_n = \frac{n(n-1)}{2} \gg$

INITIALISATION

On a $0 \times (0-1)/2 = 0 = M_0$ donc $P(0)$ est vraie

HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Alors $M_n = \frac{n(n-1)}{2}$
 d'où $M_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}$
 ce qui prouve que $P(n+1)$ est vraie

CONCLUSION



$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

EXO 8

Le plus simple est de noter que $2x+3 = 2x+4-1 = 2(x+2)-1$ d'où $\frac{2x+3}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}$
 Ainsi $f^{(0)}(x) = 2 - \frac{1}{x+2}, f^{(1)}(x) = \frac{1}{(x+2)^2}, f^{(2)}(x) = \frac{-2}{(x+2)^3}, f^{(3)}(x) = \frac{6}{(x+2)^4}$ et $f^{(4)}(x) = \frac{-24}{(x+2)^5}$

CONJECTURE pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2)^{n+1}}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n) : \ll \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2)^{n+1}} \gg$

INITIALISATION pour tout $x \neq -1$, $\frac{(-1)^{1+1} 1!}{(x+2)^{1+1}} = \frac{1}{(x+2)^2} = f^{(1)}(x)$ donc $P(1)$ est vraie.

HÉRÉDITÉ soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $P(n)$ est vraie. Ainsi $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2)^{n+1}}$
 d'où $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2)^{n+1}} \times (-1) \times (n+1) \times (x+2)^{-(n+2)} = \frac{(-1)^{n+2} (n+1)!}{(x+2)^{n+2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 si bien que $P(n+1)$ est vraie

CONCLUSION on déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 c'est-à-dire

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \neq -1 \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2)^{n+1}}$$

EXO 9

$$\begin{aligned}
v_0 + v_1 + \dots + v_n &= 2^{\mu_0} + 2^{\mu_1} + \dots + 2^{\mu_n} \\
&= 2^{\mu_0} + 2^{\mu_0+r} + \dots + 2^{\mu_0+n} \quad \text{car } \mu_k = \mu_0 + k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \\
&= 2^{\mu_0} (1 + 2^r + \dots + 2^n) \\
&= \begin{cases} 2^{\mu_0} (n+1) & \text{si } r=0 \quad (\text{auquel cas } 2^r=1) \\ 2^{\mu_0} \times \frac{1-(2^r)^{n+1}}{1-2^r} = \frac{2^{\mu_0} - 2^{\mu_0+n(r+1)}}{1-2^r} & \text{si } r \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = 2^{\mu_0} \times 2^{\mu_1} \times \dots \times 2^{\mu_n} = 2^{\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n}$$

$$\text{Or } \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n = (n+1) \frac{\mu_0 + \mu_n}{2} = (n+1) \left(\frac{\mu_0 + \mu_0 + nr}{2} \right) = (n+1) \left(\mu_0 + \frac{nr}{2} \right)$$

d'où

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = 2^{(n+1)\mu_0 + \frac{n(n+1)r}{2}}$$

EXO 10

1) On résout $x = -\frac{x}{2} + 12 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 12 \Leftrightarrow x = 8$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\begin{cases} \mu_{n+1} = -\frac{1}{2}\mu_n + 12 \\ 8 = -\frac{1}{2} \times 8 + 12 \end{cases}$

d'où $\mu_{n+1} - 8 = -\frac{1}{2}(\mu_n - 8)$ par soustraction des deux équations

La suite de terme général $v_n = \mu_n - 8$ est géométrique de raison $-1/2$

d'où $v_n = (-1/2)^n v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Enfin $v_0 = \mu_0 - 8 = -8$ soit $v_n = -8 \times (-1/2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et $\mu_n = v_n + 8$ si bien que $\mu_n = 8(1 - (-1/2)^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) $x = x\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x(\sqrt{2}-1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = \alpha$

Ainsi $\begin{cases} \mu_{n+1} = \mu_n \sqrt{2} - 1 \\ \alpha = \alpha \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow \mu_{n+1} - \alpha = \sqrt{2}(\mu_n - \alpha)$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$v_n = \mu_n - \alpha$ est géométrique raison $\sqrt{2}$ d'où $v_n = v_0 (\sqrt{2})^n = v_0 2^{n/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

ENFIN $v_0 = \mu_0 - \alpha = \sqrt{2} - (\sqrt{2}+1) = -1$ donc $v_n = -2^{n/2}$ et $\mu_n = \alpha + v_n$ si bien que

$$\mu_n = 1 + \sqrt{2} - 2^{n/2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$3) \quad x = \frac{x}{7} + \frac{6}{7} \Leftrightarrow 7x = x + 6 \Leftrightarrow x = 1$$

Ainsi $\begin{cases} u_{n+1} = u_n/7 + 6/7 \\ 1 = 1/7 + 6/7 \end{cases}$ d'où $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{7}(u_n - 1)$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 1$ est donc géométrique de raison $1/7$ et $v_n = v_0/7^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or $v_0 = u_0 - 1 = 6$ donc $v_n = 6/7^n$ et $u_n = 1 + v_n$ si bien que

$$u_n = 1 + 6/7^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

EXO 11

1) Cherchons $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'expression $w_n = an + b$ vérifiant $w_{n+1} = \frac{w_n}{4} + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (1)

Alors $w_{n+1} = a(n+1) + b$ et $\frac{w_n}{4} + n = (\frac{a}{4} + 1)n + \frac{b}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{a}{4} + 1 \\ a + b = \frac{b}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 4 \\ 3b = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4/3 \\ b = -16/9 \end{cases}$

Ainsi $w_n = \frac{4n}{3} - \frac{16}{9}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n/4 + n \\ w_{n+1} = w_n/4 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} - w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n \end{cases}$

si bien que (v_n) est géométrique de raison $1/4$

3) Comme $v_0 = u_0 - w_0 = 1 + 16/9 = 25/9$ alors $v_n = \frac{25}{9} \times (\frac{1}{4})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

ENFIN $v_n = u_n - w_n$ d'où $u_n = v_n + w_n$ si bien que

$$u_n = \frac{25}{9} \times (\frac{1}{4})^n + \frac{4n}{3} - \frac{16}{9} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

EXO 12

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15}$

d'où $v_{n+1} = \frac{1}{5} \times v_n$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

AINSI la suite (v_n) est géométrique de raison $1/5$

2) Comme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\frac{1}{3}$, on en déduit que

$$v_n = -\frac{1}{3} \times (\frac{1}{5})^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

ENFIN
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \Rightarrow u_n v_n + 3v_n = u_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-1 - 3v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$$

si bien que
$$v_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

EXO 13

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 8u_{n+1} + 8u_n = 8(u_{n+1} + u_n) = 8d_n$
 donc la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 8.
 Comme $d_0 = u_1 + u_0 = 1$, alors
$$d_n = 8^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = u_{n+2} - 8u_{n+1} = 8u_n - u_{n+1} = -d_n$
 donc la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1.
 Comme $d_0 = u_1 - 8u_0 = 1$, alors
$$d_n = (-1)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

3) ENFIN
$$\begin{cases} d_n = u_{n+1} + u_n \\ d_n = u_{n+1} - 8u_n \end{cases} \Rightarrow d_n - d_n = 9u_n \Rightarrow u_n = \frac{d_n - d_n}{9}$$

 d'où
$$u_n = \frac{8^n - (-1)^n}{9} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

EXO 14

1) (E.C.) $x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ racine double

Ainsi $u_n = (A + B)2^n$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

De plus
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ 2(A+B) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A+B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

si bien que
$$u_n = (2n - 1)2^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2) (E.C.) $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$

Ainsi il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = A \times 1^n + B \times 2^n = A + B \cdot 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

De plus
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 4 \\ A+2B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 3 \end{cases} \text{ soit } u_n = 3 + 2^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$3) (EC) \lambda^2 = -\lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \Delta = -3 \leadsto \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i2\pi/3}$$

Solution: $u_n = A \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + B \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

EXO 15

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 3v_{n+1} = u_{n+1} + 6u_n + 6v_n$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} + 4u_n = 2u_n + 6v_n + 4u_n = 6u_n + 6v_n$

donc $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_{n+1} + 4u_n = 3u_{n+1} + 4u_n$

3) (EC) $\lambda^2 = 3\lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = 4$

Ainsi $u_n = A(-1)^n + B \cdot 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec A et $B \in \mathbb{R}$

Or $u_0 = 2$ et $u_1 = u_0 + 3v_0 = 2 + 1 = 3$

Ainsi $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -A + 4B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 5B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 1$

si bien que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n + 4^n}$

Il en découle que $3v_n = u_{n+1} - u_n = -(-1)^n + 4 \times 4^n - (-1)^n - 4^n = 3 \times 4^n - 2(-1)^n$

soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4^n - \frac{2}{3}(-1)^n}$

CHAPITRE 12

EXO 1

Soient x et $y \in \mathbb{C}$ fixés. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$ "

INITIALISATION

$$(x-y) \sum_{k=0}^0 x^{0-k} y^k = (x-y) x^0 y^0 = (x-y) = x^{0+1} - y^{0+1} \text{ donc } P(0) \text{ est vraie}$$

HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie. Ainsi $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$

Alors $x^{n+2} - y^{n+2} = x^{n+2} - x y^{n+1} + x y^{n+1} - y^{n+2}$

$$= x(x^{n+1} - y^{n+1}) + (x-y)y^{n+1}$$

$$= (x-y) \sum_{k=0}^n x^{n+1-k} y^k + (x-y)y^{n+1}$$

$$= (x-y) \sum_{k=0}^{n+1} x^{n+1-k} y^k$$

Ai bien que $P(n+1)$ est vraie

CONCLUSION

On déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre l'identité de Bernoulli.

Par télescope

$$(x-y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n x^{n+1-k} y^k - \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^{k+1} \quad (l=k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^n x^{n+1-k} y^k - \sum_{l=1}^{n+1} x^{n+1-l} y^l$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n x^{n+1-k} y^k - \sum_{l=1}^n x^{n+1-l} y^l - y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} - y^{n+1}$$

EXO 2

$$1) D_n = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{l=2}^{n+1} l^3 = \sum_{l=2}^n l^3 + (n+1)^3 = \boxed{C_n - 1 + (n+1)^3}$$

$$2) \text{ Pour tout } k \in \mathbb{N} \quad (k+1)^3 = (k+1)(k^2 + 2k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$\text{donc } D_n = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n (3k+1)$$

si bien que

$$D_n = C_n + 3B_n + \frac{n(3n+5)}{2}$$

→ somme des n 1^{ers} termes d'une suite arithmétique... 1^{er} terme: 4 et dernier terme: $3n+1$

$$3) \text{ Or } D_n = C_n - 1 + (n+1)^3$$

$$\text{donc } (n+1)^3 - 1 = 3B_n + \frac{n(3n+5)}{2}$$

$$\text{soit } 3B_n = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{n(3n+5)}{2} = \frac{n}{2} (2n^2 + 6n + 6 - 3n - 5) \\ = \frac{n}{2} (2n^2 + 3n + 1) = \frac{n}{2} (n+1)(2n+1)$$

$$\text{donc } B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

($2x^2 + 3x + 1$ admet pour racines -1 et $-1/2$)

EXO 3

On effectue le changement d'indice $l = 2n - k$ dans la première somme

Alors $l \in [1; n-1]$ et $k = 2n - l$, si bien que

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right) = \sum_{l=1}^{n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{(2n-l)\pi}{2n} \right) \right) = \sum_{l=1}^{n-1} \ln \left(\sin \left(\pi - \frac{l\pi}{2n} \right) \right) \\ = \sum_{l=1}^{n-1} \ln \left(\sin \frac{l\pi}{2n} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right) \quad \text{CQFD!}$$

EXO 4

$$1) \text{ Pour } k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{a(k+1)(k+2) + b k(k+2) + c(k+1)k}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\text{Numérateur: } a(k^2 + 3k + 2) + b(k^2 + 2k) + c(k^2 + k) = (a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a$$

Pour que cette expression soit égale à 1 pour tout $k \in \mathbb{N}$, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b+c=-1/2 \quad (L2) \\ 2b+c=-3/2 \quad (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b+c=-1/2 \\ b=-1 \quad (L3)-(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1 \\ c=1-1/2=1/2 \end{cases}$$

AINSI

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} \right) - \frac{1}{k+1}$$

2) De ce fait, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \quad (\text{changements d'indices}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}} \quad \text{et c'est bien!}
 \end{aligned}$$

EXO 5

Si $x=1$ $f(1) = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$ et $g(1) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme arithmétique)

Si $x \neq 1$ $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (somme géométrique)

ASTUCE $f'(x) = \sum_{k=1}^n k x^{k-1}$ donc $x f'(x) = \sum_{k=1}^n k x^k = \sum_{k=0}^n k x^k$ (le premier terme est nul)
 si bien que $g(x) = x f'(x)$

Ainsi $f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$
 $= \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$

et $g(x) = \frac{x + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

Conclusion

$$f(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x=1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } x=1 \\ \frac{x + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exo 6

- (a) Les résultats sont des 3-listes d'éléments de $[1, 6]$
 $\Rightarrow$ il y en a $6^3 = \boxed{216}$
- (b) Les résultats sont des 3-listes d'éléments DISTINCTS de $[1, 6]$
 $\Rightarrow$ il y en a $6 \times 5 \times 4 = \boxed{120}$
- (c) Le plus simple est de chercher à écrire les résultats avec deux chiffres distincts afin de pouvoir les dénombrer.
Ils seront sous la forme (a, a, b) ou (a, b, a) ou (b, a, a)
Dans chaque cas, il y a 6 choix possibles pour a puis 5 choix possibles pour b
 $\Rightarrow 3 \times 6 \times 5 = \boxed{90}$ résultats possibles

AUTRE MÉTHODE On a vu qu'il y a en tout 216 résultats possibles

Parmi ceux-ci, on peut avoir

* 3 chiffres distincts $\rightarrow 120$ résultats

* 2 chiffres distincts $\rightarrow x$ résultats

* 1 seul chiffre $\rightarrow 6$ résultats (a, a, a) avec $a \in [1, 6]$

$$\text{donc } 216 = 120 + x + 6 \text{ soit } x = 216 - 126 = \boxed{90}$$

Exo 7

Les octets sont des 8-listes d'éléments de $\{0, 1\}$

- (a) En tout, il y en a $2^8 = \boxed{256}$
- (b) Un octet contenant trois 1 est entièrement déterminé par leur placement... car on met alors des 0 aux emplacements restants. Il faut donc choisir 3 places parmi les 8 possibles,
 $\Rightarrow \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{56}$ octets contenant trois 1
- (c) Un tel octet est caractérisé par les 6 chiffres autres $\Rightarrow 2^6 = \boxed{64}$ octets possibles

EXO 8

1) Les entiers sont de la forme AAB ou ABA ou BAA

{ 1^{re} forme : $A \in [1, 9]$ et $B \in [0, 9] \setminus \{A\} \Rightarrow 9 \times 9 = 81$ choix

{ 2^e forme : idem

3^e forme : idem en choisissant d'abord B puis A

$\Rightarrow 3 \times 81 = \boxed{243}$ entiers possibles

Remarque mystérieuse
ou retrouver ceci en calculant
 $(999 - 99) - 9 \times 9 \times 8 - 9 \dots$

2) Initiales : $X_1 X_2$ avec X_1 : une lettre / X_2 : une autre lettre

$\Rightarrow 26 \times 26 = \boxed{676}$ possibilités

De ce fait, 677 personnes ne peuvent pas avoir des initiales deux à deux distinctes puisque 677 > 676
Ainsi, au moins deux personnes ont les mêmes initiales

EXO 9

1) Une diagonale relie un sommet A à un sommet non voisin B

{ $A \rightarrow n$ choix (un des n sommets du polygone)

{ $B \rightarrow n - 3$ choix (on exclut A et ses deux voisins)

$\Rightarrow n(n-3)$ couples (A, B).

Comme chaque diagonale fournit deux couples - (A, B) et (B, A) - il y a deux fois moins de diagonales que de couples

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n(n-3)}{2} \text{ diagonales}}$$

2) Plusieurs façons d'aborder cette belle question

MÉTHODE 1

Notons A et B les deux parties en question.

Chaque élément peut appartenir à A ou à B $\Rightarrow 2$ possibilités

De ce fait, il y a 2^n répartitions possibles des n éléments entre A et B

MAIS... les noms des parties importent peu ! Que ce soit A et B ou B et A, on s'en fiche.
et en échangeant les éléments de A avec ceux de B, on obtient encore la même partition.

De ce fait, le nombre de partitions recherchées est $\frac{1}{2} \times 2^n = \boxed{2^{n-1}}$

MÉTHODE 2

- Notons encore A et B les deux parties, et raisonnons sur le cardinal de A.
- Soit $k = \text{card}(A)$. Le nombre de choix possibles pour les éléments de A est $\binom{n}{k}$
 - Ainsi le nombre de répartition possibles de nos n éléments entre A et B est

$$\text{et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

... et comme précédemment, on compte tout en double (les méfaits de l'alcool!)
si bien que le nombre de partitions est $\boxed{2^{n-1}}$

3) $N < 10^n$ signifie que N a au plus n chiffres... on peut dire n chiffres en complétant par des 0 à gauche si besoin

1^{er} cas

Un chiffre 3 et des 0 $\Rightarrow n$ nombres possibles et le 3 a n positions possibles

2^{ème} cas

Un chiffre 2, un chiffre 1 et des 0

- n positions possibles pour le 2
- $n-1$ ——— pour le 1
- et met des 0 ailleurs

$\Rightarrow \boxed{n(n-1)}$ nombres possibles

3^{ème} cas

Trois chiffres 1 et des 0 $\Rightarrow \binom{n}{3}$ positions possibles pour les 1, donc

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ nombres possibles}$$

En tout, on obtient un nombre d'entiers naturels N égal à

$$\begin{aligned} n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} &= \frac{n}{6} (6 + 6(n-1) + (n-1)(n-2)) = \frac{n}{6} (6n + n^2 - 3n + 2) \\ &= \frac{n}{6} (n^2 + 3n + 2) = \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \end{aligned}$$

4) Une partie de E contenant A est de la forme $A \cup B$ avec $B \subset E \setminus A$

Or $\text{card}(E \setminus A) = n - p$ donc $\text{card } \mathcal{P}(E \setminus A) = 2^{n-p}$: il y a donc 2^{n-p} choix possibles pour la partie B . Ainsi, le nombre de parties de E contenant A est $\boxed{2^{n-p}}$

EXO 10

1) Si l'on suit l'indication, on observe que $y_{i+1} - y_i = x_{i+1} \geq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ donc $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite strictement croissante d'entiers avec $y_1 = x_1 \geq 1$, $y_n = n$ et $y_{n-1} < y_n$ soit $y_{n-1} \leq n-1$

Elle est donc entièrement déterminée par la donnée des $n-1$ nombres distincts $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ qui forment une combinaison de $n-1$ éléments de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$: il y en a ainsi $\binom{n-1}{n-1}$
Voici le nombre de telles suites $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$

Or, de même que l'on construit une seule suite $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ à partir d'un n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, si l'on dispose d'une suite strictement croissante $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $y_n = n$, il suffit alors de poser

pour obtenir un n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ vérifiant de plus

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_n = n$$

Le nombre de n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i = n$ est donc égal au nombre de suites strictement croissantes $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant $y_n = n$, à savoir $\boxed{\binom{n-1}{n-1}}$

2) ASTUCE : on se ramène au cas précédent en posant $z_i = 1 + x_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Ainsi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un n -uplet de $\mathbb{N}^n$ tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$

SSI $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ est un n -uplet de $(\mathbb{N}^*)^n$ tel que $z_1 + z_2 + \dots + z_n = n + n$

Leur nombre est alors $\boxed{\binom{n+n-1}{n-1}}$ d'après le résultat de la question précédente

EXO 11

ABRACADABRA est un mot de 11 lettres, comportant 5 A, 2 B, 1 C, 1 D et 2 R

Un anagramme est entièrement déterminé par le placement de ces 11 lettres

• PLACEMENT DES A

Il faut choisir 5 places parmi 11, ce qui fait $\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!6!}$ choix possibles

• PLACEMENT DES B

Il faut choisir 2 places parmi les 6 restantes : $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!}$ choix possibles

• PLACEMENT DES R

Il faut choisir 2 places parmi les 4 restantes : $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!}$ choix possibles

• PLACEMENT DU C

Il faut choisir 1 place parmi les 2 restantes $\Rightarrow \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2$ choix

• PLACEMENT DU D

$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1!1!} = 1$ choix (normal, y a plus le choix!) ²

Le nombre d'anagrammes est donc $\frac{11!}{5!6!} \times \frac{6!}{4!2!} \times \frac{4!}{2!2!} \times \frac{2!}{1!1!} \times 1 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{4}$

$$= 990 \times 84 = 84000 - 840 = \boxed{83160}$$

EXO 12

$$\binom{k+1}{k+1} \binom{n+1}{k+1} = \binom{k+1}{k+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(k+1) \times (n+1)!}{(k+1) \times k! \times (n-k)!} = \frac{(n+1) \times n!}{k! \times (n-k)!} = (n+1) \binom{n}{k}$$

APPLICATION $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l}$

(en posant $l = k-1$)

$$= n \times 2^{n-1}$$

EXO 13

- 1) Pour effectuer un tel tirage, il faut
- choisir k boules parmi les n rouges $\sim \binom{n}{k}$ choix
 - choisir $n-k$ — — — — — blanches $\sim \binom{n}{n-k}$ choix ... et $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Il y a donc $\boxed{\binom{n}{k}^2}$ tirages contenant k boules rouges et $n-k$ boules blanches

- 2) Quand on tire n boules parmi les $2n$ boules de cette urne, on obtient k boules rouges et $(n-k)$ boules blanches avec $0 \leq k \leq n$. Le nombre total de tirages est donc $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. Or, ce nombre vaut également $\binom{2n}{n}$, si bien que

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2}$$

EXO 14

$$\begin{array}{l} 1 \\ 11 \\ 121 \\ 1331 \\ 14641 \\ 151051 \\ 1615201561 \end{array} \quad \begin{array}{l} (a) (1-x)^6 = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6 \\ (b) (x-2)^5 = x^5 + 5x^4(-2) + 10x^3(-2)^2 + 10x^2(-2)^3 + 5x(-2)^4 + (-2)^5 \\ \quad = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32 \\ (c) (2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 + 3 \times 2x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \end{array}$$

EXO 15

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ \text{donc } (\cos(x) + i\sin(x))^4 &= \cos^4(x) + 4i\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x) \\ &= \cos(4x) + i\sin(4x) \quad \text{cf. formule de Moivre} \\ \text{d'où } \cos(4x) &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) \\ \text{Or } \sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x) \text{ et } \sin^4(x) = 1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x) \\ \text{d'où } \cos(4x) &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x) + 6\cos^4(x) + 1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x) \\ &= \boxed{8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1} \end{aligned}$$

EXO 16

1) La somme proposée est la partie réelle de $S = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} e^{ipx} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (e^{ix})^p 1^{n-p}$

Binôme : $S = (1 + e^{ix})^n = (e^{ix/2} (e^{-ix/2} + e^{ix/2}))^n = (2 \cos(\frac{x}{2}) e^{ix/2})^n = 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) e^{inx/2}$
d'où en prenant la partie réelle

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos(px) = 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) \cos(\frac{nx}{2})$$

2) (IDÉE) : considérer $f: x \mapsto \sum_{p=0}^n \frac{x^{p+1}}{p+1} \binom{n}{p}$... fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sum_{p=0}^n x^p \binom{n}{p} = (x+1)^n$ cf. binôme de Newton.
On en déduit que $f(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} + C$ avec C une constante réelle.

OR $f(0) = 0 = \frac{1}{n+1} + C$ d'où $C = -\frac{1}{n+1}$ et donc $f(x) = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}$

Enfin, la somme qui nous intéresse est $f(1) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$, si bien que

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1} \binom{n}{p} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

1
11
121
1331

3) On utilise le fait que $\sum_{0 \leq k \leq l \leq n} a_{k,l} = \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=0}^l a_{k,l} \right)$

AINSI $\sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} = \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \right) = \sum_{l=0}^n (1+1)^l$ cf. binôme de Newton

$= 2^{n+1} - 1$ cf. somme des termes d'une suite géométrique

ET $\sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} 3^k = \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=0}^l \binom{l}{k} 3^k \right) = \sum_{l=0}^n (3+1)^l$ cf. binôme de Newton

$= \frac{4^{n+1} - 1}{3}$ cf. somme géométrique

EXO 17

On utilise le fait que $\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{i,j} = \sum_{0 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$

$$\text{AINS: } \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \binom{i}{j} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \right) \quad \text{car } \binom{i}{j} = 0 \text{ si } j > i$$

$$= \sum_{i=0}^n 2^i = \boxed{2^{n+1} - 1} \quad \text{comme dans l'exercice 16, (c)}$$

EXO 1

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 & (L2) \\ -7y + 3z = -8 & (L1) - 2(L2) \end{cases} : \text{COMPATIBLE}$$

$$(b) \begin{cases} 2x - 3y + z + t = 0 \\ x + 2y - z - 3t = 0 \\ -x - y + 2t = 0 \end{cases} \text{ est homogène donc COMPATIBLE}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0 = 1 \end{cases} \text{ est INCOMPATIBLE car } 0 \neq 1 \text{ (di, je vous jure!)}$$

EXO 2

$$(a) \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 = 1 \\ x = 1 - y = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ -1 = 1 \end{cases} \text{ INCOMPATIBLE}$$

$$(b) \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 4y = -2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 & (L3) \\ 0 = 0 & (L1) + (L3) \\ 0 = 0 & (L2) + 2(L3) \end{cases} \text{ COMPATIBLE}$$

$$(c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 & (L1) \\ -2y - 2z = -2 & (L2) - (L1) \end{cases} \text{ COMPATIBLE}$$

EXO 3

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & (L1) \\ y = 2 & (L2) - (L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 4 = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{y = \{(-1; 2)\}}$$

$$(b) \begin{cases} x+y+z=3 \\ -x+2y-z=-9 \\ 2x-y+3z=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 & (L1) \\ 3y=-6 & (L2)+(L1) \\ -3y+z=10 & (L3)-2(L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ y=-2 \\ z=10-6=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2-4=1 \\ y=-2 \\ z=4 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(1; -2; 4)\}$$

$$(c) \begin{cases} x+2y-z+t=3 \\ 2x+4y+z-2t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+t=3 & (L1) \\ 3z-4t=-7 & (L2)-2(L1) \end{cases}$$

4 inconnues
Rang = 2
↓
2 paramètres...
on prend y et t

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z=3-2y-t \\ 3z=-7+4t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z=3-2y-t \\ z=-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}t & (L2)/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}-2y+\frac{1}{3}t & (L1)+(L2) \\ z=-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}t & (L2) \end{cases}$$

d'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2}{3}-2y+\frac{1}{3}t, y, -\frac{7}{3}+\frac{4}{3}t, t \right) / y \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exo 4

$$(a) \begin{cases} x-3y+2z=2 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z-3y=2 \\ 3-2y=1 \end{cases}$$

3 inconnues
rang = 2 $\Rightarrow$ 1 paramètre
... y ici

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=2+3y \\ z=1+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y & (L1)-2(L2) \\ z=1+2y & (L2) \end{cases}$$

d'où

$$\mathcal{S} = \{(-y, y, 1+2y) / y \in \mathbb{R}\}$$

(droite de $\mathbb{R}^3$ cf chapitre XIV)

$$(b) \begin{cases} 3x+2y-z=-1 \\ 2x-y=-4 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 & (L3) \\ -y-4z=-10 & (L1)-3(L3) \\ -3y-2z=-10 & (L2)-2(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ y+4z=10 & -(L2) \\ 10z=20 & (L3)-3(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-4=-1 \\ y=10-8=2 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(-1; 2; 2)\}$$

$$(c) \begin{cases} 2y-z=2 \\ 2x-3y+z=-5 \\ x+y+z=0 \\ x+2y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 & (L3) \\ 2y-z=2 & (L1) \\ -5y-z=-5 & (L2)-2(L3) \\ y-2z=1 & (L4)-(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-2z=1 & (L4) \\ 3z=0 & (L2)-2(L4) \\ -11z=0 & (L3)+5(L4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(-1; 1; 0)\}$$

Exo 5

$$(a) \begin{cases} x+2y-z+t=1 \\ x+3y+z-t=2 \\ -x+y+7z+2t=3 \\ 2x+y-8z+t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z+t=1 & (L1) \\ y+2z-2t=1 & (L2)-(L1) \\ 3y+6z+3t=4 & (L3)+(L1) \\ -3y-6z-t=2 & (L4)-2(L1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+t=1 \\ y+2z-2t=1 \\ 9t=1 & (L3)-3(L2) \\ 2t=6 & (L4)+(L3) \end{cases}$$

SYSTÈME INCOMPATIBLE q. on obtient $t = \frac{1}{9} \neq 3$

$$(b) \begin{cases} x+y-3z-4t = -1 \\ 2x+2y+2z-3t = 2 \\ 3x+6y-2z+t = 8 \\ 2x+y+5z+t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z-4t = -1 \\ 8z+5t = 4 \quad (L2)-2(L1) \\ 3y+7z+13t = 11 \quad (L3)-3(L1) \\ -y+11z+9t = 7 \quad (L4)-2(L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z-4t = -1 \\ -y+11z+9t = 7 \quad (L4) \\ 8z+5t = 4 \quad (L2) \\ 40z+40t = 32 \quad (L3)+3(L4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z-4t = -1 \\ -y+11z+9t = 7 \\ 8z+5t = 4 \\ 5z+5t = 4 \quad (L4)/8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z-4t = -1 \\ -y+11z+9t = 7 \\ 5z+5t = 4 \quad (L4) \\ 3z = 0 \quad (L3)-(L4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ t = 4/5 \\ y = 36/5 - 7 = 1/5 \\ x = -1 - 1/5 + 16/5 = 10/5 = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(2; 1/5; 0; 4/5)\}$$

$$(c) \begin{cases} x-y+z+t = -1 \\ 5x+2y-z+3t = 5 \\ -3x-4y+3z+2t = 1 \\ 6x+y-2t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t = -1 \\ 7y-6z-2t = 10 \quad (L2)-5(L1) \\ -7y+6z+5t = -2 \quad (L3)+3(L1) \\ -7y+6z+2t = 10 \quad (L4)+2(L3) \end{cases}$$

donc
 $0 = 20 \quad (L2)+(L4)$
SYSTEME INCOMPATIBLE!

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

EXO 6

$$(a) \begin{cases} x-2y+3z = 5 \\ 2x-4y+z = 5 \\ 3x-5y+2z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z = 5 \\ -5z = -5 \quad (L2)-2(L1) \\ y-7z = -7 \quad (L3)-3(L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z = 5 \\ y-7z = -7 \\ z = 1 \quad (L2)/(-5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \mathcal{S} = \{(2; 0; 1)\}$$

$$(b) \begin{cases} x+2y-z = 5 \\ 2x+y+z = 10 \\ x+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z = 0 \\ 2y-3z = 5 \quad (L1)-(L3) \\ y-3z = 10 \quad (L2)-2(L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z = 0 \\ -3z+4y = 5 \\ y = -5 \quad (L2)-(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ z = (2y-5)/3 = -5 \\ y = -5 \end{cases} \quad \mathcal{S} = \{(10; -5; -5)\}$$

$$(c) \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -x + 4y + z = -1 \\ 2x - 2y - 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 3y + 4z = 1 & (L2) + (L1) \\ -9z = 0 & (L3) - 2(L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 1/3 = 7/3 \\ y = 1/3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(7/3; 1/3; 0)\}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y - 3z = -1 & (L1) - 2(L2) \\ 2y + z = -2 & (L3) - (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - y = 2 \\ z + 2y = -2 \\ 9y = -7 & (L2) + 3(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 4/9 - 7/9 = 15/9 \\ z = -2 + 14/9 = -4/9 \\ y = -7/9 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(15/9; -7/9; -4/9)\}$$

EXO 7

$$(a) \begin{cases} -y + z = 1 \\ -5x + 2y - z = -1 \\ x - 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 4 \\ -y + z = 1 \\ 2y - 11z = 19 & (L2) + 5(L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 4 \\ -y + z = 1 \\ -9z = 21 & (L3) + 2(L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 4 = -2/3 \\ y = z - 1 = -10/3 \\ z = -7/3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(-2/3; -10/3; -7/3)\}$$

$$(b) \begin{cases} y - 2z = 3 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -3 & (L3) - (L1) \\ y - 2z = 3 \\ -2x - 3y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y - 2z = 3 \\ -3y + z = 0 & (L3) + 2(L1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y - 2z = 3 \\ -5z = 9 & (L3) + 3(L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 + 2z = -3/5 \\ z = -9/5 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(-1; -3/5; -9/5)\}$$

$$(c) \begin{cases} 10x + 9y + z = -50 \\ 9x + 10y + 5z = 40 \\ x + 5y + 9z = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y + 9z = 180 & (L3) \\ -41y - 89z = -1850 & (L1) - 10(L3) \\ -35y - 76z = -1580 & (L2) - 9(L3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ 35y + 76z = 1580 & -(L3) \\ z = 30 & 35(L2) - 41(L3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 180 + 100 - 270 = 10 \\ y = (1580 - 76 \times 30) \div 35 = -20 \\ z = 30 \end{cases}$$

$$\mathcal{Y} = \{(10; -20; 30)\}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 & (L2) - (L1) \\ y + z = 5 & (L3) - 2(L1) \\ 2y + 4z = 14 & (L4) - 2(L1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + z = 5 & (L3) \\ z = 2 & (L2) - (L3) \\ 0 = 0 & (L4) - 2(L2) \end{cases}$$

$$x = 4 - 6 + 6 = 4$$

$$\Rightarrow y = 5 - 2 = 3 \\ z = 2$$

$$\mathcal{Y} = \{(4; 3; 2)\}$$

$$(e) \begin{cases} y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ x + y + 2z = 9 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 4 & (L2) \\ y + z = 5 & (L4) + (L2) \\ y + z = 5 & (L3) - (L2) \\ y + z = 5 & (L1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - z \\ y = 5 - z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{Y} = \{(4 - z; 5 - z; z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned}
 (\varnothing) \quad & \begin{cases} 4x + 8z = 1 \\ y - 6z = 2 \\ 2x - 4z = 3 \\ 5x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 3/2 & (L3)/2 \\ 16z = -5 & (L1) - 2(L3) \\ y - 6z = 2 \\ -y + 11z = -11/2 & (L4) - \frac{5}{2}(L3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 3/2 \\ y - 6z = 2 \\ 16z = -5 \\ 5z = -7/2 & (L4) + (3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = \emptyset}$$

$$\begin{aligned}
 z &= -\frac{5}{16} = -\frac{7}{10} \Rightarrow \text{CONTRADICTION} \\
 &\text{C'est donc un système incompatible}
 \end{aligned}$$

EX08

$\Rightarrow$ mêmes méthodes !
J'en ai marre de ces #e#!? de systèmes

SUITE DANS LA SECONDE PARTIE

CHAPITRE 13

AVEC PARAMÈTRES
(ça va être long!)

EXO 9

(a) (S) $\begin{cases} x-2y=2 \\ x-ay=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=2 \\ (2-a)y=a-2 \end{cases}$... et là on évite de diviser bêtement par $a-2$!

(Si $a=2$) (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+2 \\ 0=0 \end{cases}$

$$\mathcal{S} = \{ (2y+2; y) \text{ avec } y \in \mathbb{R} \}$$

(Si $a \neq 2$) (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=2 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

$$\mathcal{S} = \{ (0; -1) \}$$

(b) (S): $\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay=2 \\ (1-a^2)y=2-2a \end{cases}$ (L2) (L1)-a(L2) avec $1-a^2$ qui donne 0 pour $a=1$ et $a=-1$

(Si $a=1$) (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\mathcal{S} = \{ (2-y; y) \text{ avec } y \in \mathbb{R} \}$$

(Si $a=-1$) (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ 0=4 \end{cases}$ INCOMPATIBLE

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

(Si $|a| \neq 1$) (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-ay \\ y = \frac{2(1-a)}{(1+a)(1-a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+2a-2a}{1+a} \\ y = \frac{2}{1+a} \end{cases}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2}{1+a}; \frac{2}{1+a} \right) \right\}$$

↑
système de Cramer

$$(c) \begin{cases} ax + (1-a)y = 1 \\ (1-a)x - ay = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (1-2a)y = 1+a & (L2)+(L1) \\ ax + (1-a)y = 1 & (L1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1-a-a(1-2a) \\ = 1-a-a+2a^2 \\ = 1-2a+2a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Système de Cramer} \rightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x + (1-2a)y = 1+a \\ (1-2a+2a^2)y = 1-a-a^2 & (L2)-a(L1) \end{cases}$$

Or $1-2a+2a^2 = 1-2a+a^2+a^2 = (a-1)^2+a^2 > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On peut donc directement trouver les valeurs : $y = \frac{1-a-a^2}{1-2a+2a^2}$
et $x = 1+a - \frac{(1-2a)(1-a-a^2)}{1-2a+2a^2}$

À SIMPLIFIER DANS
UN MONDE IDEAL...

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(1+a - \frac{(1-2a)(1-a-a^2)}{1-2a+2a^2}, \frac{1-a-a^2}{1-2a+2a^2} \right) \right\}$$

$$(d) \begin{cases} x - y + az = a \\ (S) \begin{cases} x + ay - z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y + (a-1)z = a-2 & (L1)-(L3) \\ (a-1)y - 2z = -3 & (L2)-(L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y + (a-1)z = a-2 \\ 2(a-1)y - 4z = -6 & 2(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y + (a-1)z = a-2 \\ ((a-1)^2-4)z = (a+1)(a-4) & (L3)+(a-1)L2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a-1)(a-4)-6 \\ = a^2-3a+2-6 \\ = a^2-3a-4 \\ = (a+1)(a-4) \end{aligned}$$

Or $(a-1)^2-4 = (a-1)^2-2^2 = (a+1)(a-3)$ d'annuler pour $a=-1$ et $a=3$

(Si $a=-1$) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 2z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 3/2 - z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (L1)-(L2)$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(1/2; 3/2-z; z \right) \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $a=3$ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -2y+2z=1 \\ 0=-4 \end{cases}$

INCOMPATIBLE

$\mathcal{S} = \emptyset$

Si $a \neq -1$ et $a \neq 3$ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -2y+(a-1)z=a-2 \\ z=\frac{a-4}{a-3} \end{cases}$

système de Cramer

$\Rightarrow z = \frac{a-4}{a-3}, y = \frac{(a-1)z - (a-2)}{2} = \frac{(a-1)(a-4)}{2(a-3)} - \frac{1}{2}(a-2) = \dots$

et $x = 2 - y - z = 2 - \frac{(a-1)(a-4)}{2(a-3)} + \frac{1}{2}(a-2) - \frac{a-4}{a-3} = \dots$

Pour les raisons techniques indépendantes de ma volonté, je ne puis pas en même temps simplifier y et x !

$\mathcal{S} = \left\{ \left(\dots ; \dots ; \frac{a-4}{a-3} \right) \right\}$

(c) $(S) \begin{cases} x+y+(2a-1)z=1 \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+z=3(a+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+z=3a+3 & (L3) \\ (1-a)y+(2a-2)z=-3a-2 & (L1)-(L3) \\ (1-a^2)y+(1-a)z=-3a^2-3a+1 & (L2)-a(L3) \end{cases}$

ON NOTE LA PRÉSENCE DU FACTEUR $1-a$ DANS LES MEMBRES DE GAUCHE DES DEUX DERNIÈRES ÉQUATIONS

* Si $a=1$ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ 0=-5 \\ 0=-5 \end{cases}$

système incompatible

$\mathcal{S} = \emptyset$

* Si $a \neq 1$ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+z=3a+3 \\ y+2z=\frac{3a+2}{a-1} \\ (1+a)y+z=\frac{3a^2+3a-1}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z+ay=3a+3 \\ z+(1+a)y=\frac{3a^2+3a-1}{a-1} & (L3) \\ -(1+2a)y=\frac{-6a^2-3a+4}{a-1} & (L2)-(L3) \end{cases}$

ON DIVISE (L2) et (L3) PAR $(1-a)$

• Si $a = -1/2$ (L3) devient $0 = -\frac{8}{3}$: système incompatible $\mathcal{S} = \emptyset$

• Si $a \neq -1/2$ On a un système de 6 eqs particulièrement... eh... se réduisent!

$$(S) \Leftrightarrow y = \frac{6a^2 + 3a - 4}{(2a+1)(a-1)}, z = \frac{3a^2 + 3a - 1}{a-1} - (1+a)y \text{ et } x = 3a + 3 - z - ay = \dots$$

$$\mathcal{S} = \{(\dots, \dots, \dots)\}$$

$$\begin{aligned} (P) \quad & \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = -1 \\ x + y + az + t = 1 \\ x + y + z + at = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + at = -1 & (L4) \\ (a-1)y + (1-a)t = 0 & (L2) - (L4) \\ (a-1)z + (1-a)t = 2 & (L3) - (L4) \\ (1-a)y + (1-a)z + (1-a^2)t = 1+a & (L1) - a(L4) \end{cases} \end{aligned}$$

* Si $a = 1$ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 2 \\ 0 = 2 \end{cases}$ système incompatible $\mathcal{S} = \emptyset$

* Si $a \neq 1$ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + at = -1 & (L4) \\ y - t = 0 & \frac{(L2)}{a-1} \\ z - t = \frac{2}{a-1} & \frac{(L3)}{a-1} \\ y + z + (1+a)t = \frac{1+a}{1-a} & \frac{(L4)}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + at = -1 \\ y = t \\ z - t = \frac{2}{a-1} \\ z + (2+a)t = \frac{1+a}{1-a} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + at = -1 \\ y - t = 0 \\ z - t = \frac{2}{a-1} \\ (3+a)t = \frac{3+a}{1-a} & (L4) - (L3) \end{cases}$$

• Si $a = -3$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 3t = -1 \\ y = t \\ z - t = -1/2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 1/2 \\ y = t \\ z = t - 1/2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (t - 1/2; t; t - 1/2; t) \text{ avec } t \in \mathbb{R} \right\}$$

• Si $a \neq -3$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + at = -1 \\ y = t \\ z - t = \frac{2}{a-1} \\ t = \frac{1}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{2}{a-1} = \frac{1}{a-1} \\ y = -\frac{1}{a-1} \\ z = \frac{1}{a-1} \\ t = \frac{1}{1-a} = -\frac{1}{a-1} \end{cases}$$

$(L4) \leftarrow (L4)/(1+a)$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{a-1}; -\frac{1}{a-1}; \frac{1}{a-1}; -\frac{1}{a-1} \right) \right\}$$

Comme promis, cet exercice était long!

Exo 10

(a) (S) $\begin{cases} x - 2y = a \\ -2x + 4y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a & (L1) \\ 0 = b + 2a & (L2) + 2(L1) \end{cases}$

* Si $b + 2a \neq 0$ le système est incompatible donc $\mathcal{S} = \emptyset$

* Si $b + 2a = 0$ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\mathcal{S} = \{ (a - 2y; y) \text{ avec } y \in \mathbb{R} \}$$

(b) (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + by = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay = 1 & (L1) \\ (b - 2a)y = 0 & (L2) - 2(L1) \end{cases}$

* Si $b - 2a \neq 0$ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\mathcal{S} = \{ (1; 0) \}$$

$$* \text{ Si } b-2a=0 \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay=1 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-ay \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{ (1-ay; y) \text{ avec } y \in \mathbb{R} \}$$

$$(c) \quad (S) \begin{cases} x-y+z=1 \\ -ax+ay-z=1 \\ bz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ (a-1)z=a+1 \\ bz=1 \end{cases} \quad (L2) + a(L1)$$

$$* \text{ Si } b=0 \quad \text{systeme incompatible d. (L3)} \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$$

$$* \text{ Si } b \neq 0 \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1-1/b \\ (a-1)/b=a+1 \\ z=1/b \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } a-1 \neq b(a+1) \quad \text{systeme incompatible d. (L2)} \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$$

$$\bullet \text{ Si } a-1 = b(a+1) \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 - 1/b \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 1/b \end{cases} \quad \mathcal{S} = \{ (y + 1 - \frac{1}{b}; y; \frac{1}{b}) \text{ avec } y \in \mathbb{R} \}$$

$$(d) \quad (S) \begin{cases} 3x+y-z=1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+y-z=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z+3x=1 & (L1) \\ -x=a-2 & (L2)-2(L1) \\ x=b-1 & (L3)-(L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z+3x=1 \\ x=b-1 \\ 0=a+b-3 \end{cases} \quad (L3) \leftarrow (L2)+(L3)$$

$$\text{ Si } a+b \neq 3 \quad \text{systeme incompatible d. (L3)} \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$$

$$\text{ Si } a+b=3 \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=b-1 \\ y=4-3b+z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{S} = \{ (b-1; 4-3b+z; z) \text{ avec } z \in \mathbb{R} \}$$

JUSQU'À LÀ, ÇA VA !

$$\begin{array}{l}
 (e) \\
 (S)
 \end{array}
 \begin{cases}
 2x + y - z = 2 \\
 x - y + z = 4 \\
 3x + 3y - z = 4a \\
 (2-a)x + 2y - 2z = -2b
 \end{cases}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 z - y + x = 4 & (L2) \\
 3x = 6 & (L1) + (L2) \\
 2y + 4x = 4 + 4a & (L3) + (L2) \\
 (4-a)x = 8 - 2b & (L4) + 2(L2)
 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow
 \begin{cases}
 x = 2 \\
 z - y = 2 \\
 2y = 4a - 4 \\
 8 - 2a = 8 - 2b
 \end{cases}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 x = 2 \\
 y = 2a - 2 \\
 z = y + 2 = 2a \\
 a = b
 \end{cases}$$

• Si $b \neq a$ (S) est incompatible
si bien que $\mathcal{S} = \emptyset$

• Si $b = a$ (S) est un système de Cramer
et $\mathcal{S} = \{ (2, 2a-2, 2a) \}$

$$\begin{array}{l}
 (f) \\
 (S)
 \end{array}
 \begin{cases}
 ax + y + z + t = 1 \\
 x + ay + z + t = b \\
 x + y + az + t = b^2 \\
 x + y + z + at = b^3
 \end{cases}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 ax + y + z + t = 1 & (L1) \\
 (a-1)(y-x) = b-1 & (L2) - (L1) \\
 (a-1)(z-x) = b^2-1 & (L3) - (L1) \\
 (a-1)(t-x) = b^3-1 & (L4) - (L1)
 \end{cases}$$

* Si $a = 1$ (S) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 0 = b-1 = b^2-1 = b^3-1 \end{cases}$

$\rightarrow$ Si $b = 1$ (S) $\Leftrightarrow x + y + z + t = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z - t$ avec $y, z, t \in \mathbb{R}$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{ (1-y-z-t, y, z, t) \text{ avec } y, z, t \in \mathbb{R} \}$$

$\rightarrow$ Si $b \neq 1$ le système est incompatible donc $\mathcal{S} = \emptyset$

* Si $a \neq 1$ On pourrait l'échelonnement en divisant les 3 dernières lignes par $a-1$ (ON NE FAIT PAS VRAIMENT LA REMARCHE STANDARD ICI POUR PROFITER DES PARTICULARITÉS DU SYSTÈME)

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+k+ax=1 \\ y-x = (b-1)/(a-1) \\ z-x = (b^2-1)/(a-1) \\ k-x = (b^3-1)/(a-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + (b-1)/(a-1) \\ z = x + (b^2-1)/(a-1) \\ k = x + (b^3-1)/(a-1) \\ (3+a)x + (b^3+b^2+b-3)/(a-1) = 1 \end{cases} \quad \leftarrow (S_{\text{final}})$$

→ Si $a = -3$ la dernière équation mène à $b^3+b^2+b-3 = a-1 = -4$
d'où $b^3+b^2+b+1=0$
soit $b^2(b+1) + b+1 = (b^2+1)(b+1) = 0$
donc $b+1=0$

→ Si $b = -1$ le système est compatible et équivalent à

$$\begin{cases} y = x + 1/2 \\ z = x \\ k = x + 1/2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \mathcal{S} = \left\{ \left(x; x + \frac{1}{2}; x; x + \frac{1}{2} \right) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \right\}$$

→ Si $b \neq -1$ le système est incompatible donc $\mathcal{S} = \emptyset$

→ Si $a \neq -3$ on tombe sur un système de Cramer ; en partant de (4), on va exprimer x , puis y et z et k , en fonction de a et b ... pas de difficultés en reprenant le système (S_{final})

EXO 11

$$(a) \begin{cases} -iy = 1 \\ ix - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1/i = i^2/i = i \\ ix = y + 1 = i + 1 = i - i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - i \\ y = i \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(1-i; i)\}$$

$$(b) \begin{cases} ix - iy = 1+i \\ ix + y = 1-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{1}{i} + 1 = 1-i \\ ix + y = 1-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1-i & (L1) \\ (1+i)x = 2(1-i) & (L2) + (L1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2(1-i)}{1+i} = \frac{2(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-2i-1)}{2} = -2i \\ y = x - (1-i) = -1-i \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(-2i; -1-i)\}$$

$$(c) \begin{cases} (1+2i)x - iy = 1 \\ ix - (1+i)y = 1+3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (1-i)y = 3-i & (L2)/i \\ (1+2i)x - iy = 1 & (L1) \end{cases} \quad (1 = -i^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - (1-i)y = 3-i & (L1) \\ ((1+2i)(1-i)-i)y = 1-(1+2i)(3-i) & (L2) - (1+2i)(L1) \end{cases}$$

$$(1+2i)(1-i) = 1-i+2i-2i^2 = 3+i \text{ d'où } (1+2i)(1-i)-i = 3$$

$$(1+2i)(3-i) = 3-i+6i-2i^2 = 5+5i \text{ d'où } 1-(1+2i)(3-i) = -4-5i$$

$$\text{Ainsi } (L2) \Leftrightarrow 3y = -4-5i \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$$

$$\begin{aligned} \text{et } (L1) \Leftrightarrow x &= 3-i + (1-i)y = 3-i + (1-i)\left(-\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i\right) \\ &= 3-i - \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i + \frac{4i}{3} + \frac{5}{3}i^2 = 3-i - \frac{4}{3}i - \frac{1}{3} - \frac{5}{3} \\ &= -\frac{4}{3}i \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{4i}{3}, -\frac{4}{3} - \frac{5i}{3} \right) \right\}$$

De ce fait,

CHAPITRE XIV

EXERCICE 1

IDÉE Exprimer $\vec{AG}$, $\vec{AH}$ et $\vec{AI}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$

$$\vec{GB} = 4\vec{GA} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{AB} = 4\vec{GA} \Rightarrow \vec{AB} = 3\vec{GA} \Rightarrow \underline{\vec{AG} = -\frac{1}{3}\vec{AB}}$$

$$3\vec{CH} = \vec{CD} \Rightarrow 3(\vec{CA} + \vec{AH}) = \vec{CA} + \vec{AD} \Rightarrow 3\vec{AH} = -2\vec{CA} + \vec{AD} \Rightarrow \underline{\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD}}$$

$$6\vec{AI} = \vec{BD} + 2\vec{AC} \Rightarrow \vec{AI} = \frac{1}{6}(\vec{BA} + \vec{AD}) + \frac{1}{3}\vec{AC} \Rightarrow \underline{\vec{AI} = -\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AD}}$$

De ce fait $\vec{GH} = \vec{GA} + \vec{AH} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD}$

et $\vec{GI} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AD}$ d'où $\vec{GI} = \frac{1}{2}\vec{GH}$

ainsi, I est le milieu de $[GH]$

EXERCICE 2 Encore plus simple que l'exercice précédent !

$$1) \vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF} = -2\vec{AD} - 3\vec{AC} + 3\vec{BC} + 2\vec{BD} = 3(\underbrace{\vec{BC} + \vec{CA}}_{\vec{BA}}) + 2(\underbrace{\vec{BD} + \vec{DA}}_{\vec{BA}}) = 5\vec{BA}$$

2) Les droites (EF) et (BA) sont donc parallèles.

Elles peuvent être même confondues si A, B, C, D sont alignés

IDÉE GÉNÉRALE avec des relations vectorielles faisant intervenir peu de points, il est souvent intéressant de demander pour que les vecteurs aient tous la même origine. Cela minimise le nombre de vecteurs inconnus...

EX03

$$I = M[AB] \text{ donc } \vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$$

Commençons par exprimer $\vec{AI}'$ et $\vec{AJ}'$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ uniquement

$$J = M[CI] \text{ donc } \vec{CJ} = \frac{1}{2} \vec{CI} \text{ soit } \vec{CA}' + \vec{AJ}' = \frac{1}{2} (\vec{CA}' + \vec{AI})$$

$$\text{d'où } \vec{AJ}' = \frac{1}{2} \vec{AC}' + \frac{1}{2} \vec{AI} = \frac{1}{4} \vec{AB}' + \frac{1}{2} \vec{AC}'$$

$$K = M[DJ] \text{ donc } \vec{DK} = \frac{1}{2} \vec{DJ} \text{ soit } \vec{DA}' + \vec{AK}' = \frac{1}{2} (\vec{DA}' + \vec{AJ}')$$

$$\text{d'où } \vec{AK}' = \frac{1}{2} \vec{AD}' + \frac{1}{2} \vec{AJ}' = \boxed{\frac{1}{8} \vec{AB}' + \frac{1}{4} \vec{AC}' + \frac{1}{2} \vec{AD}'}$$

EX04

1) Dans le repère, $A(0;0)$ $B(1;0)$ et $C(0;1)$

$$E = M[BC] \text{ donc } E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$F = M[AE] \text{ donc } F\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$$

Equation de (BF): pour $M(x;y)$ on a $\vec{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{BF}\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } M \in (BF) \Leftrightarrow \det(\vec{BM}, \vec{BF}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & -3/4 \\ y & 1/4 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x-1) + \frac{3}{4}y = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x + 3y = 1}$$

Equation de (AC) c'est l'axe des ordonnées donc (AC): $x = 0$

Ainsi les coordonnées de G vérifient $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/3 \end{cases} \text{ donc } G(0; 1/3)$

2) Autrement dit, $\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{3} \vec{AC}}$

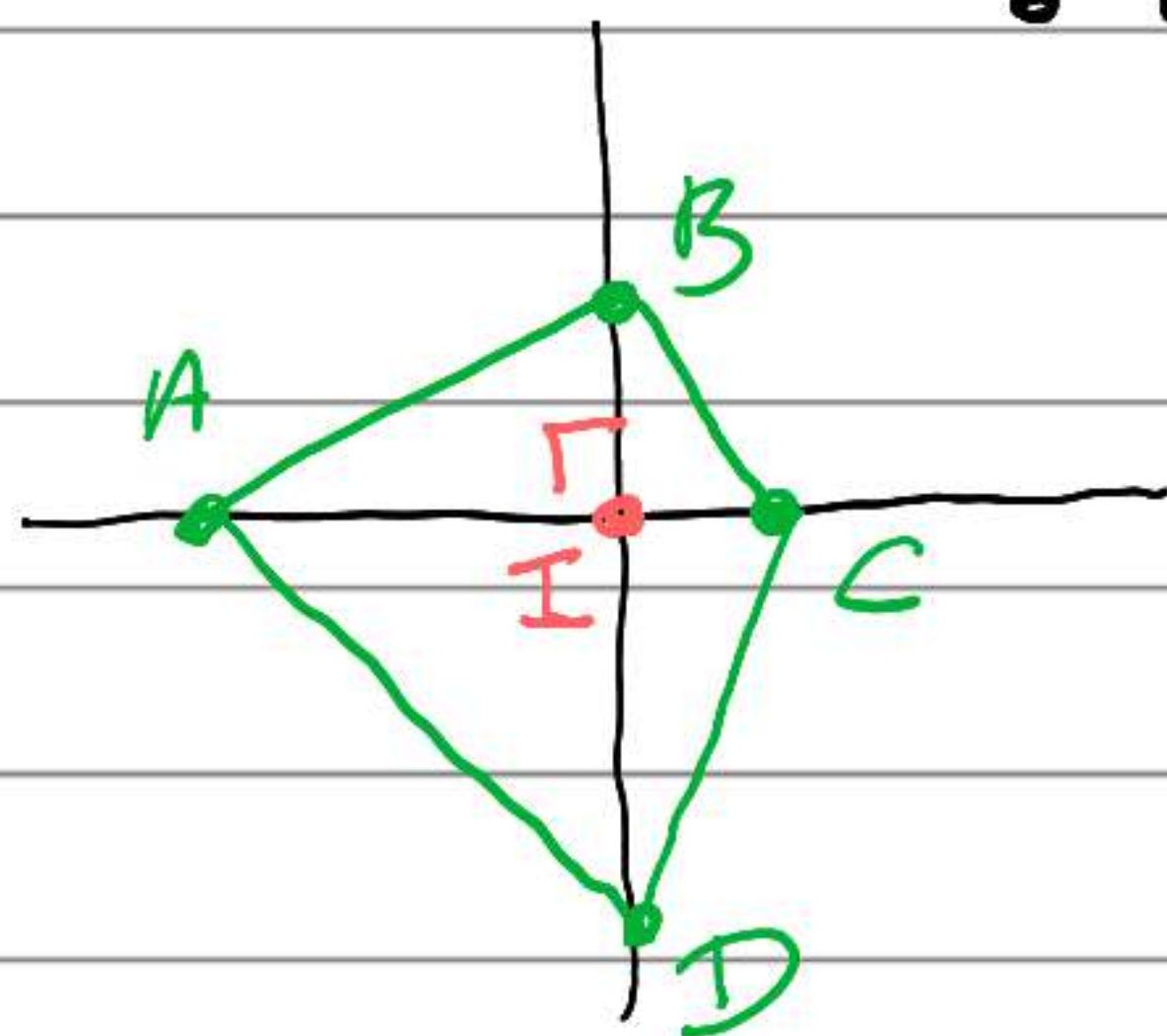
EX05

$$\begin{aligned} DA^2 - DC^2 &= (\vec{DA} + \vec{DC}) \cdot (\vec{DA} + \vec{CD}) = (\vec{DA} + \vec{DC}) \cdot \vec{CA} \text{ et } BC^2 - BA^2 = (\vec{CB} + \vec{AB}) \cdot (\vec{CB} + \vec{BA}) \\ \text{donc } DA^2 + BC^2 - DC^2 - BA^2 &= (\vec{DA} + \vec{AB} + \vec{DC} + \vec{CB}) \cdot \vec{CA} = (\vec{CB} + \vec{AB}) \cdot \vec{CA} \\ &= 2 \vec{DB} \cdot \vec{CA} = 0 \quad \text{c.f. } (DB) \perp (CA) \end{aligned}$$

EXO 5 sans produit scalaire !

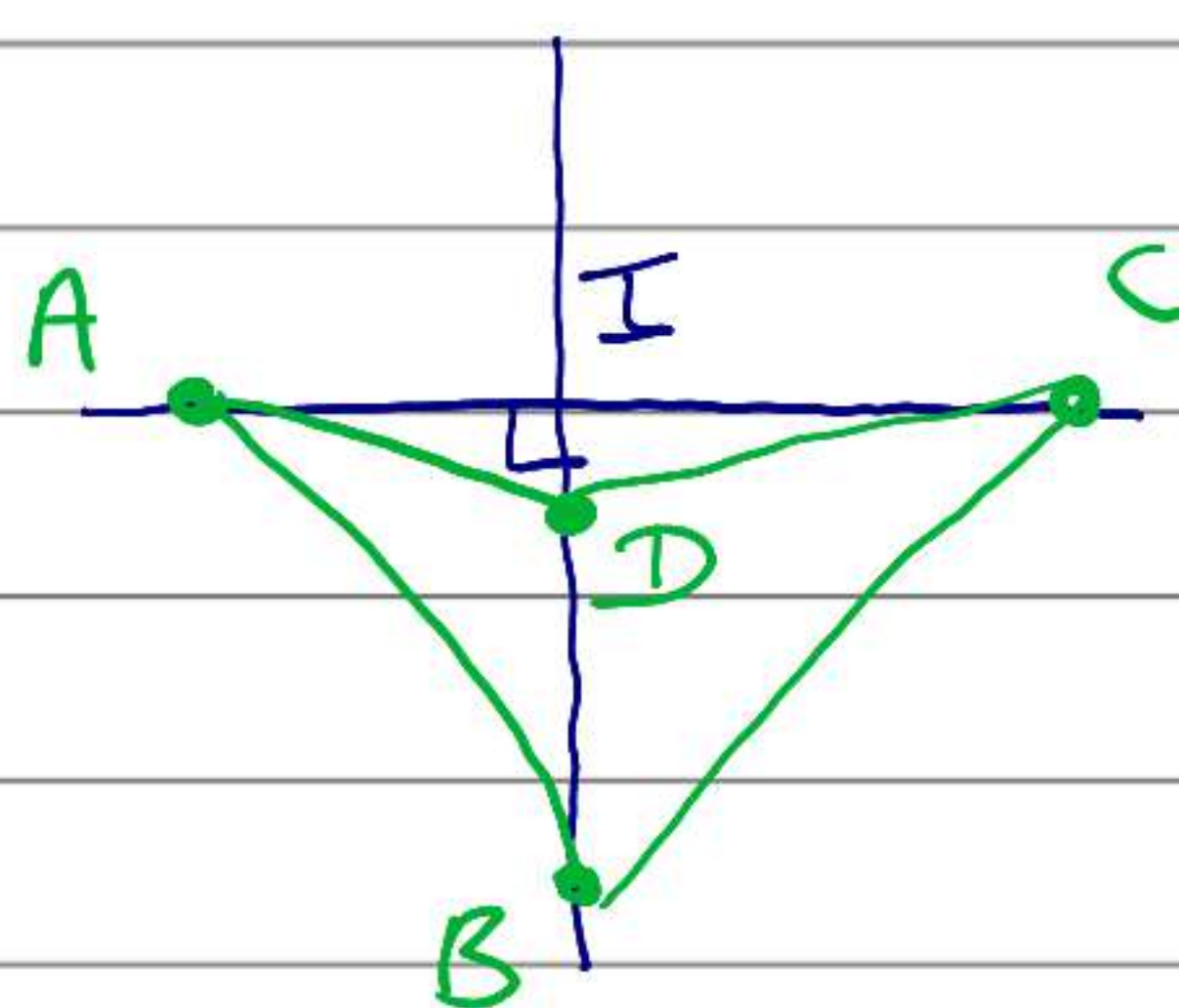
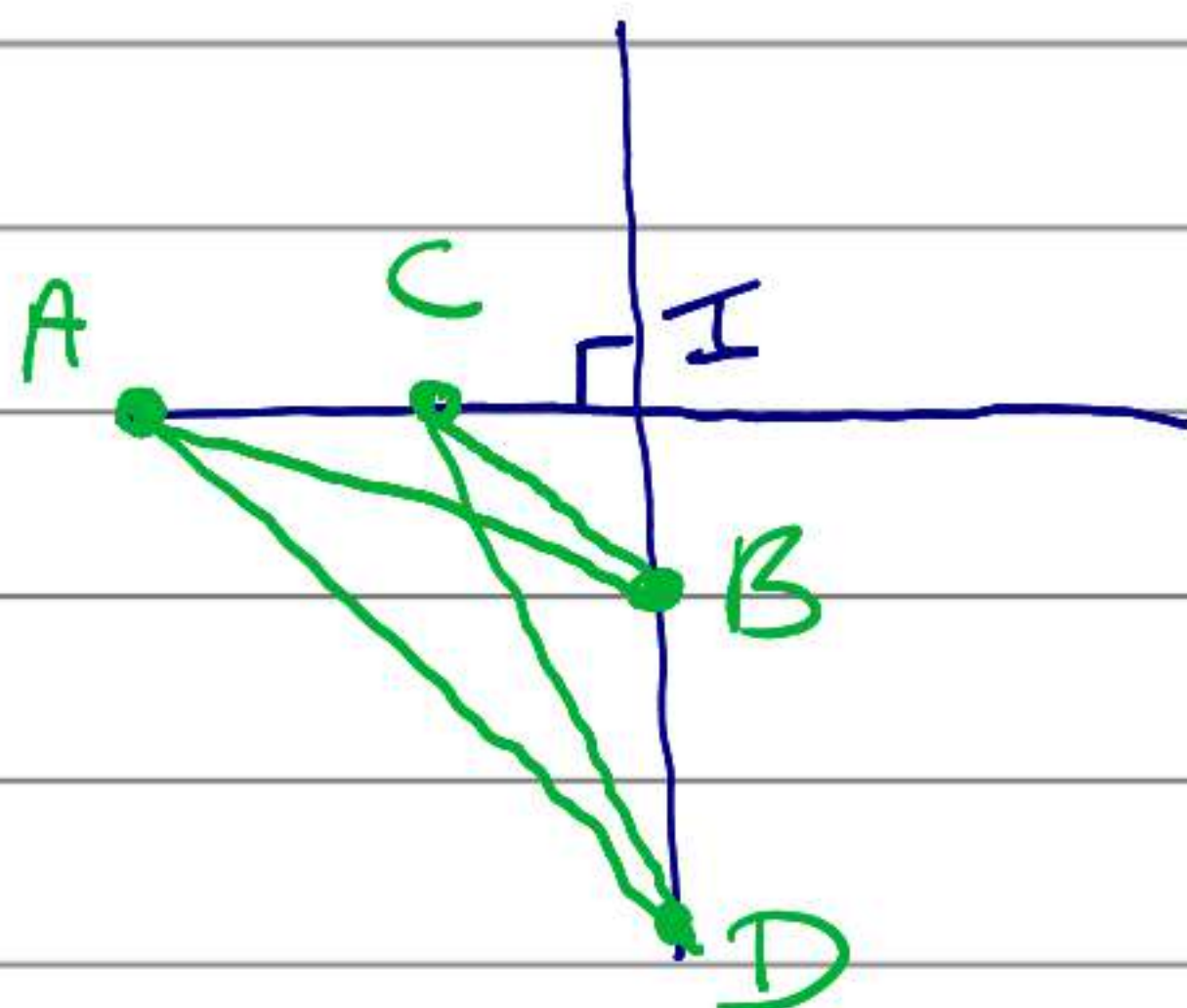
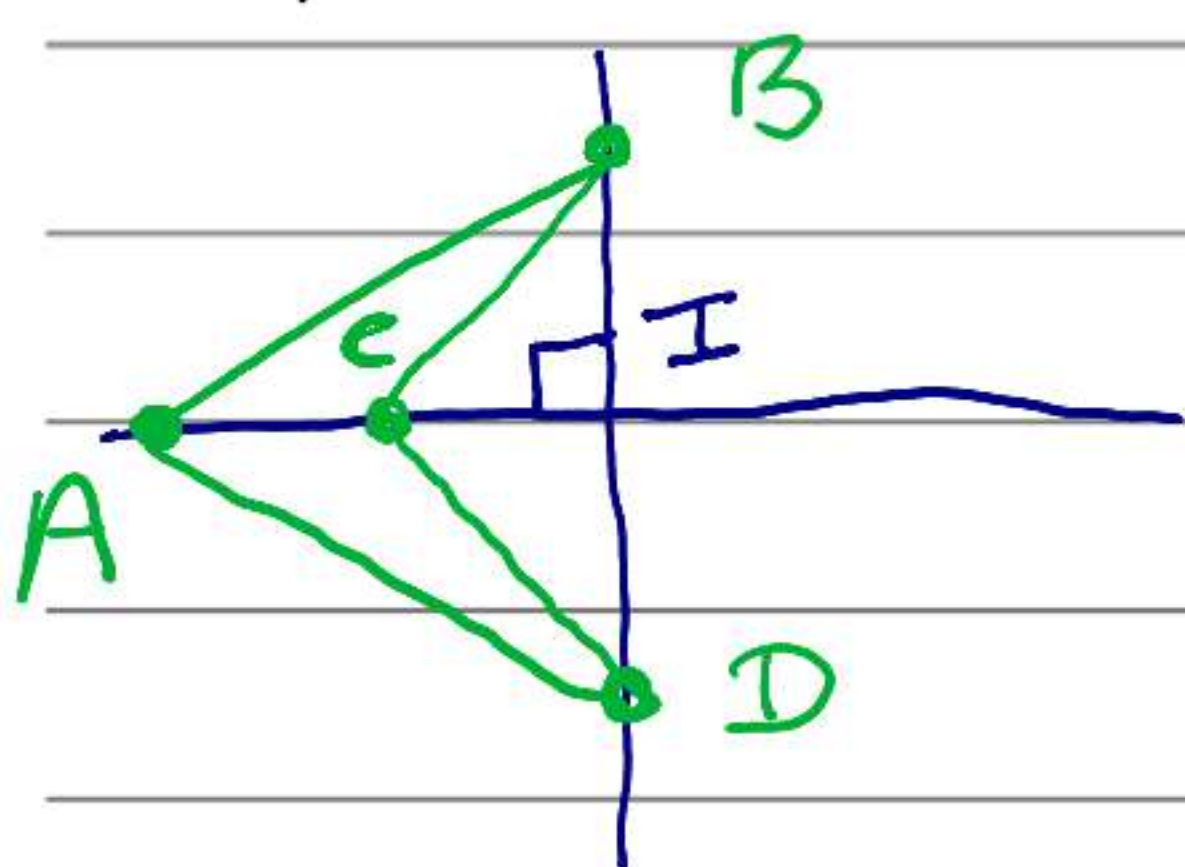
- Notons I l'intersection de (AC) et (BD)

PYTHAGORE dans les triangles rectangles AIB, BIC, CID et DIA :



$$\begin{aligned} AB^2 + DC^2 &= (AI^2 + IB^2) + (DI^2 + IC^2) \\ &= (AI^2 + ID^2) + (BI^2 + IC^2) \\ &= AD^2 + BC^2 \end{aligned}$$

- Attention toutefois, ce n'est pas la seule configuration possible : il faut vérifier que cela fonctionne dans les autres cas de figure



Quelle que soit la configuration, on retrouve les 4 mêmes triangles rectangles AIB, BIC, CID et DIA donc les relations entre les côtés restent les mêmes.

EXO 6

Notons $D(x; y) \in \mathcal{P}$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si, $\vec{BA} = \vec{CD}$ (1)

Or $\vec{BA} \begin{pmatrix} 2-4=-2 \\ -3+1=-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{CD} \begin{pmatrix} x+4 \\ y-5 \end{pmatrix}$ donc (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=-2 \\ y-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases}$

Ainsi $\boxed{D(-6; 3)}$

Vérification: $\vec{BA} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

EXO 7

Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $AM=4$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 6$

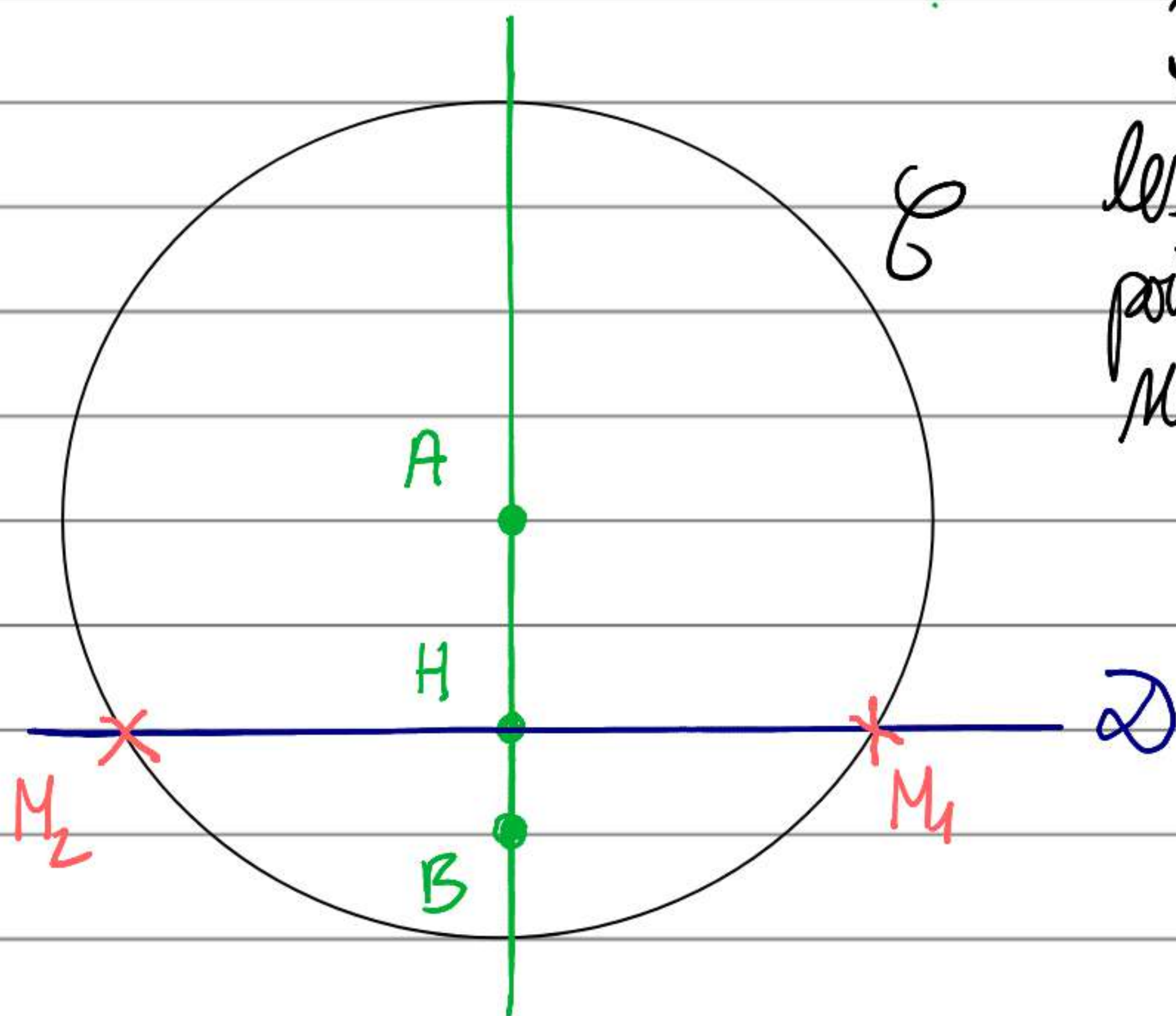
* $AM=4$ donc M est sur le cercle de centre A et de rayon 4 (appelons le $\mathcal{C}$)

* Notons H le projeté orthogonal de M sur (AB)

Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = 6$ donc $\vec{AH}$ a le même sens que $\vec{AB}$ et

$$AB \times AH = 6 = 3 \times AH \text{ d'où } AH=2 \text{ donc } \vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

De ce fait, M est sur la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (AB) et passant par le point H défini par $\vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{AB}$



De ce fait, les points M vérifiant les conditions requises sont les deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$, notés M_1 et M_2 sur le dessin

(Idée) no faire apparaître que des vecteurs d'origine A

EXO 8

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC}$$

$$= \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD}) + \vec{AC} \cdot (\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{AD} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC})$$

$$= -\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AC} \cdot \vec{AD}$$

$$= 0 \quad \text{CQFD!}$$

$$\begin{cases} \vec{BA} \cdot \vec{BD} \leq 0 \\ \vec{DA} \cdot \vec{DC} \leq 0 \end{cases}$$

$$? AC \geq BD$$

EXO 9

$$\begin{aligned} AC^2 &= \vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC})^2 = (\vec{BD} + (\vec{AB} + \vec{DC}))^2 = \vec{BD}^2 + 2\vec{BD} \cdot (\vec{AB} + \vec{DC}) + (\vec{AB} + \vec{DC})^2 \\ &= \vec{BD}^2 - \underbrace{2\vec{BD} \cdot \vec{BA}}_{\geq 0} - \underbrace{2\vec{DB} \cdot \vec{DC}}_{\geq 0} + \underbrace{\|\vec{AB} + \vec{DC}\|^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$\text{donc } AC^2 \geq BD^2$$

$$\text{soit } \boxed{AC \geq BD}$$

EXO 10

Dans chaque cas, décomposer $\vec{MA}' = \vec{MI}' + \vec{IA}'$ et $\vec{MB}' = \vec{MI}' + \vec{IB}'$
 en notant que $\vec{IA}' = -\frac{1}{2}\vec{AB}'$ et $\vec{IB}' = \frac{1}{2}\vec{AB}'$

$$\begin{aligned} 1) \quad MA'^2 + MB'^2 &= \vec{MA}'^2 + \vec{MB}'^2 = (\vec{MI}' - \frac{1}{2}\vec{AB}')^2 + (\vec{MI}' + \frac{1}{2}\vec{AB}')^2 \\ &= \vec{MI}'^2 - \vec{MI}' \cdot \vec{AB}' + \frac{1}{4}\vec{AB}'^2 + \vec{MI}'^2 + \vec{MI}' \cdot \vec{AB}' + \frac{1}{4}\vec{AB}'^2 \\ &= 2\vec{MI}'^2 + \frac{1}{2}\vec{AB}'^2 \end{aligned}$$

$$MA'^2 + MB'^2 = 2MI'^2 + \frac{1}{2}AB'^2$$

$$\begin{aligned} 2) \quad MA'^2 - MB'^2 &= \vec{MA}'^2 - \vec{MB}'^2 = (\vec{MA}' + \vec{MB}') \cdot (\vec{MA}' - \vec{MB}') = 2\vec{MI}' \cdot (\vec{MA}' + \vec{MB}') \\ &= 2\vec{MI}' \cdot \vec{BA}' \end{aligned}$$

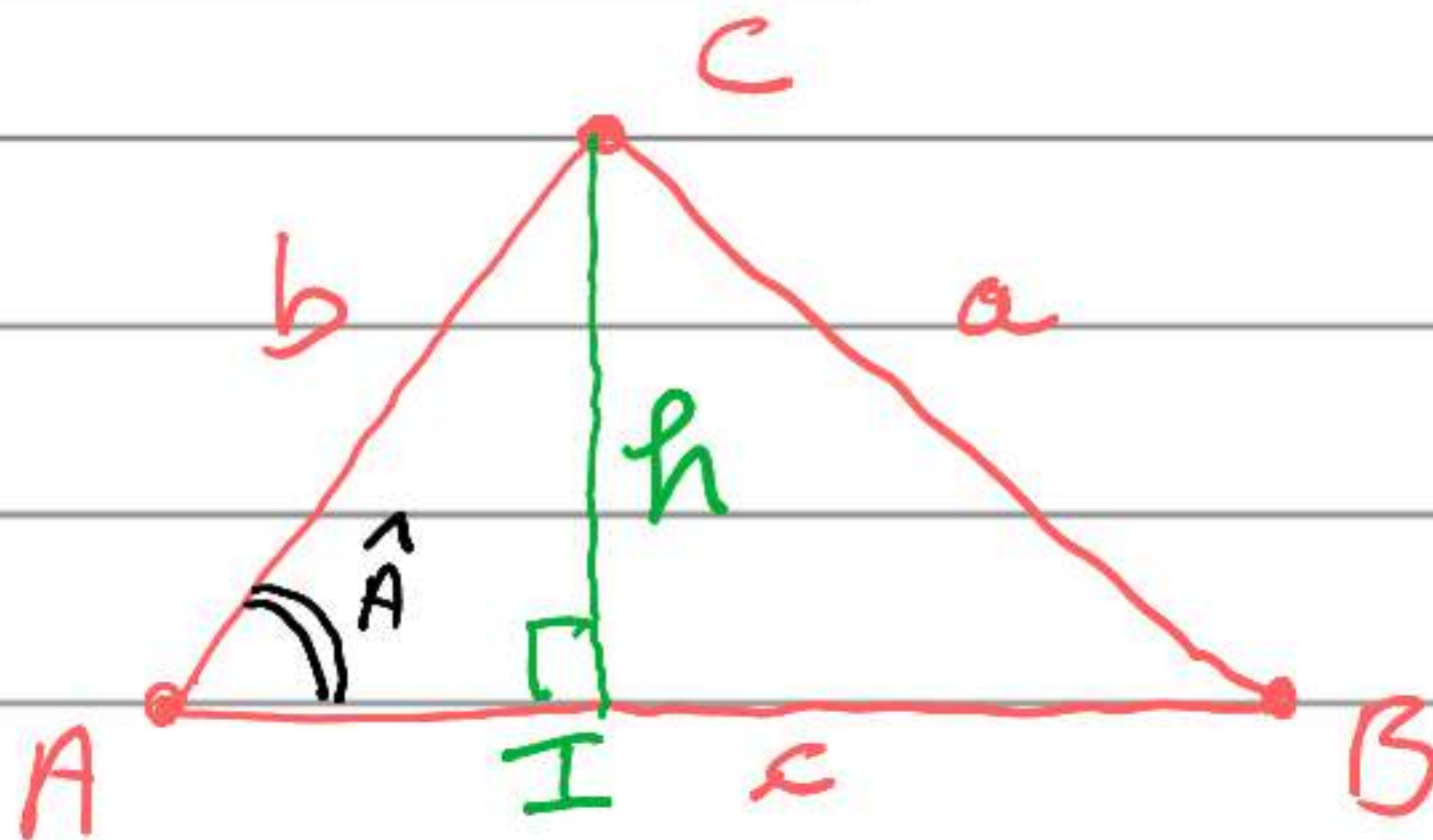
$$MA'^2 - MB'^2 = 2\vec{MI}' \cdot \vec{BA}'$$

$$3) \quad \vec{MA}' \cdot \vec{MB}' = (\vec{MI}' - \frac{1}{2}\vec{AB}') \cdot (\vec{MI}' + \frac{1}{2}\vec{AB}') = \vec{MI}'^2 - \frac{1}{4}\vec{AB}'^2 = MI'^2 - \frac{1}{4}AB'^2$$

$$\vec{MA}' \cdot \vec{MB}' = MI'^2 - \frac{1}{4}AB'^2$$

EXO 11

$$\begin{aligned} 1) \quad a^2 &= BC^2 = \vec{BC}'^2 = (\vec{BA}' + \vec{AC}')^2 \\ &= (\vec{AC}' - \vec{AB}')^2 \\ &= \vec{AC}'^2 - 2\vec{AC}' \cdot \vec{AB}' + \vec{AB}'^2 \\ &= b^2 - 2bc \cos(\hat{A}) + c^2 \end{aligned}$$



d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

$$2) \quad 2S = \text{Base} \times \text{Hauteur} = AB \times h = c \times h$$

Or $\sin \hat{A} = h/b$ (triangle rectangle AIC) donc $h = b \sin(\hat{A})$

d'où

$$2S = bc \sin(\hat{A})$$

On en déduit que $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$... et on prouve de même que $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

soit

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

3) Notons $K = \frac{2S}{abc}$. Ainsi, $\sin \hat{A} = Ka$, $\sin \hat{B} = Kb$ et $\sin \hat{C} = Kc$

donc ABC rectangle en A $\Leftrightarrow BC^2 = BA^2 + AC^2$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow K^2 a^2 = K^2 b^2 + K^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\hat{A}) = \sin^2(\hat{B}) + \sin^2(\hat{C})$$

Ainsi

ABC rectangle en A ssi $\sin^2 \hat{A} = \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}$

4) Attention, ça va être fin et délicat !

Bien entendu, $\sin^2(\hat{A}) = 1 - \cos^2(\hat{A})$ (relation fondamentale de la trigonométrie)

Or $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ (question 1)

$$\text{donc } \cos^2(\hat{A}) = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \quad \underbrace{-(b^2 + c^2 - 2bc)}$$

$$\text{d'où } \sin^2(\hat{A}) = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4b^2c^2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2} \quad \text{CQFD !}$$

5) Enfin $2S = bc \sin \hat{A}$ (question 2)

$$\text{d'où } S^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 \hat{A} = \frac{1}{16} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$\text{or } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ d'où } p-a = \frac{-a+b+c}{2}, p-b = \frac{a-b+c}{2} \text{ et } p-c = \frac{a+b-c}{2}$$

si bien que $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ soit

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Et voilà pour la formule de Héron (I^{er} siècle ap. J.C.)

EXO 12

On dispose du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et on cherche tous les vecteurs $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\vec{u} \perp \vec{v}$

Or, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0 \text{ (E) (avec } (a, b) \neq (0, 0) \text{)}$

* Si $a=0$ (E) $\Leftrightarrow by = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (cf. $b \neq 0$ puisque $(a, b) \neq (0, 0)$)
d'où $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$

* Si $a \neq 0$ (E) $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}y \Leftrightarrow \begin{cases} x = -bt \\ y = at \end{cases}$ en notant $t = \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$
d'où $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Les solutions obtenues dans le cas $a=0$ étant de cette forme, on peut donc affirmer que dans tous les cas, les vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ sont tous les vecteurs de la forme

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

EN PRATIQUE, ON RETIENDRA QUE $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ EST ORTHOGONAL À $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$... CE QUI EST PRATIQUE QUAND ON RECHERCHE UN VECTEUR NORMAL D'UNE DROITE

EXO 13

$$\begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (m-4)2m + (2m+1)(3-m) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m^2 - 8m + 6m - 2m^2 + 3 - m = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{G} = \{1\}$$

EN EFFET, POUR $m=1$ $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

EXO 14

Le même principe : $\vec{u}' \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{u}' \cdot \vec{v}' = 0 \Leftrightarrow -3m - 2m + 10 = 0$
 $\Leftrightarrow 10 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

$$\mathcal{Y} = \{2\}$$

EN EFFET, POUR $m=2$, $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

EXO 15

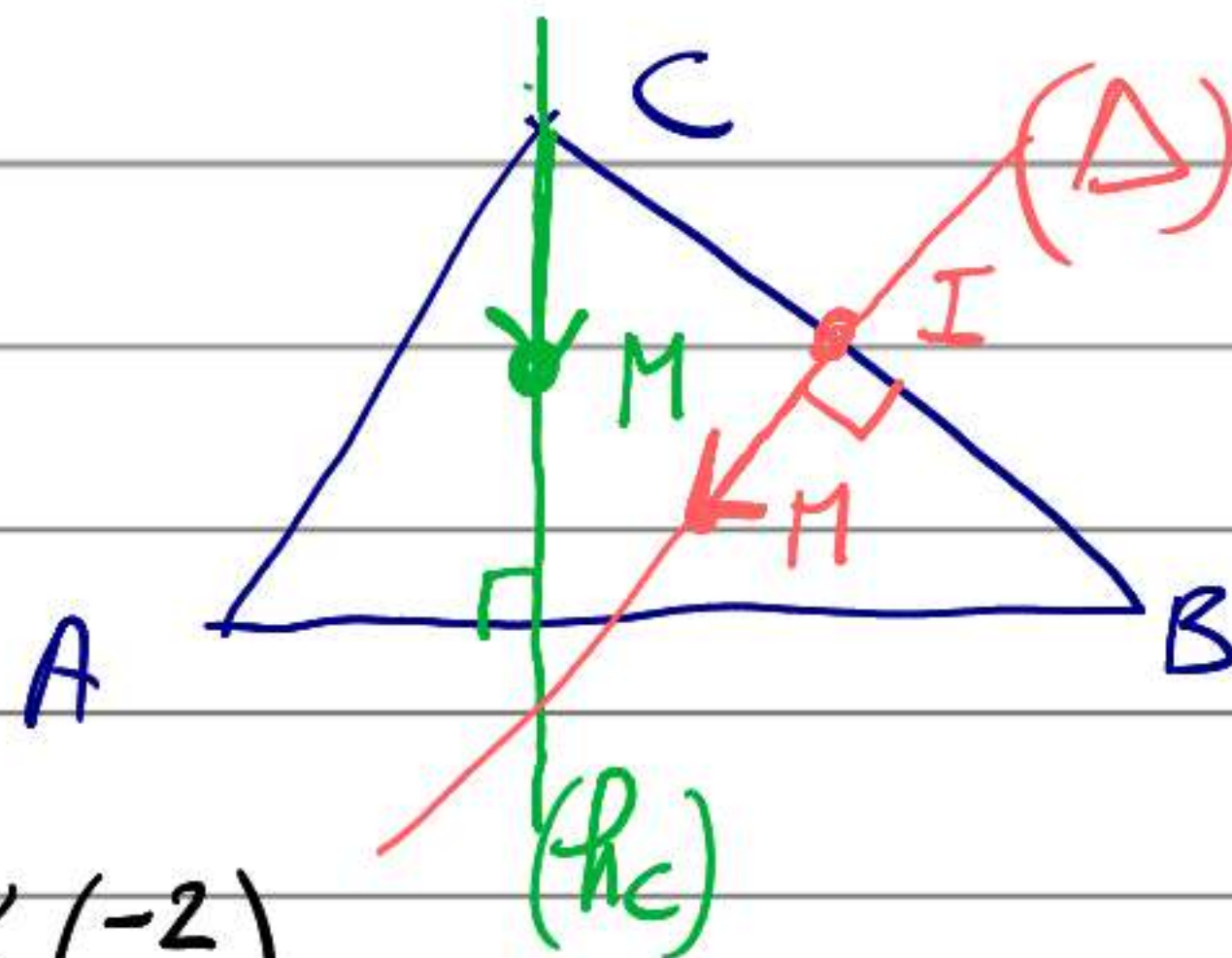
$\vec{BA}' \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC}' \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $BA = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{17}$ et $\vec{BA}' \cdot \vec{BC}' = -4 + 3 = -1$
 si bien que

(Angle quasiment droit,
un peu obtus)

$$\cos(\vec{BA}', \vec{BC}') = \frac{\vec{BA}' \cdot \vec{BC}'}{BA \times BC} = \frac{-1}{\sqrt{170}}$$

EXO 16

- Notons (h_c) la hauteur issue de C
 Alors $M \in (h_c) \Leftrightarrow \vec{CM}' \perp \vec{AB}'$
 $\Leftrightarrow \vec{CM}' \cdot \vec{AB}' = 0$



Pour $M(x; y)$, on a $\vec{CM}' \begin{pmatrix} x+5 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB}' \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

d'où $\vec{CM}' \cdot \vec{AB}' = -2(x+5) + 2(y+3) = 2(y+3-x-5) = 2(y-x-2)$

Ainsi, la droite (h_c) a pour équation

$$(h_c): y - x - 2 = 0$$

- Notons (Δ) la médiatrice du segment $[BC]$

$I = m[BC]$ a pour coordonnées $x_I = -3/2$ et $y_I = 0$

Alors $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{IM}' \perp \vec{BC}'$

$$\Leftrightarrow \vec{IM}' \cdot \vec{BC}' = 0$$

Pour $M(x; y)$, on a $\vec{IM}' \begin{pmatrix} x+3/2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{BC}' \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \end{pmatrix}$

d'où $\vec{IM}' \cdot \vec{BC}' = -7(x+3/2) - 6y = -(7x+6y+21/2)$

Ainsi, la droite (Δ) a pour équation

$$(\Delta): 7x + 6y + 21/2 = 0$$

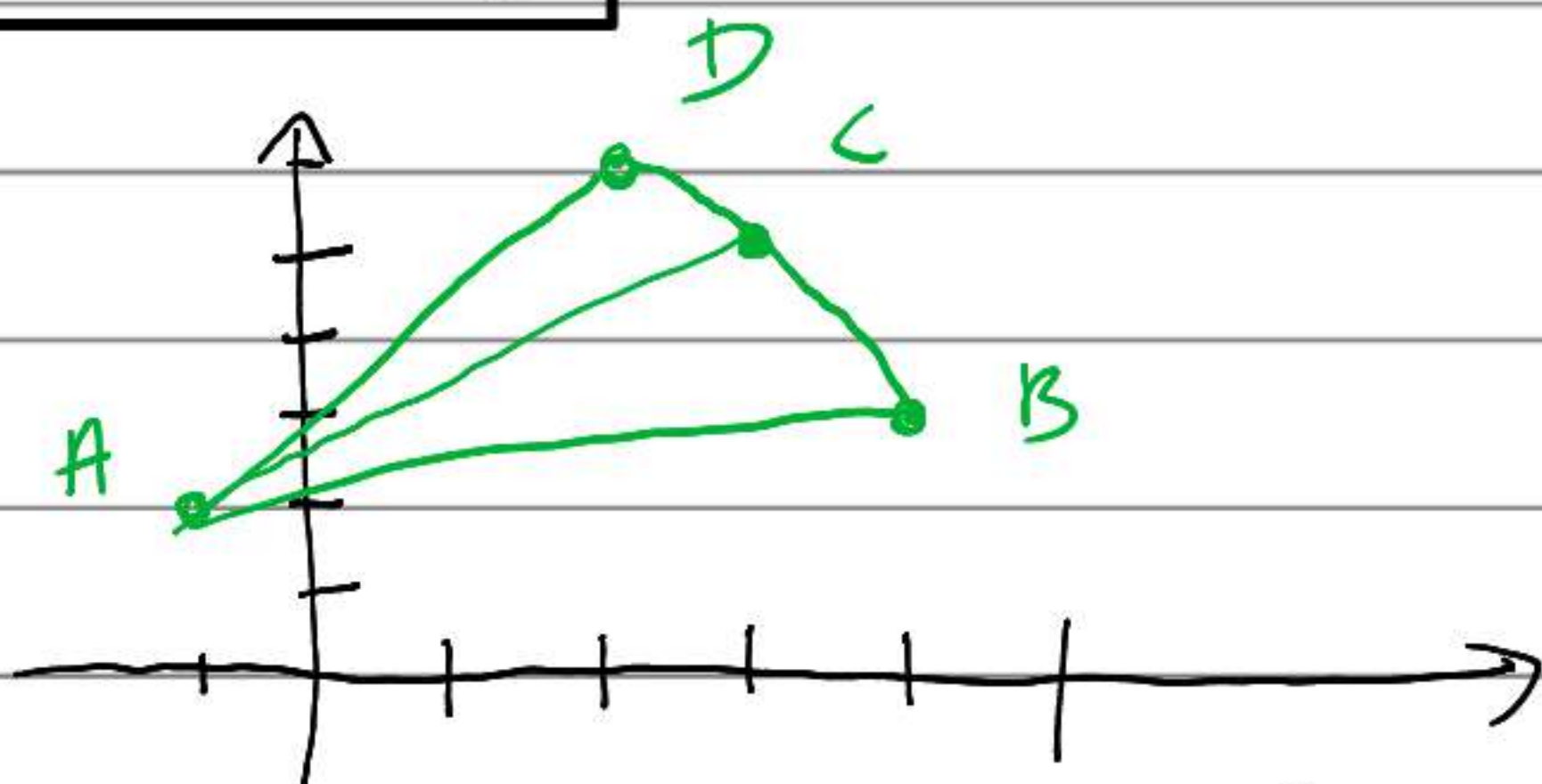
EXO 17

On reprend les calculs de l'exercice 15, en ajoutant $\det(\vec{BA'}, \vec{BC'}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 13$
De ce fait

$$\sin(\vec{BA'}, \vec{BC'}) = \frac{\det(\vec{BA'}, \vec{BC'})}{BA \times BC} = \frac{13}{\sqrt{170}}$$

EXO 18

Le schéma ci-contre permet de voir que l'aire recherchée est $A = A_{ABC} + A_{ACD}$



Trois vecteurs utiles : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{AD} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| \quad \text{avec} \quad \det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11$$

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AC}, \vec{AD})| \quad \text{avec} \quad \det(\vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 9 = 7$$

De ce fait, $A = \frac{1}{2} (11 + 7) = 9$ (unités d'aire)

EXO 19

Soit $M \in P$. Notons (x, y) ses coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (α, β) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Ceci signifie que

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad (1)$$

En particulier, $\det(\vec{OM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & \sqrt{3} \end{vmatrix} = x\sqrt{3} - y = \beta \det(\vec{v}, \vec{u}) = \beta \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -\beta(1 + \sqrt{3})$

et $\det(\vec{OM}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x + y = \alpha \det(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = \alpha(1 + \sqrt{3})$

d'où $\alpha = \frac{x + y}{1 + \sqrt{3}}$ et $\beta = \frac{-x\sqrt{3} + y}{1 + \sqrt{3}}$

* EN EFFET, $\det(\vec{OM}, \vec{u})$
 $= \det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{u})$
 $= \alpha \det(\vec{u}, \vec{u}) + \beta \det(\vec{v}, \vec{u})$

On peut aussi résoudre le système linéaire (1) :

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \alpha\sqrt{3} + \beta = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1+\sqrt{3}) = x+y \\ \beta(1+\sqrt{3}) = y - x\sqrt{3} \end{cases} \begin{matrix} (L1) + (L2) \\ (L2) - \sqrt{3}(L1) \end{matrix}$$

et on obtient la même chose !

EXO 20

- 1) Notons D_1 et D_2 les droites d'équations respectives $ax+by=e$ et $cx+dy=f$.
Le système (S) est le système vérifié par les coordonnées des points communs aux deux droites : il admet donc une unique solution si, et seulement si, celles-ci sont sécantes, c'est-à-dire si, et seulement si, leurs vecteurs normaux $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Cette condition équivaut à $\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$
soit encore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Ainsi, le système (S) admet une unique solution si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

- 2) Dans ce cas, considérons la solution (x, y) du système (S) et notons $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Alors (S) $\Leftrightarrow x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$
si bien que $\det(\vec{w}, \vec{v}) = x \det(\vec{u}, \vec{v}) + y \det(\vec{v}, \vec{v}) = x \det(\vec{u}, \vec{v})$
et $\det(\vec{u}, \vec{w}) = x \det(\vec{u}, \vec{u}) + y \det(\vec{u}, \vec{v}) = y \det(\vec{u}, \vec{v})$
Comme $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, il en découle que

$$x = \det(\vec{w}, \vec{v}) \div \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\text{et } y = \det(\vec{u}, \vec{w}) \div \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Ce sont les **FORMULES DE CRAMER**, qui permettent de résoudre directement les systèmes linéaires 2×2

3) Utilisons les résultats des questions 1) et 2)

* $\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$ donc le système linéaire propre admet une unique solution d'après la question 1)

* Elle-ci vérifie $x = \begin{vmatrix} a & \sin \theta \\ b & \cos \theta \end{vmatrix} = \underline{a \cos(\theta) - b \sin(\theta)}$

et $y = \begin{vmatrix} \cos \theta & a \\ -\sin \theta & b \end{vmatrix} = \underline{b \cos(\theta) + a \sin(\theta)}$

EXO 21

• $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc elle admet $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal; de ce fait, elle a une équation de la forme $2x + 3y + c = 0$

Or $A \in \mathcal{D}$ donc $2x^2 + 3x + c = 0$ soit $c = -7$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}$ a pour équation

$$\boxed{2x + 3y - 7 = 0}$$

• AUTRE MÉTHODE

Pour $M(x; y)$, on a $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}'$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}') = 0$

Or $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-2) - 3(y-1) = -2x - 3y + 7$

si bien que $\mathcal{D}$ admet pour équation

$$\boxed{-2x - 3y + 7 = 0}$$

EXO 22

Il faut résoudre l'équation afin de faire apparaître la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$. Pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a

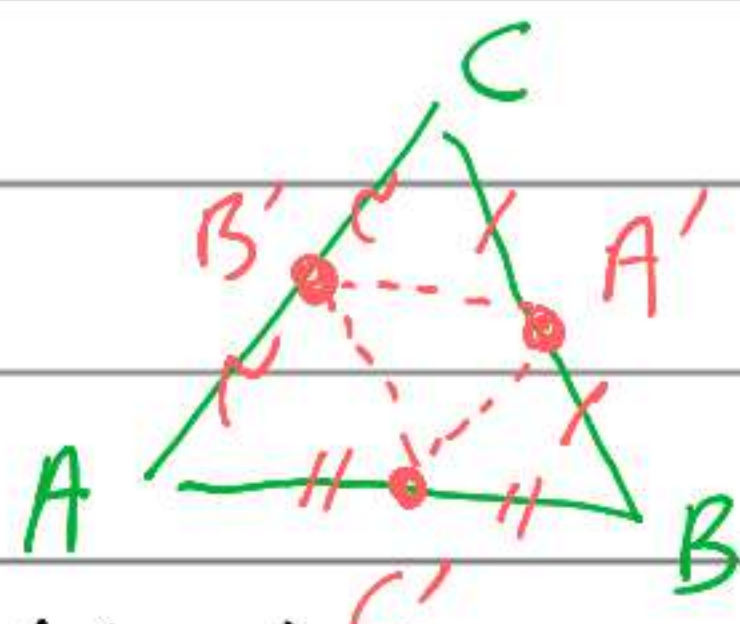
$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 4x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 4x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 1x \\ y = 3 - 4x \end{cases} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Pour conséquent, la droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(0; 3)$ et est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

VERIFICATION $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont bien orthogonaux

EXO 23

- 1) Dans ce repère, $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$
Notons A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Alors $A'(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $B'(0;\frac{1}{2})$ et $C'(\frac{1}{2};0)$



Equation de (AA')

Comme $A(0;0)$ et $A'(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, l'équation est évidemment $x=y$ soit $x-y=0$

Equation de (BB')

C'est $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BB'}) = 0$ avec $M(x;y) \in \mathcal{P}$
Or $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BB'} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BB'}) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{x-1}{2} + y$
donc $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BB'}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + y = 0 \Leftrightarrow x+2y=1$

Equation de (CC')

Cette droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Elle possède ainsi une équation de la forme $2x+y+c=0$
Enfin, $C \in (CC')$ donc $2 \times 0 + 1 + c = 0$ soit $c = -1$.
Ainsi, (CC') admet pour équation $2x+y=1$

- 2) Cherchons s'il existe un point $M(x,y)$ appartenant à ces 3 droites. C'est le cas si, et seulement si,
- $$\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3y=1 \\ 3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/3 \\ y=1/3 \\ 1=1 \end{cases} \leftarrow \text{ok!}$$

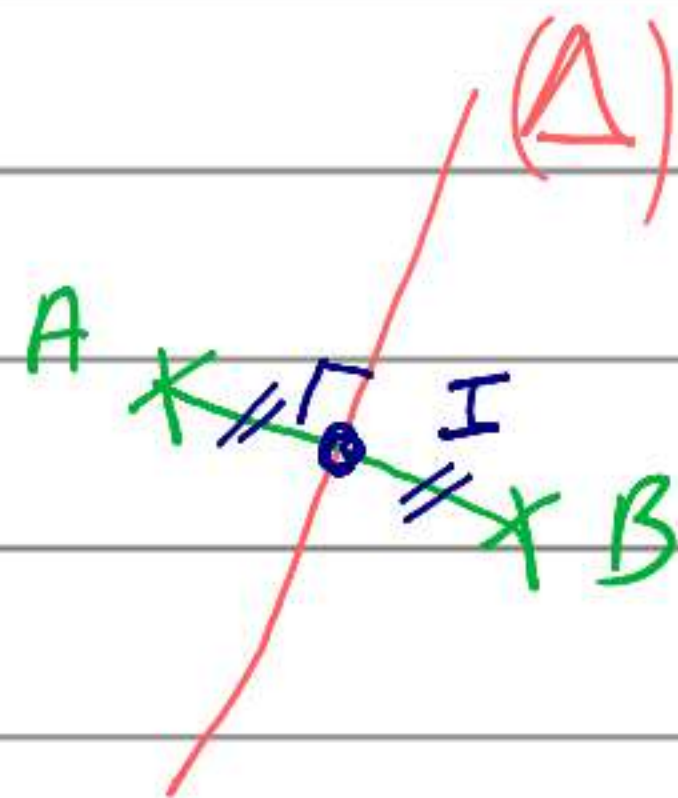
Ceci montre que les trois médianes du triangle se coupent au point $G(1/3; 1/3)$

GRÂCE À CET EXERCICE, ON SAIT LOCALISER LE POINT G!

EXO 24

Notons Δ cette médiatrice

- * Elle passe par $I = m[AB]$, de coordonnées $(1; 3/2)$
- * Elle a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$



De ce fait, elle admet une équation de la forme $-8x - y + c = 0$

Enfin, $I \in (\Delta)$ donc $8 - 3/2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -13/2$

Ainsi, (Δ) a pour équation $-8x - y - \frac{13}{2} = 0$ d'où $\boxed{16x + 2y + 13 = 0}$

EXO 25

- * La droite D a pour équation $2x + 5y - 10 = 0$

La droite D' passe par $A(-1; 2)$ et est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$: elle admet donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

- * De ce fait, les coordonnées $(x; y)$ de leur intersection vérifient

$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ 2x + 5y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ -2 + 6\lambda + 10 + 10\lambda - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/8 \\ x = -1 + 3/8 = -5/8 \\ y = 2 + 2/8 = 18/8 = 9/4 \end{cases}$$

Ainsi, les droites D et D' se coupent en $\boxed{I(-5/8; 9/4)}$

AUTRE MÉTHODE

La droite D' admet pour vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$: elle a donc une équation de la forme $2x - 3y + c = 0$

Or $A \in D'$ donc $-2 - 6 + c = 0$ soit $c = 8$: ainsi, $D' : 2x - 3y + 8 = 0$

Les coordonnées $(x; y)$ de l'intersection de D et D' vérifient alors

$$\begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ -8y + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18/8 = 9/4 \\ x = 5 - \frac{5}{2}y = 5 - \frac{45}{8} = -5/8 \end{cases}$$

EXO 26

1) (AB) est dirigée par $\vec{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc elle admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Ainsi, son équation est de la forme $2x - 7y + c = 0$

Or $A \in (AB)$ donc $-8 + 7 + c = 0$ soit $c = 1$: de ce fait, $(AB) : 2x - 7y + 1 = 0$

• D_2 est dirigée par $\vec{t}' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc elle admet $\vec{n}_2' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal et son équation est de la forme $2x - y + c' = 0$

Or $C \in D_2$ donc $-4 - 3 + c' = 0$ soit $c' = 7$: de ce fait, $D_2 : 2x - y + 7 = 0$

2) Les coordonnées (x, y) de leur point d'intersection D vérifient

$$\begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -7 & (L_2) \\ -6y = 6 & (L_1) - (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (y - 7)/2 = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ciel ! Les deux droites se coupent en A !

$$D = A$$

EFFECTIVEMENT $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AC} = 2\vec{t}$

3) (AE) est dirigée par $\vec{AE} \begin{pmatrix} 20 \\ 65 \end{pmatrix}$ donc admet pour vecteur normal $\vec{n}_3' \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ainsi, son équation est de la forme $13x - 4y + d = 0$. Or, $A \in (AE)$ donc $-52 + 4 + d = 0$ soit $d = 48$

Ainsi, (AE) a pour équation $13x - 4y + 48 = 0$

EXO 27

Les vecteurs normaux de ces deux droites, $\vec{n}_1' \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2' \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$, ne sont pas colinéaires donc elles ne sont pas parallèles. Par double négation, elles sont donc sécantes, c'est-à-dire concourantes.

Leurs bissectrices sont constituées des points équidistants des deux droites. Or, pour $M(x, y)$ un point du plan, on a

$$d(M, D) = \frac{|3x + 4y + 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3x + 4y + 3|}{5}$$

$$\text{et } d(M, D') = \frac{|12x - 5y + 4|}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|12x - 5y + 4|}{13}$$

$$\text{donc } d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}') \Leftrightarrow \frac{|3x+4y+3|}{5} = \frac{|12x-5y+4|}{13}$$

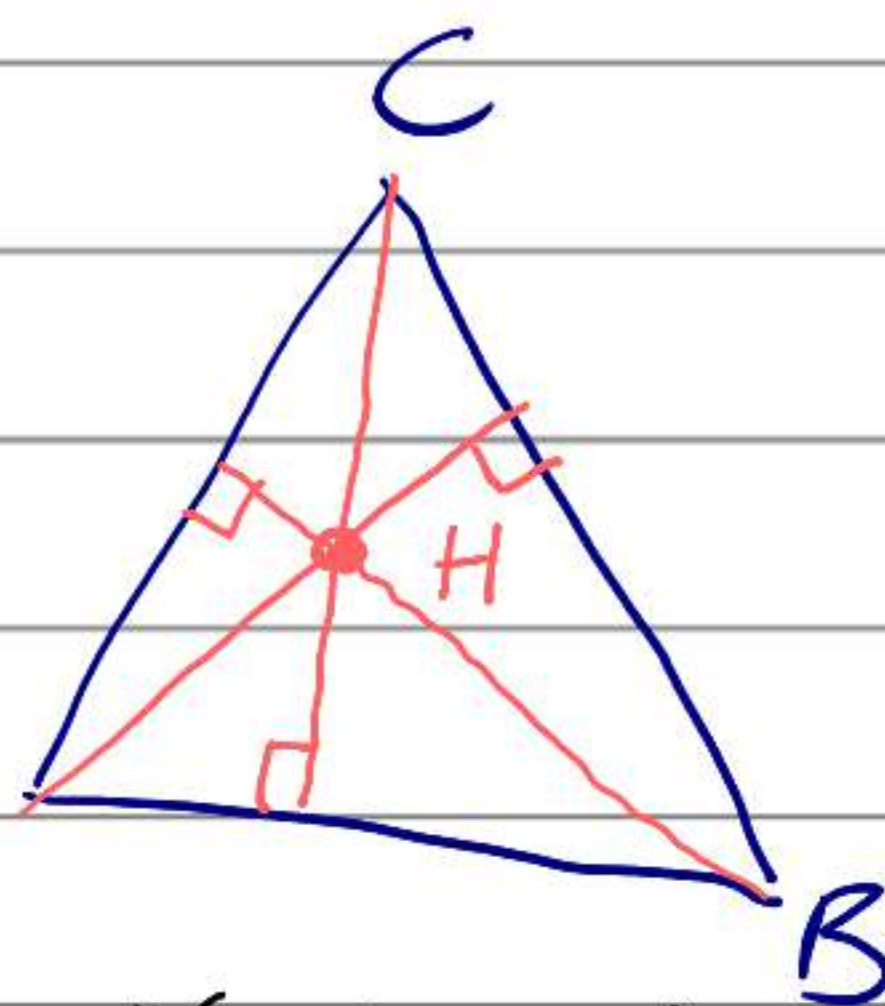
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 13|3x+4y+3| = 5|12x-5y+4| \\ &\Leftrightarrow 13^2(3x+4y+3)^2 = 5^2(12x-5y+4)^2 \\ &\Leftrightarrow (39x+52y+39)^2 - (60x-25y+20)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (99x+27y+59)(-21x+77y+19) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{99x+27y+59=0} \quad \text{ou} \quad \boxed{-21x+77y+19=0} \end{aligned}$$

Voici les équations des deux bissectrices demandées

EXO 28

ORTHOCENTRE

Notons $H(x; y)$ l'orthocentre de ABC
 Alors $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$
 soit $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
 Or $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x-4 \\ y+4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} x-10 \\ y-8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} x+8 \\ y-8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

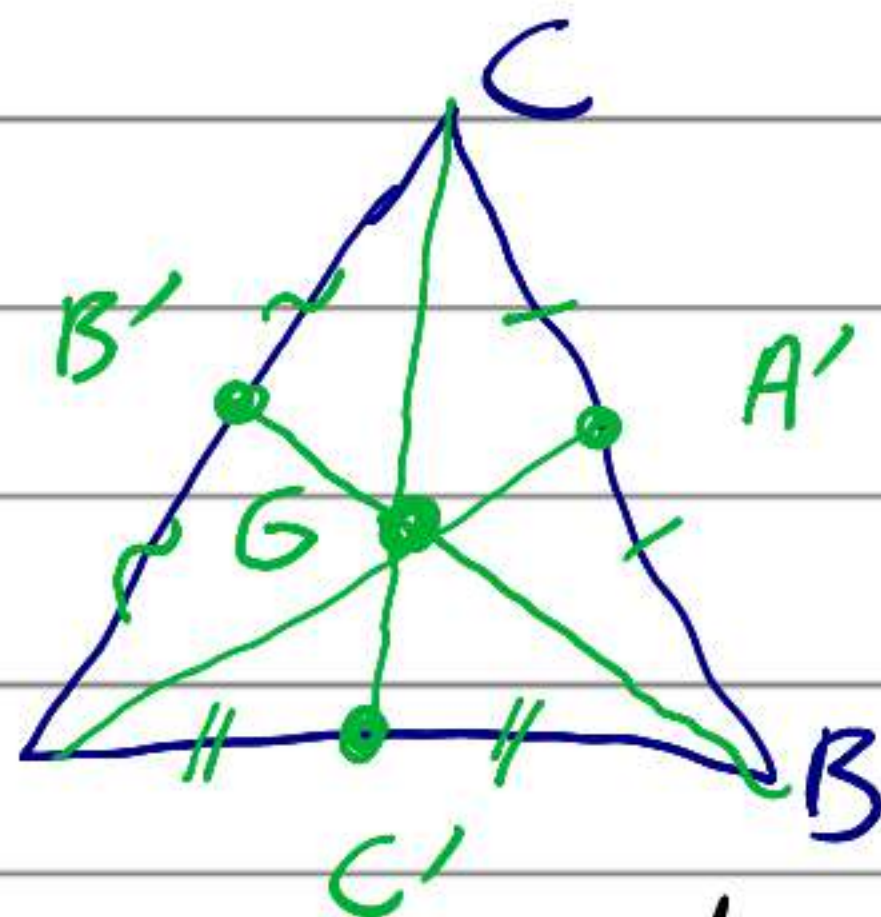


$$\text{On a donc } \begin{cases} -18(x-4) = 0 \\ -12(x-10) + 12(y-8) = 0 \\ 6(x+8) + 12(y-8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 0 \\ y-8-x+10 = 0 \\ 2y-16+x+8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=x+8-10=2 \\ 0=0 \quad \text{OK!} \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{H(4; 2)}$

CENTRE DE GRAVITE

Notons $G(x; y)$ le centre de gravité du triangle A
 G est l'intersection des 3 médianes (AA') , (BB') et (CC') (on note A' , B' et C' les milieux des trois côtés du triangle)
 donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$, $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0$ et $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0$



Calculons les coordonnées des milieux

De ce fait $A'(1;8)$ $B'(-2;2)$ $C'(7;2)$

$$\det(\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{AA'}) = \begin{vmatrix} x-4 & -3 \\ y+4 & 12 \end{vmatrix} = 12(x-4) + 3(y+4) \\ = 3(4x-16+y+4) \\ = 3(4x+y-12)$$

$$\det(\overrightarrow{BG'}, \overrightarrow{BB'}) = \begin{vmatrix} x-10 & -12 \\ y-8 & -6 \end{vmatrix} = -6(x-10) + 12(y-8) \\ = 6(10-x+2y-16) \\ = 6(2y-x-6)$$

$$\det(\overrightarrow{CG'}, \overrightarrow{CC'}) = \begin{vmatrix} x+8 & 15 \\ y-8 & -6 \end{vmatrix} = -6(x+8) - 15(y-8) \\ = 3(-2x-16-5y+40) \\ = 3(5y+2x-24)$$

Ainsi $\begin{cases} y+4x=12 \\ 2y-x=6 \\ 5y+2x=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+4x=12 \\ -9x=-18 & (L2)-2(L1) \\ -18x=-36 & (L3)-5(L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12-4x=4 \\ x=2 \\ x=2 \quad (\text{ok!}) \end{cases}$

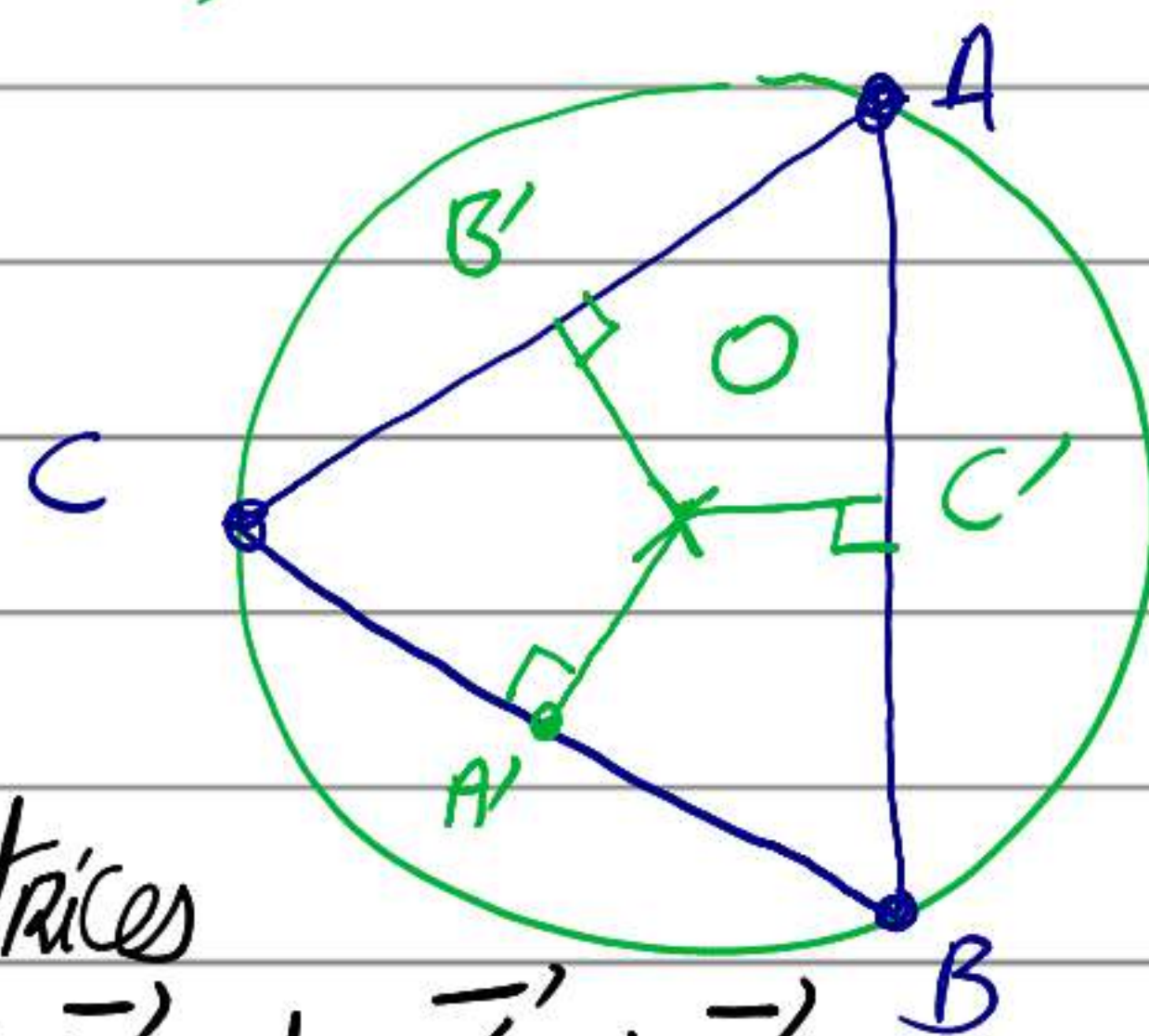
De ce fait,

$G(2;4)$

CENTRE DU CERCLE CIRCONSCRIT

Notons $O(x;y)$ le centre du cercle circonscrit du triangle ABC . Alors O appartient aux médiatrices de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ donc $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CO} \perp \overrightarrow{AB}$
soit $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
or $\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BO} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CO} \begin{pmatrix} x-7 \\ y-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

TSVP $\Rightarrow$



On a donc $\begin{cases} -18(x-1)=0 \\ -12(x+2)+12(y-2)=0 \\ 6(x-7)+12(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y-2-x-2=0 \\ x-7+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x+4=5 \\ 0=0 \end{cases} \quad (\text{ok!})$

Ainsi $\boxed{O(1;5)}$ de fait $\vec{OG}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{OH}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ donc $\boxed{\vec{OH}=3\vec{OG}}$

EXO 29

$$\begin{cases} x^2+y^2-6y+4=0 \\ x^2+y^2+x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x-3y=0 \quad (L_2) \\ -x-3y+4=0 \quad (L_1)-(L_2) \end{cases}$$

On déduit de la 2^{ème} équation que $x=4-3y$. On injecte ceci dans la 1^{ère} équation:

$$\begin{aligned} (4-3y)^2+y^2-6y+4 &= 0 \Leftrightarrow 16-24y+9y^2+y^2-6y+4=0 \\ &\Leftrightarrow 10y^2-30y+20=0 \\ &\Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \\ &\Leftrightarrow y=1 \text{ ou } y=2 \quad (\text{racines évidentes}) \end{aligned}$$

Pour $y=1$, on obtient $x=1$. Et pour $y=2$, il vient $x=-2$.

Ainsi, les deux points d'intersection des deux cercles sont $\boxed{A(1;1) \text{ et } B(-2;2)}$

EXO 30

1) C'est $\boxed{(x+2)^2+(y-1)^2=5}$ tout bêtement (pas besoin de développer)

$$\begin{aligned} 2) \quad 2x^2+2y^2-12x+4y+8=k &\Leftrightarrow x^2-6x+y^2+2y+4=k/2 \\ &\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+2y+1+4=k/2+10 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=\frac{k}{2}+6=\frac{k+12}{2} \end{aligned}$$

Pour $k \geq -12$, on tombe sur l'équation du cercle de centre $\boxed{C(3;-1)}$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{k+12}}{2}$.

Pour $k=6$, $\boxed{R=3}$ et pour $k=-4$, $\boxed{R=2}$

EXO 31

$$1) \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 = 3^2$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $C(2; -1)$ et de rayon 3

$$2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3y \\ (2 - 3y)^2 + y^2 - 4(2 - 3y) + 2y = 4 \quad (E) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow 4 - 12y + 9y^2 + y^2 - 8 + 12y + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow 10y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \text{ (racine évidente)} \text{ ou } y = 4/5 \text{ (produit des racines)}$$

$$\text{Pour } y = -1, x = 5 \quad \text{et pour } y = 4/5, x = 2 - 12/5 = -2/5$$

Ainsi, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{A; B\}$ avec $A(5; -1)$ et $B(-2/5; 4/5)$

EXO 32

• Introduisons $I = M[AB]$. Alors $\begin{cases} \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{cases}$

donc $\overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MB'} = MI^2 - AB^2/4$

De ce fait, $\overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MB'} = R \Leftrightarrow MI^2 = R + AB^2/4$

• Si $R < -AB^2/4$, l'ensemble recherché est $\emptyset$

Si $R \geq -AB^2/4$, c'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{R + AB^2/4}$

EXO 33

$$3x - 2y + z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = -5 - 3x + 2y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 1x + 0y \\ y = 0 + 0x + 1y \\ z = -5 - 3x + 2y \end{cases} \text{ avec } x \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

On reconnaît le plan passant par $A(0; 0; -5)$ et dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

EXO 34

Les deux plans admettent pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.
 Ils sont perpendiculaires si $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$ c.q.f.d

EXO 35

Les deux plans ont pour vecteurs normaux $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'angle entre ces plans est ainsi $\theta = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, qui est caractérisé par

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \times \|\vec{n}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \text{ soit } \boxed{\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}}$$

EXO 36

1) P: $2x + 6y - z - 7 = 0$ et A(3, -1, 2) donc la distance de A à P est
 $d(A, P) = \frac{|2 \times 3 + 6 \times (-1) - 2 - 7|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{41}}$

2) Commençons par trouver une équation de P. Son vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifie
 $\begin{cases} \vec{n}' \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n}' \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 0 \quad (L_2) \\ -5x - 4y = 0 \quad (L_1) - 2(L_2) \end{cases}$
 Prenons $x = 4$: alors $y = -5x/4 = -5$ et $z = y - 3x = -17$
 Ainsi $\vec{n}' \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -17 \end{pmatrix}$ convient. De ce fait, P admet une équation de la forme

P: $4x - 5y - 17z + c = 0$. Or B(-2, 1, 0) donc $-8 - 5 + c = 0$ soit $c = 13$
 De ce fait, P: $4x - 5y - 17z + 13 = 0$
 La distance du point A(4, 2, -3) au plan P est donc

$$d(A, P) = \frac{|4 - 5 \times 2 - 17 \times (-3) + 13|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 17^2}} = \frac{50}{\sqrt{16 + 25 + 289}} = \frac{50}{\sqrt{330}}$$

EXO 37

Pour déterminer l'angle entre les droites, il faut d'abord trouver leurs vecteurs directeurs. Il suffit pour cela de résoudre les systèmes d'équations afin de faire apparaître les représentations paramétriques des deux droites.

* DROITE D

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x \\ z = 2y - x = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 1x \\ y = 0 + 3x \\ z = 0 + 5x \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(L2 ← L2 + L1)

La droite D passe par le point O(0;0;0) et est dirigée par $\vec{u}(1;3;5)$

* DROITE D'

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z = -4z \\ y = 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + (-4)z \\ y = 0 + 3z \\ z = 0 + 1z \end{cases}$$

(L2 ← L2 - 2L1)

La droite D' passe par le point O(0;0;0) et est dirigée par $\vec{u}'(-4;3;1)$

* CALCUL DE L'ANGLE

Notons θ l'angle entre D et D'. Il est caractérisé par $\theta = (\vec{u}, \vec{u}')$ d'où

$$\cos(\theta) = \cos(\vec{u}, \vec{u}') = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\|} = \frac{10}{\sqrt{35} \times \sqrt{26}} = \sqrt{\frac{10 \times 10}{7 \times 5 \times 2 \times 13}} = \sqrt{\frac{10}{91}}$$

Et ainsi, l'angle θ entre D et D' est caractérisé par

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{10}{91}} \approx \frac{1}{3}$$

EXO 38

Commençons par un pli de dessin afin de voir comment calculer la distance $d(A, D)$ en connaissant un point et un vecteur de la droite D.

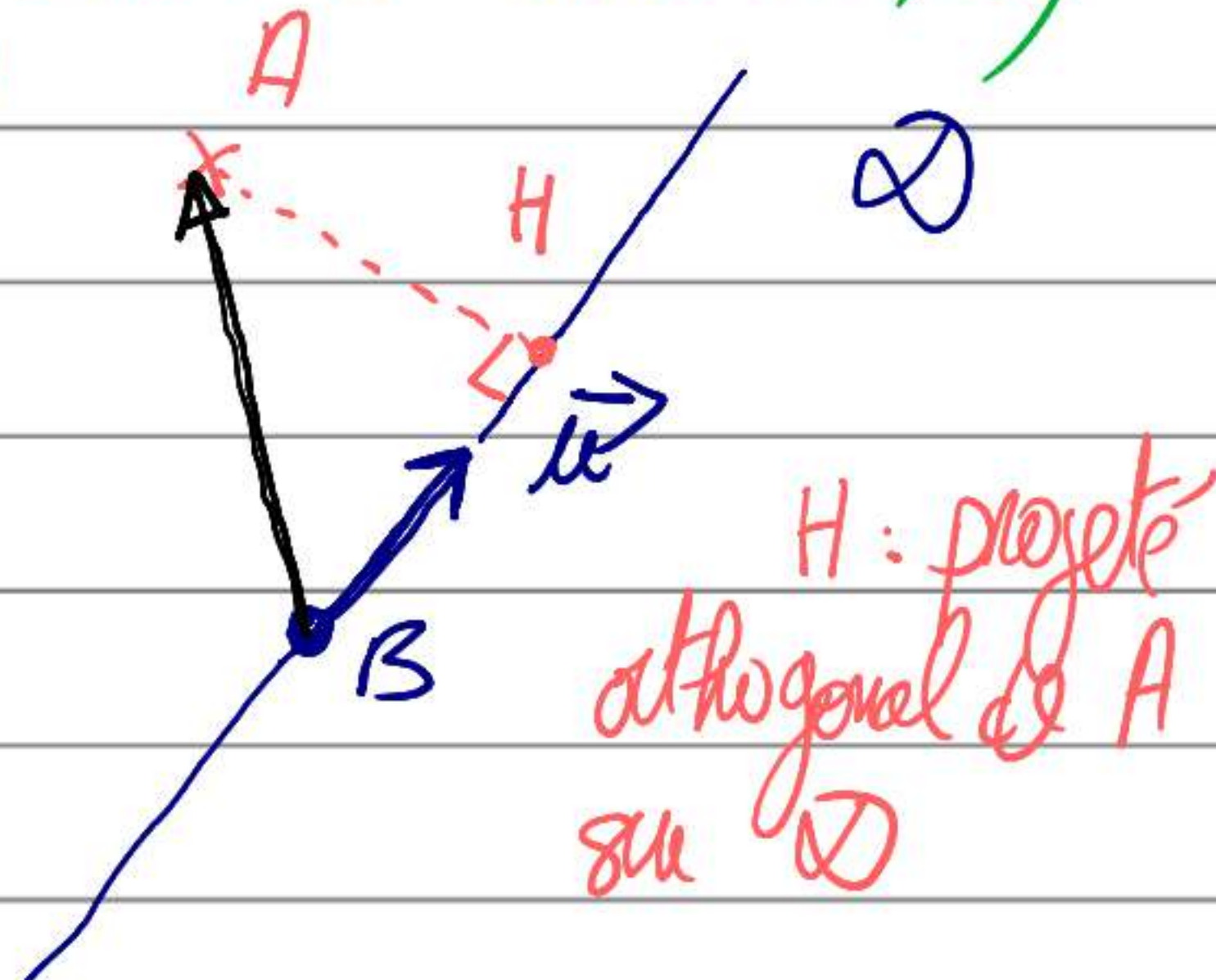
Sur le dessin, cette distance est AH, norme de $\vec{AH}$

Or $\vec{BA} = \vec{BH} + \vec{HA}$ donc $\vec{BA} \cdot \vec{u} = \vec{BH} \cdot \vec{u} + \vec{HA} \cdot \vec{u}$

Comme $\vec{u} \perp \vec{HA}$, alors $\vec{HA} \cdot \vec{u} = 0$.

De plus, $H \in D$ donc $\vec{BH} = \lambda \vec{u}$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$)

d'où $\vec{BH} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda \|\vec{u}\|^2$



Ainsi, $\vec{H} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ donc $\vec{BH} = \frac{(\vec{BA} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ si bien que

$$d(A, \mathcal{D}) = HA = \|\vec{HA}\| = \|\vec{BA} - \vec{BH}\| = \left\| \vec{BA} - \frac{(\vec{BA} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \right\|$$

1) 1^{ère} droite

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \|\vec{u}\|^2 = 4 + 1 + 9 = 14$$

$$\text{et } \vec{BA} \cdot \vec{u} = 6 + 3 + 9 = 18$$

↳ formule magique vue au cours...
et à savoir retrouver "à la main"

$$\text{Ainsi, } \vec{HA} = \vec{BA} - \frac{9}{7} \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18/7 \\ -9/7 \\ 27/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -12/7 \\ -6/7 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

VÉRIFICATION
 $\vec{HA} \cdot \vec{u} = 0$
donc $\vec{HA} \perp \vec{u}$

$$\text{donc } HA = \frac{3}{7} \times \sqrt{1 + 16 + 4} = \frac{3\sqrt{21}}{7} \quad \text{soit } d(A, \mathcal{D}) = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

2) 2^{ème} droite

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2z \\ y = 1 + 3z \\ z = 0 + 1z \end{cases} \quad \text{passer par } B(-1; 1; 0) \text{ et est dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } \vec{BA} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \|\vec{u}\|^2 = 4 + 9 + 1 = 14 \text{ puis } \vec{BA} \cdot \vec{u} = 6 - 6 + 1 = 1$$

$$\text{donc } \vec{HA} = \vec{BA} - \frac{1}{14} \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/7 \\ 3/14 \\ 1/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/7 \\ -31/14 \\ 13/14 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 40 \\ -31 \\ 13 \end{pmatrix}$$

VÉRIFICATION
 $\vec{HA} \cdot \vec{u} = 0$
donc $\vec{HA} \perp \vec{u}$

$$\text{si bien que } HA = \frac{1}{14} \times \sqrt{1600 + 961 + 169} = \frac{\sqrt{2730}}{14} \quad \text{soit } d(A, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{2730}}{14}$$

Bien, on peut voir que $2730 = 273 \times 10 = 3 \times 91 \times 10 = 3 \times 7 \times 13 \times 10 \dots$
mais cela ne nous apporte pas à grand chose!

EXO 30

Cette droite a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
en notant $A(a; b; c)$ un de ces points.

Puisqu'elle rencontre les deux droites, cela signifie que les systèmes

$$(S') \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + 3\lambda \\ x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S) \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + 3\lambda \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

sont tous les deux compatibles (mais donnent évidemment deux valeurs différentes de λ)

1^{er} système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \lambda = 0 \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + 3\lambda = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -a \\ x = 0 \\ y = b - 2a \\ z = 1 \\ c - 3a = 1 \end{cases}$$

donc ce système est compatible si, et seulement si,

$$\boxed{c - 3a = 1}$$

2nd système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \lambda = 1 \\ y = b + 2\lambda = 0 \\ z = c + 3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - a \\ x = 1 \\ y = 0 \\ b + 2(1 - a) = 0 \\ z = c + 3(1 - a) \end{cases}$$

donc ce système est compatible si, et seulement si,

$$\boxed{b + 2 - 2a = 0}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} c - 3a = 1 \\ b + 2 - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 2a - 2 \\ c = 3a + 1 \end{cases} \quad \text{et pour } a = 0, \text{ on obtient } b = -2 \text{ et } c = 1$$

Ainsi, la droite recherchée est la droite passant par $A(0; -2; 1)$ et dirigée par $\vec{t} \left(\frac{1}{3} \right)$

REMARQUE c'est la droite qui apparaît lors de la résolution du dernier système puisque

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 2a - 2 \\ c = 3a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 + 1a \\ b = -2 + 2a \\ c = 1 + 3a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

EXO 40

Cette droite a pour représentation paramétrique
 en notant $\vec{u}(a;b;c)$ un de ses vecteurs directeurs.

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b \\ z = 2 + \lambda c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Puisqu'elle rencontre les deux autres droites, cela signifie que les deux systèmes

$$(S) \begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b \\ z = 2 + \lambda c \\ z = 0 \\ 2x = 3y \end{cases} \quad \text{et} \quad (S') \begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b \\ z = 2 + \lambda c \\ y = 0 \\ x = 2z \end{cases}$$

sont compatibles (mais pour des valeurs de λ pas obligatoirement identiques)

1^{er} système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b \\ z = 2 + \lambda c = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2/c \\ x = 1 - 2a/c \\ y = 1 - 2b/c \\ z = 0 \\ 2 - 4a/c - 3 + 6b/c = 0 \end{cases}$$

donc ce système est compatible si, et seulement si, on a

$$\boxed{-4a + 6b - c = 0}$$

2nd système

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b = 0 \\ z = 2 + \lambda c \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1/b \\ x = 1 - a/b \\ y = 0 \\ z = 2 - c/b \\ 1 - a/b - 4 + 2c/b = 0 \end{cases}$$

donc ce système est compatible si, et seulement si, on a

$$\boxed{-a - 3b + 2c = 0}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} 4a - 6b + c = 0 \\ a + 3b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b - 2c = 0 \quad (L2) \\ 6a - 3c = 0 \quad (L1) + 2(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ 3b - 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = a \\ c = 2a \end{cases}$$

et pour $a=1$, on obtient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. C'est un peu spécial car la droite recherchée est
 la droite passant par $O(0;0;0)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$...

si bien que les trois droites considérées se coupent au point $O(0;0;0)$

CHAPITRE 16

EXO 1

Notons $S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} \dots - X + 1$

donc $X S = X^{2n+1} - X^{2n} + X^{2n-1} \dots - X^2 + X$

d'où $X S + S = (X+1) S = X^{2n+1} + 1$

Ensuite $(X^3 + X^2) S = X^2 (X+1) S = X^{2n+3} + X^2$

de sorte que

$$(X^3 + X^2 + X + 1) S = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$$

Autre méthode $S = \frac{1 - (-X)^{2n+1}}{1 - (-X)} = \frac{1 + X^{2n+1}}{1 + X}$ (somme géométrique)

donc $(X^3 + X^2 + X + 1) S = \frac{(X^3 + X^2 + X + 1)(1 + X^{2n+1})}{X + 1} = (X^2 + 1)(1 + X^{2n+1})$
 $= X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$

EXO 2

Comme $1 - X^2 = (1+X)(1-X)$, alors $(1 - X^2)^{2n} = (1+X)^{2n} (1-X)^{2n}$

Formule du binôme de Newton:

$$(1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k \quad \text{et} \quad (1-X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} X^k$$

d'où (produit de polynômes) $(1+X)^{2n} (1-X)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k \right) \left(\sum_{l=0}^{2n} (-1)^l \binom{2n}{l} X^l \right)$
 $= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^l \binom{2n}{k} \binom{2n}{l} X^{k+l}$ (DISTRIBUTIVITÉ)

Les termes de degré $2n$ s'obtiennent pour $k+l=2n$: ainsi, le coefficient de degré $2n$ du polynôme ci-dessus est égal à $\sum_{k+l=2n} (-1)^l \binom{2n}{k} \binom{2n}{l}$

soit $\sum_{l=0}^{2n} (-1)^l \binom{2n}{l} \binom{2n}{2n-l}$

(EN EFFET $k=2n-l$)

de même $\sum_{l=0}^{2n} (-1)^l \binom{2n}{l}^2$

PUISQUE $\binom{2n}{2n-l} = \binom{2n}{l}$

Pu ailleurs, on a d'après la formule du binôme $(1-x^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} x^{2k}$
donc le coefficient de degré $2n$ de ce polynôme est

$$(-1)^n \binom{2n}{n}$$

Comme $(1-x^2)^{2n} = (1-x)^{2n} (1+x)^{2n}$, on en déduit par identification des coefficients de ces deux polynômes que

$$\sum_{l=0}^{2n} (-1)^l \binom{2n}{l}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

EXO 3

- Si $P=Q=0$, l'égalité $P^2 = XQ^2$ est vérifiée
- Supposons que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$
Alors $\deg(P^2) = 2\deg(P)$ est un entier pair,
tandis que $\deg(XQ^2) = 1 + 2\deg(Q)$ est un entier impair
De ce fait,
 $\deg(P^2) \neq \deg(XQ^2)$ d'où $P^2 \neq XQ^2$

Conclusion

Les seuls polynômes P et $Q \in K[X]$ tels que $P^2 = XQ^2$ sont $P=0$ et $Q=0$

EXO 4

Binôme de Newton : $(X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$ et $(1-X)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} X^k$

d'où $P = (X+1)^n - (1-X)^n = \sum_{k=0}^n [1 - (-1)^k] \binom{n}{k} X^k$

* Si n est impair le coeff de degré n est $(1 - (-1)^n) \binom{n}{n} = 2$ donc $\deg(P) = n \neq 0$

* Si m est pair le coeff de degré m est $(1 - (-1)^m) \binom{m}{m} = 0$
 et celui de degré $m-1$ vaut $(1 - (-1)^{m-1}) \binom{m}{m-1} = 2m \neq 0$ si $m \in \mathbb{N}^*$
 donc $\deg(P) = m-1$ si $m \geq 2$
 tandis que $P=0$ soit $\deg(P) = -\infty$ si $m=0$

Ainsi

$$\deg(P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } m=0 \\ m-1 & \text{si } m \geq 2 \text{ est pair} \\ m & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

EXO 5

- Si $P \in \mathbb{C}^k$, alors $P(X+1) - P(X) = 0$: les deux polynômes sont de degré $-\infty$
- Si non, notons $m = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_0$ (avec $a_m \neq 0$)
 Alors $P(X+1) - P(X) = a_m [(X+1)^m - X^m] + a_{m-1} [(X+1)^{m-1} - X^{m-1}] + \dots + a_1 [(X+1) - X]$

Or $(X+1)^m = X^m + mX^{m-1} + \dots$ et $(X+1)^{m-1} = X^{m-1} + (m-1)X^{m-2} + \dots$ (binôme de Newton)
 donc $\deg((X+1)^m - X^m) = m-1$, $\deg((X+1)^{m-1} - X^{m-1}) = m-2$, et ainsi de suite.

Puisque $a_m \neq 0$, ceci montre que $P(X+1) - P(X)$ est de degré $m-1$.
 Ainsi,

$$\deg(P(X+1) - P(X)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg(P) \leq 0 \\ \deg(P) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

EXO 6

On peut écrire $P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0$
 de sorte que $dP = d a_d X^d + d a_{d-1} X^{d-1} + \dots + d a_0$
 et $P' = d a_d X^{d-1} + (d-1) a_{d-1} X^{d-2} + \dots + a_1$
 d'où $XP' = d a_d X^d + (d-1) a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X$
 si bien que $dP - XP' = (d a_{d-1} - (d-1) a_{d-1}) X^{d-1} + \dots + d a_0$
 Ainsi

$$\deg(Q) \leq d-1$$

EXO 7

Rappel: $P^{(n)}$ est la dérivée n -ième de P ; en particulier, $P^{(0)} = P$ et $P^{(1)} = P'$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: " $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$ "

INITIALISATION

On a $(PQ)^{(0)} = PQ$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} P^{(k)} Q^{(0-k)} = P^{(0)} Q^{(0)} = PQ$
donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$
On en déduit

$$\begin{aligned} (PQ)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (P^{(k)} Q^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + P^{(k)} Q^{(n+1-k)}] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \\ (l=k+1) \downarrow \\ &= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} P^{(l)} Q^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \\ (\text{découpages}) \downarrow \\ &= \sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} P^{(l)} Q^{(n+1-l)} + P^{(n+1)} + Q^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \\ (l=k) \downarrow \\ &= Q^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] P^{(k)} Q^{(n+1-k)} + P^{(n+1)} \\ (\text{relation de Pascal}) \downarrow \\ &= \binom{n+1}{0} Q^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} P^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

REMARQUE : on retrouve quasiment la même démonstration que pour la formule du binôme de Newton

CONCLUSION

On déduit du principe de récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$ (formule de Leibniz)

EX08

1)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -1 \\ & & + & + & + \\ (4) & & 4 & 16 & 52 \\ \hline & 1 & 4 & 13 & \boxed{51} \end{array}$$

donc $P(4) = 51$

2)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -7 & 6 & -12 \\ & & + & + & + & + \\ (5) & & 5 & 35 & 140 & 730 \\ \hline & 1 & 7 & 28 & 146 & \boxed{718} \end{array}$$

donc $P(5) = 718$

3)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & 5 & 0 & -3 & 2 \\ & & + & + & + & + & + \\ (2) & & 2 & 0 & 10 & 20 & 34 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 10 & 17 & \boxed{36} \end{array}$$

donc $P(2) = 36$

EX09

" $\mathbb{R}_n[X]$ stable par produit" signifie que $PQ \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tous polynômes P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Le problème va porter sur les polynômes de degré maximal : si $\deg P = \deg Q = n$, alors $\deg(PQ) = 2n$. Comme il faut que $\deg(PQ) \leq n$, cela implique que $2n \leq n$ soit $n \leq 0$ et donc $n = 0$.
Ainsi, $\mathbb{R}_n[X]$ stable par produit implique $n = 0$.

Réciproquement, $\mathbb{R}_0[X]$ est constitué des polynômes constants ... le produit de deux polynômes constants est encore un polynôme constant, cet ensemble est stable par produit. De ce fait,

$\mathbb{R}_n[X]$ stable par produit ssi $n = 0$

EXO 10

$$\begin{array}{r|l}
 1) & X^4 + X^3 - X^2 + X - 2 \\
 & \underline{-(X^4 + X^2)} \\
 & X^3 - 2X^2 + X - 2 \\
 & \underline{-(X^3 + X)} \\
 & -2X^2 - 2 \\
 & \underline{0}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 X^2 + 1 \\
 \hline
 X^2 + X - 2
 \end{array}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
 & X^4 + X^3 - X^2 + X - 2 \\
 & = (X^2 + 1)(X^2 + X - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2) & 2X^4 + 5X^3 - 3X + 2 \\
 & \underline{-(2X^4 - 6X^2 + 2X)} \\
 & 5X^3 + 6X^2 - 5X + 2 \\
 & \underline{-(5X^3 - 15X + 5)} \\
 & 6X^2 + 10X - 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 X^3 - 3X + 1 \\
 \hline
 2X + 5
 \end{array}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
 & 2X^4 + 5X^3 - 3X + 2 \\
 & = (X^3 - 3X + 1)(2X + 5) + 6X^2 + 10X - 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 3) & 6X^5 - X^4 + 2X^3 - 7X + 1 \\
 & \underline{-(6X^5 - 12X^3)} \\
 & -X^4 + 14X^3 - 7X + 1 \\
 & \underline{-(-X^4 + 2X^2)} \\
 & 14X^3 - 2X^2 - 7X + 1 \\
 & \underline{-(14X^3 - 28X)} \\
 & -2X^2 + 21X + 1 \\
 & \underline{-(-2X^2 + 4)} \\
 & 21X - 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 X^2 - 2 \\
 \hline
 6X^3 - X^2 + 14X - 2
 \end{array}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
 & 6X^5 - X^4 + 2X^3 - 7X + 1 \\
 & = (X^2 - 2)(6X^3 - X^2 + 14X - 2) + 21X - 3
 \end{aligned}$$

EXO 11

- $P(2) = 16 - 72 + 120 - 88 + 24 = 160 - 160 = 0$
- $P' = 4X^3 - 27X^2 + 60X - 44$ donc $P'(2) = 32 - 108 + 120 - 44 = 152 - 152 = 0$
- $P'' = 12X^2 - 54X + 60$ donc $P''(2) = 48 - 108 + 60 = 0$
- $P^{(3)} = 24X - 54$ donc $P^{(3)}(2) = -6 \neq 0$

Racine de multiplicité 3

EXO 12

(a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 1 & -8 & 4 \\ \textcircled{1} & \downarrow & + & + & + \\ & 3 & 4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$3X^3 + X^2 - 8X + 4 = (X-1)(3X^2 + 4X - 4)$

Racines de $3X^2 + 4X - 4$: $\begin{cases} -2 \text{ (évidente)} \\ 2/3 \text{ (cf. produit} = -4/3) \end{cases}$

donc $3X^2 + 4X - 4 = 3(X+2)(X-2/3)$

Ainsi:
$$3X^3 + X^2 - 8X + 4 = 3(X-1)(X+2)(X-2/3)$$

(b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 9 & 4 \\ \textcircled{-1} & \downarrow & + & + & + \\ & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$X^3 + 6X^2 + 9X + 4 = (X+1)(X^2 + 5X + 4)$

Racines de $X^2 + 5X + 4$: -1 (évidente) et -4 (produit)

donc $X^2 + 5X + 4 = (X+1)(X+4)$

Ainsi:
$$X^3 + 6X^2 + 9X + 4 = (X+1)^2(X+4)$$
 (-1 est racine double)

(c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & -3 & 11 & 24 & -20 \\ \textcircled{-2} & \downarrow & + & + & + \\ & -3 & 17 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

$-3X^3 + 11X^2 + 24X - 20 = (X+2)(-3X^2 + 17X - 10)$

Racines de $-3X^2 + 17X - 10$:

$\Delta = 17^2 - 4 \times 3 \times 10 = 289 - 120 = 169 = 13^2$

$x_1 = \frac{-17+13}{2 \times (-3)} = 5$ et $x_2 = \frac{-17-13}{2 \times (-3)} = 2/3$

Ainsi:
$$-3X^3 + 11X^2 + 24X - 20 = -3(X+2)(X-5)(X-2/3)$$

EXO 13

•
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -5 & 7 & -2 & 4 & -8 \\ \textcircled{2} & \downarrow & + & + & + & + & + \\ & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \\ \textcircled{2} & \downarrow & + & + & + & + & + \\ & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ \textcircled{2} & \downarrow & + & + & + & + & + \\ & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(2) = 0$ donc 2 est racine... et on va enchaîner les applications d'Horne pour trouver sa multiplicité et la factorisation complète

(AUTRE MÉTHODE: calculer $P'(2)$, $P''(2)$, ...)

Ainsi $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8 = (X-2)^3(X^2 + X + 1)$

Occupons-nous de $X^2 + X + 1$:

$$\Delta = 1 - 4 = -3; \text{ racines: } x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\pi/3} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$$

De ce fait, les racines du polynôme sont 2 (triple), $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$ (simples)

EXO 14

• Par hypothèse, $P = (X - \alpha)^n Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$
 Il en découle que $P' = n(X - \alpha)^{n-1} Q + (X - \alpha)^n Q'$

$$= (X - \alpha)^{n-1} \underbrace{(nQ + (X - \alpha)Q')}_{Q_1}$$

On a bien $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $Q_1(\alpha) = nQ(\alpha) \neq 0$, ce qui prouve que α est une racine d'ordre $n-1$ de P'

• AUTRE MÉTHODE

Par hypothèse $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$

Notons $Q = P'$: alors $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = \dots = Q^{(n-2)}(\alpha) = 0$ et $Q^{(n-1)}(\alpha) \neq 0$

[EN EFFET $Q^{(k)} = P^{(k+1)}$]

Ceci prouve le résultat.

EXO 15

Il faut et il suffit que $P(-1) = P'(-1) = 0$, avec $P = X^5 + aX^2 + aX + 1$

Déjà, $P(-1) = -1 + a - a + 1 = 0$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$

De plus, $P' = 5X^4 + 2aX + a$ donc $P'(-1) = 5 - a$ d'où $P'(-1) = 0 \Leftrightarrow a = 5$
 [Alors $P'' = 20X^3 + 10$ ET $P''(-1) \neq 0$]

Ainsi, -1 est racine double de $X^5 + aX^2 + aX + 1$ ssi $a = 5$

EXO 16

Il suffit de voir quelle tête a le développement de $(aX^2+bX+c)^2$... cela permettra de trouver des valeurs de a, b et c pour que ce carré soit égal à P

$$\begin{aligned}(aX^2+bX+c)^2 &= (aX^2+bX+c)(aX^2+bX+c) = a^2X^4 + abX^3 + acX^2 \\ &\quad + baX^3 + b^2X^2 + bcX \\ &\quad + caX^2 + cbX + c^2 \\ &= a^2X^4 + 2abX^3 + (b^2+2ac)X^2 + 2bcX + c^2\end{aligned}$$

Ceci est égal à P si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^2 = 36 & (L1) \\ 2ab = 12 & (L2) \\ b^2 + 2ac = -11 & (L3) \\ 2bc = -2 & (L4) \\ c^2 = 1 & (L5) \end{cases}$$

Pour $a=6$, on obtient $b=1$ (L2) d'où $c=-1$ (L4).
On a bien $b^2+2ac=1-12=-11$ (L3) et $c^2=1$ (L5) donc les 5 équations sont vérifiées. Par conséquent,

$$36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1 = (6X^2 + X - 1)^2$$

Racines de $6X^2+X-1$: $\Delta = 1 + 4 \times 6 = 25 = 5^2$

$$x_1 = \frac{-1-5}{2 \times 6} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+5}{2 \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{d'où } 6X^2+X-1 = 6(X+\frac{1}{2})(X-\frac{1}{3})$$

$$\text{soit } 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1 = 36(X+\frac{1}{2})^2(X-\frac{1}{3})^2$$

Le polynôme P possède deux racines doubles, $-1/2$ et $1/3$

EXO 17

1) Posons $P = X^{2n} - 1$. Alors $P(1) = 1 - 1 = 0$ donc P se factorise par $X - 1$
De même, $P(-1) = (-1)^{2n} - 1 = ((-1)^2)^n - 1 = 0$ donc P se factorise par $X + 1$
Par conséquent, P se factorise par $(X+1)(X-1) = X^2 - 1$

2) Posons $Q = (X+1)^n - nX - 1$. Alors $Q(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

De plus, $Q' = n(X+1)^{n-1} - n$ donc $Q'(0) = n - n = 0$.

Ainsi $Q(0) = Q'(0) = 0$ si bien que 0 est racine (au moins) double de Q .

De ce fait, Q se factorise par X^2

EXO 18

• Posons (E): $2z^4 - 5z^3 + 4z^2 - 5z + 2 = 0$

Comme 0 n'est pas solution de (E), on va la résoudre sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Par $z \in \mathbb{C}^*$, on a (E) $\Leftrightarrow 2z^2 - 5z + 4 - \frac{5}{z} + \frac{2}{z^2} = 0$ (division par z^2)

• Notons $z = z + \frac{1}{z}$: alors $z^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$

$$\text{donc (E)} \Leftrightarrow 2z^2 + 4 + \frac{2}{z^2} - 5z - \frac{5}{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}) - 5(z + \frac{1}{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 - 5z = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z(z - 5/2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 5/2$$

$$\begin{aligned} z = 0 &\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} z = \frac{5}{2} &\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 2 \text{ ou } z = \frac{1}{2} \text{ (racines évidentes!)} \end{aligned} \right.$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = \{ 2; 1/2; i; -i \}$$