

Introduction :

Rappelons qu'une suite numérique est un ensemble infini de nombres à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, indexé par des entiers. Par exemple :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : (\underbrace{\cos(1)}_{u_1}, \underbrace{\cos(2)}_{u_2}, \cos(3), \dots, \underbrace{\cos(n)}_{u_n}, \underbrace{\dots}_{\text{infinité de termes}})$$

I Définition et somme totale

I-1 Généralités, nature d'une série

Définition

Une suite $(S_n)_{n \geq N}$ est appelée *série* s'il existe une suite $(u_n)_{n \geq N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \quad S_n = \sum_{k=N}^n u_k$$

Dans ce cas, on appelle

- u_n le *terme général* de la série $(S_n)_{n \geq N}$;
- S_n la *somme partielle d'ordre n* de la série $(S_n)_{n \geq N}$.

et on note de manière plus explicite $\sum_{n \geq N} u_n$ pour désigner la série $(S_n)_{n \geq N}$.

■ Exemple 1 :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{k^2}_{u_k}. \text{ On a}$$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$\dots$
u_n	1^2	2^2	3^2	$\dots$
S_n	1^2	$\underbrace{1}_{u_1} + \underbrace{2^2}_{u_2}$	$\underbrace{1}_{u_1} + \underbrace{2^2}_{u_2} + \underbrace{3^2}_{u_3}$	$etc \dots$

De manière générale, la somme partielle d'ordre n :

$$S_n = \underbrace{1}_{u_1} + \underbrace{2^2}_{u_2} + \dots + \underbrace{n^2}_{u_n} \quad (\text{et ça s'arrête là!})$$

■ Contre-Exemple(s) :

- 1 ■ $A_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ n'est pas une somme partielle, puisque les deux bornes dépendent de n . En revanche, on peut exprimer A_n grâce à des sommes partielles :

$$A_n = S_{2n} - S_n, \text{ où } S_n = \sum_{k=N}^n u_k \text{ où } N \text{ est fixé.}$$

- 2 ■ $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$ n'est a priori pas une somme partielle, puisque le terme général dépend aussi de n . Néanmoins, dans cet exemple, on peut également exprimer B_n grâce à des sommes partielles :

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = S_{2n} - S_{n-1}$$

$$\text{où } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Définition

On dit (trivialement) que la série $\sum_{n \geq N} u_n$ *converge* (resp. *diverge*) si la suite $(S_n)_{n \geq N}$ *converge* (resp. *diverge*), où $S_n = \sum_{k=N}^n u_k$ pour tout $n \geq N$.

En cas de convergence, la limite sera notée $\sum_{k=N}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N}^n u_k$ et sera appelée *somme totale* de la série $\sum_{n \geq N} u_n$.

En cas de divergence vers $\pm\infty$, la limite sera notée $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N}^n u_k = \pm\infty$.



Remarque :

Si la limite de la série est $\pm\infty$, on ne parle pas de somme totale, puisque ce nombre n'existe pas. (Oui, on rappelle en effet que ∞ n'est pas un nombre...)

■ Exemples :

- 2 ■ La série $\sum_{n \geq 0} 1$ est divergente. En effet, $\sum_{k=0}^n 1 = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- 3 ■ Si $|q| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente. En effet,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - q}, \quad \text{d'où } \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$



OBJETS

Ne pas confondre les types d'objets en présence :

	Terme gén.	Somme partielle	Somme totale	Série
Objet :	u_n	$S_n = \sum_{k=N}^n u_k$	$\sum_{k=N}^{+\infty} u_k = \sum_{n=N}^{+\infty} u_n$	$\sum_{n \geq N} u_n = \sum_{k \geq N} u_k$
Type :	nombre réel qui dépend de n	nombre réel : limite indépendante de n	suite (liste de nombres)	
Ex :	$\frac{1}{2^n}$	$S_n = \sum_{k=N}^n \frac{1}{2^k}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$	$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$

■ Exemple 4 :

Examinons la série d'un peu plus près pour comprendre :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = (S_n) = \left(\underbrace{1}_{S_0}, \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{S_1}, \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}}_{S_2}, \dots \right) \quad (\text{infinité de termes})$$

? Exercice 1

Montrer que $\sum_{n \geq 0} 2^n$ est divergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = +\infty$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$



Définition

De même que pour une suite, on appelle *nature* de la série le caractère convergent ou divergent de la série.



DIFFÉRENCE SUITE (u_n) / SÉRIE $\sum_{n \geq N} u_n$

Ne pas confondre la nature de la suite (u_n) et celle de la série $\sum u_n$!

■ Exemple 5 :

Si $u_n = 1$, on a $\sum_{k=1}^n 1 = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. La suite (u_n) converge, alors que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.



CONFUSION

Même nature ne veut pas dire même somme totale !

■ Exemple 6 :

$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sont de même nature (car $|\frac{1}{2}| < 1$, $|\frac{1}{3}| < 1$, cf exemples déjà traités) avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

I-2

Changement de borne de départ

■ Exemple 7 :

Si $|q| < 1$, la série $\sum_{n \geq \boxed{2n}} q^n$ est convergente, tout comme $\sum_{n \geq \boxed{0}} q^n$. En effet,

$$\sum_{k=2}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \underbrace{(q^0 + q^1)}_{\text{constant par rapport à } n}$$

Les termes de part et d'autre sont donc de même nature. C'est le même fonctionnement pour n'importe quelle série :

Propriété 1

Pour une suite $(u_n)_{n \geq N}$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq N$, les séries $\sum_{n \geq N} u_n$ et $\sum_{n \geq M} u_n$ sont de même nature.

Démonstration :

Pour tout $n \geq M$, on a $\sum_{k=N}^n u_k = \underbrace{\sum_{k=N}^{M-1} u_k}_{\text{indépendant de } n} + \sum_{k=M}^n u_k$

Le terme $\sum_{k=N}^{M-1} u_k$ étant constant par rapport à n , la convergence de $\left(\sum_{k=N}^n u_k\right)$ est donc équivalente à la convergence de $\left(\sum_{k=M}^n u_k\right)$. $\square$



Remarque :

S'il n'y a aucune ambiguïté sur la borne de départ N de la série (ou si elle n'a pas d'importance), on notera le plus souvent $\sum u_n$ pour désigner la série $\sum_{n \geq N} u_n$.

I-3 Changement de termes

Propriété 2

Si (u_n) et (v_n) ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration :

Sachant que la convergence ne dépend pas de la borne de départ, pour des raisons de facilité d'écriture, on pourra supposer que la suite est indexée sur $\mathbb{N}$.

On pose $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n\}$. Ω est un sous ensemble majoré de $\mathbb{N}$. Il possède donc une borne supérieure, notée M .

Par définition de M , on a

$$(\sum u_n)_{n \geq M+1} = (\sum v_n)_{n \geq M+1}.$$

Par le lemme précédent, on sait que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est de même nature que $(\sum u_n)_{n \geq M+1}$.

De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ est de même nature que $(\sum v_n)_{n \geq M+1}$. Par transitivité, on en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature. $\square$

I-4 Calculs

Méthode 1 - Calcul de la somme totale par télescopage

Le télescopage peut être utile (dans des cas limités) pour aboutir au calcul explicite de la somme partielle puis de la somme totale. Il consiste à écrire le terme général u_n sous la forme d'une somme d'éléments de même type :

$$u_n = v_{n+1} - v_n,$$

(exemple $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$), qui, par changement d'indices, produiront l'élimination progressive de la plupart des termes.

Exemple 8 :

Calcul de la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$:

pour $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, on écrit $u_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{v_n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{v_{n+1}}$. Ainsi, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n v_k - \sum_{k=1}^n v_{k+1} = \sum_{k=1}^n v_k - \sum_{k=2}^{n+1} v_k = v_1 - v_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Autrement dit, la série est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Méthode 2 - Décomposition en combinaisons linéaires

Propriété 3 (*Combinaisons linéaires de séries*)

Soient $\sum_{n \geq N} u_n$ et $\sum_{n \geq N} v_n$ deux séries et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- i → Si $\sum_{n \geq N} u_n$ converge, alors la suite $\sum_{n \geq N} \lambda u_n$ converge vers $\lambda \sum_{n=N}^{+\infty} (u_n)$.
- ii → Si $\sum_{n \geq N} u_n$ et $\sum_{n \geq N} v_n$ convergent, alors la série $\sum_{n \geq N} (u_n + v_n)$ converge vers $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n + \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.
- iii → Si $\sum_{n \geq N} u_n$ converge et $\sum_{n \geq N} v_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq N} (u_n + v_n)$ diverge.
- iv → Si $\sum_{n \geq N} u_n$ diverge et $\sum_{n \geq N} v_n$ diverge, alors on ne peut rien dire sur $\sum_{n \geq N} (u_n + v_n)$.

Démonstration :

C'est tout simplement une conséquence directe des propriétés sur les suites. $\square$

Exemple 9 :

La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2}^n$ converge. (*application de i*)

En effet, comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on sait que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2}^n$ converge et la série initiale converge par multiplication.

■ Exemple 10 :

La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$ diverge. (*application de iii*)

En effet, on voit pour commencer que : $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{n \geq 0} 1$.

On a déjà vu que la série $\sum_{n \geq 0} 1$ diverge et que $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$ converge. Par combinaison linéaire de séries, on sait donc que la somme va diverger.



Remarque :

En cas de divergence vers l'infini, les principe des limites usuelles s'applique toute-fois. Par exemple, si $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = +\infty$ et $\sum_{n=N}^{+\infty} v_n = +\infty$, alors $\sum_{n=N}^{+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$. En revanche, si les deux limites infinies sont de signe opposé, alors c'est une forme indéterminée qu'il faut résoudre.

II Critères de convergence / divergence

II-1 Divergence grossière

Proposition 4

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Démonstration :

Si $\sum u_n$ converge, on note S la somme totale de la série et S_n la somme partielle d'ordre n . On a alors

$$\square \quad u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0.$$

Conséquence :

Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ ne peut être convergente.

■ Exemples :

11 ■ $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ ne peut être convergente, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2$.

12 ■ $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin n \frac{\pi}{2}$ ne peut être convergente, car $(\sin n \frac{\pi}{2})$ est une suite divergente.



RÉCIPROQUE FAUSSE !

➤ Il existe des séries divergentes, dont le terme général tend vers 0 :

Proposition 5

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Démonstration :

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Alors $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Si (S_n) était convergente, en notant S la somme totale, par passage à la limite des deux cotés de l'inégalité, on obtiendrait $\underbrace{S - S}_0 \geq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. $\square$



Définition

Si une série $\sum u_n$ est telle que (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série *diverge grossièrement*.

II-2 Séries à termes de signe constant

II.2-a) Propriétés élémentaires des séries à termes positifs

Commentaires :

Comme on ne sait pas toujours calculer facilement les sommes partielles, pour déterminer la convergence d'une série dans le cas où elle ne diverge pas grossièrement, on peut être en proie à certaines difficultés. Néanmoins (et heureusement), il existe un certain nombre de critères nous permettant de faciliter cette étude. Les critères de base consistent à se ramener à des séries dont la convergence est déjà connue.

Lemme 6

On se donne $\sum u_n$ une série à **termes positifs** au moins à partir d'un certain rang. Alors la série $\sum u_n$ est croissante à partir d'un certain rang.

Démonstration :

Soit $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N$.

On pose $S_n = \sum_{k=N}^n u_k$. Alors $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. La suite $(S_n)_{n \geq N}$ est donc croissante. $\square$



Remarque :

Si $\sum u_n$ une série à **termes positifs**, comme (S_n) est croissante, les critères de convergence sur les suites croissantes nous indiquent que :

- i → $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente si et seulement si elle est majorée. Les critères de majoration de la limite s'appliquent également.
- ii → De même que pour la partie précédente, les critères de convergence sur les suites croissantes nous indiquent que si $\sum u_n$ n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.

■ Exemple 13 :

Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n3^n}$ converge :

Notons

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k3^k}$$

Remarquons que la série est à termes positifs. Elle est donc croissante. De plus, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{k3^k} \leq \frac{1}{3^k}$$

Ainsi, on a

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) \leq \frac{1}{2}$$

Ainsi, au total, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n \leq \frac{1}{2}$$

C'est donc une suite croissante et majorée, donc convergente, avec même

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{2}$$

Commentaires :

En réalité, la technique de l'exemple précédent n'est pas du tout optimale. On se servira plutôt du théorème qui suit, qui raccourcit nettement le raisonnement :

II.2-b) Critère de comp. de deux séries à termes positifs

Théorème 7 de comparaison des séries à termes positifs (TCSTP)

On se donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang N ,

- (u_n) et (v_n) sont **positives**
- $u_n \leq v_n$.

Alors

- i → Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.
- ii → Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge (vers $+\infty$.)

Démonstration :

Les séries $\sum u_n$ et $\sum_{n \geq N} u_n$ (resp. $\sum v_n$ et $\sum_{n \geq N} v_n$) sont de même nature. Il suffit donc d'étudier la convergence de $\sum_{n \geq N} u_n$ et $\sum_{n \geq N} v_n$.

Clairement, on obtient $0 \leq \sum_{k=N}^n u_k \leq \sum_{k=N}^n v_k$.

De plus, d'après le lemme précédent, comme tous les termes de rang plus grand que N sont positifs, les séries $\left(\sum_{n \geq N} u_n \right)$ et $\left(\sum_{n \geq N} v_n \right)$ sont toutes deux croissantes.

- Supposons que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge.

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum v_n \text{ converge} &\Leftrightarrow \sum_{n \geq N} v_n \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \geq N} v_n \text{ est majorée} \\ &\Rightarrow \sum_{n \geq N} u_n \text{ est majorée} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \geq N} u_n \text{ est convergente} \\ &\Leftrightarrow \sum u_n \text{ est convergente} \end{aligned}$$

En cas de convergence, le passage à la limite donne le reste.

- Supposons que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Cette partie est simplement la contraposée de la première. Le fait que ça diverge vers $+\infty$ vient de fait que S_n est croissante + divergente. $\square$

■ Exemples :

- 14 ■ Montrons à nouveau que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n3^n}$ converge :

Remarquons que la série est à termes positifs. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{1}{k3^k} \leq \frac{1}{3^k}$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n}$ est convergente (déjà vu). Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n3^n}$ converge par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

De plus, on peut noter que

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

15 ■ La série $\sum_{n \geq 2} \frac{n+1}{n(n-1)}$ diverge.

On constate en effet aisément que

$$\frac{n+1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall n \geq 2.$$

La divergence de la série $(\sum \frac{1}{n})_{n \geq 2}$, permet de conclure.

II.2-c) Equivalence

Théorème 8

On se donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que,
i → à partir d'un certain rang N , (u_n) et/ou (v_n) sont **positives**
ii → $u_n \sim v_n$.
 Alors $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ cv (elles sont de même nature)

Démonstration :

Les deux séries étant équivalentes, à partir d'un certain rang, il existe une suite h_n telle que

$$u_n = h_n v_n$$

avec $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi, il existe $M \geq N$ tel que pour tout $n \geq M$,

$$\frac{1}{2} \leq h_n \leq \frac{3}{2}.$$

Les suites (u_n) et (v_n) étant de signe constant à partir du rang N (supposons ici positives, le cas négatif est laissé en exercice), pour tout $n \geq M$,

$$0 < \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$$

Par TCSTP sur les deux premiers membres, on déduit que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge également.

Les membres de droite donnent, toujours par TCSTP, que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge également.

(Ou alors, l'énoncé étant symétrique en u_n et v_n , il suffit d'échanger les deux suites u_n et v_n .) CQFD □



Remarque :

De manière équivalente, la conclusion du théorème précédent peut également être " $\sum u_n$ diverge ssi $\sum v_n$ diverge".

Commentaires :

Il est écrit " (u_n) et/ou (v_n) sont positives". En effet, si l'une des deux est positive et qu'elles sont équivalentes, cela signifie qu'automatiquement, l'autre sera également positive à partir d'un certain rang. Il n'est donc pas nécessaire de vérifier que les deux sont positives. Une seule suffit.

■ Exemple 16 :

Montrons que la série $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ converge :

On observe trivialement que les termes de la série sont tous positifs. De plus, comme

$$\frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On sait que $\ln \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right) \sim \frac{1}{n(n+1)}$. Or, nous avons déjà montré par télescopage que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ était convergente. En conclusion, $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ converge.



ERREUR DE RAISONNEMENT

Ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et l'équivalence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$!!

■ Exemple 17 :

Remarquons que

$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n(n-1)}$$

(on peut passer par $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n-1)}$). Mais

$$\underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)}}_{\sim \frac{1}{2}} \not\sim \underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}}_{\sim 1}$$

En effet, on sait que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente par télescopage (p.3).

Nous avons d'ailleurs également calculé (p.3) :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \sim 1$$

De plus,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)i} = 1 - \frac{1}{n-1+1} \sim 1$$

et

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)k} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{i=1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{2} \not\sim 1$$



Remarque :

Tous les résultats de la section II-2 peuvent être transposés plus ou moins directement au cas où on a u_n et v_n **tous deux négatifs à partir d'un certain rang N** . (On pourra éventuellement s'interroger sur ce point.)

Néanmoins, on préférera poser simplement

$$a_n = -u_n \geq 0, \quad b_n = -v_n \geq 0.$$

On raisonne alors sur $\sum a_n$ et $\sum b_n$ à termes positifs.



Exercice 2

Montrer que la série $\sum \ln \left(1 - \frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge. (Attention, ici les séries sont négatives !!)

Solution

Comme dans l'exemple précédent, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq -\ln \left(1 - \frac{1}{n(n+1)}\right) \sim \frac{1}{n(n+1)}$$

Ce qui, par convergence de la série positive $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et par équivalence des termes généraux nous dit que $-\sum \ln \left(1 - \frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge et donc également $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)$



Exercice 3

Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \frac{1}{n+1} e^{-n+1}$ converge.
(On pourra utiliser que $\ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$)

Solution

Si on pose $u_n = \ln \frac{1}{n+1} e^{-n+1}$, on constate, comme $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, que

$$\ln \frac{1}{n+1} = -\ln(1+n) < 0 \text{ et donc } u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose alors $a_n = -\ln \frac{1}{n+1} e^{-n+1} = \ln(n+1) e^{-n+1} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. D'après les inégalités de l'énoncé, on sait alors que

$$0 \leq a_n \leq n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or, comme $\frac{1}{e} \in [0, 1[$, la série $\sum n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ est donc une série géométrique dérivée convergente. Par TCSTP, la série $\sum a_n$ est donc convergente. Par multiplication par -1 , il en va donc de même pour $\sum u_n$.

II-3 Signe quelconque et convergence absolue



VÉRIFICATION HYPOTHÈSES

Attention à **ne pas** appliquer les théorèmes de convergence si les termes ne sont pas de signe constant !

■ Exemple 18 :

Avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, on observe que :

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Or, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (admis ici) mais $\sum u_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum \frac{1}{n}$ est ainsi la combinaison linéaire d'une série convergente et d'une série divergente. Elle est donc bien **divergente**, contrairement à $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui elle, est convergente !

Commentaires :

Même si on ne peut pas utiliser directement les théorèmes de la section précédente, il existe néanmoins un résultat permettant, dans certains cas, de s'y ramener.

Proposition 9

On se donne une série quelconque $\sum u_n$.

Si la série $\sum |u_n|$ converge, **alors** la série $\sum u_n$ converge.

On appelle ceci la *convergence absolue*.

Démonstration :

On ne perd rien à supposer que $\sum u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (c'est-à-dire que la série est indexée sur $\mathbb{N}$ tout entier.)

On pose $u_n^+ = \max(u_n, 0) = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $u_n^- = -\min(u_n, 0) = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

de sorte que $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^- \quad (*)$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^+$ est à termes positifs et u_n^+ est majoré par $|u_n|$, qui est, par hypothèse, le terme général d'une série convergente. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^+$ est donc convergente. De même, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^-$ est convergente.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k^+$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k^-$ existent, on en déduit l'existence de leur différence grâce à l'égalité (*), autrement dit, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge. $\square$



RÉCIPROQUE FAUSSE

Voyons ceci dans l'exemple suivant :

■ Exemple 19 :

Soit la série harmonique alternée : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Elle n'est pas absolument convergente, mais est convergente. (*non démontré ici, mais cf. fin de chapitre (p.12) pour une observation graphique.*)

III Exemples fondamentaux

Méthode 3 - Détermination d'une convergence

Si le terme général de la série est de signe quelconque éventuellement fluctuant : on pourra chercher à prouver sa convergence absolue ou à décomposer en somme des séries dont on connaît la convergence.

Si le terme général de la série est positif : on pourra tenter de majorer / minorer par une suite plus simple ou alors en chercher un équivalent plus simple.

Si le terme général de la série est négatif : on peut transposer les théorèmes sur les séries à termes positifs, ou alors poser la série $\sum(-u_n)$

Dans tous les cas, les séries auxquelles on peut se référer sont celles qui suivent dans cette partie. Toutes les autres sont à redémontrer.

III-1 Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$

Proposition 10

Rappel : La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Démonstration :

Cette démonstration a déjà été effectuée dans la partie "divergence grossière". $\square$

Proposition 11

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$. On a $n \geq n - 1$, d'où

$$n^2 \geq n(n - 1)$$

Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on a

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n - 1)}$$

Or, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente (déjà démontré par télescopage.) Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, on obtient la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2}$ et donc celle de $\sum \frac{1}{n^2}$. $\square$

? Exercice 4

Montrer que toute série de type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est :

- convergente si $\alpha \geq 2$.
- divergente si $\alpha \leq 1$.

Solution

- Si $\alpha \geq 2$:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, par TCSTP, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

- Si $\alpha \leq 1$:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Ainsi, par TCSTP, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.



Remarque :

Les résultats précédents ne permettent pas de conclure sur la convergence ou la divergence des séries de type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ si $1 < \alpha < 2$. Ces résultats existent mais ne sont pas à notre programme.

? Exercice 5

Montrer que $\sum \left(e^{\frac{2}{n^2}} - 1\right)$ converge.

Solution

Comme $\frac{2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $e^{\frac{2}{n^2}} - 1 \sim \frac{2}{n^2} \geq 0$

Or, la série $\sum \frac{2}{n^2} = 2 \sum \frac{1}{n^2}$ est une série positive convergente et donc $\sum e^{\frac{2}{n^2}}$ converge.

III-2 Séries géométriques

Définition

On appelle *série géométrique* toute série $\sum_{n \geq N} q^n$, où $q \in \mathbb{C}$.

Théorème 12

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
- Si $|q| < 1$ la somme totale existe et vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration :

- Tout d'abord, si $|q| \geq 1$, la série est grossièrement divergente puisque $q^n \not\rightarrow 0$.

- Si $|q| < 1$:

On sait que $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or, comme $|q| < 1$, on a $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit donc la proposition directement par considération de limite sur la formule. $\square$

III-3 Série "dérivée" $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^{n-1}\right)$

Théorème 13

- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} nq^{n-1}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
- Si $|q| < 1$ la somme totale existe et vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Moyen mnémotechnique : Pour retenir ce résultat, on "dérive" terme à terme par rapport à q l'expression $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, pour obtenir $\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$.



INTERPRÉTATION FAUSSE

Ne pas voir dans ce moyen mnémotechnique un quelconque résultat sur les dérivées de séries !

Démonstration :

- Supposons que $|q| \geq 1$.

Alors $n|q|^n \geq n$ et donc

$$n|q|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui signifie que

$$nq^n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il y a divergence grossière de la série.

- Supposons maintenant que $|q| < 1$. Montrons que la série converge.

Méthode 1 : (par dérivée)

On pose $f_n(q) = \sum_{k=0}^n q^k$, alors $f'_n(q) = \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$

Comme on sait que $f_n(q) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, on obtient

$$\begin{aligned} f'_n(q) &= \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)' = \frac{-(n+1)q^n(1-q) - (1-q^{n+1})(-1)}{(1-q)^2} \\ &= \frac{-(n+1)q^n + (n+1)q^{n+1} + 1 - q^{n+1}}{(1-q)^2} \\ &= \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-q)^2}$, ce qui montre la proposition.

Méthode 2 : par considération combinatoire

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \\ q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} q^k = q \frac{1-q^{n-2}}{1-q} \\ &\dots \\ q^{N-1} + \dots + q^{n-1} &= \sum_{k=N}^{n-1} q^k = q^N \frac{1-q^{n-N}}{1-q} \\ &\dots \\ q^{n-1} &= \sum_{k=n-1}^{n-1} q^k = q^{n-1} \frac{1-q}{1-q} \end{aligned}$$

Par sommation sur les colonnes, on obtient la somme partielle

$$\sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \sum_{N=0}^n q^N \frac{1 - q^{n-N}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \sum_{N=0}^n (q^N - q^n) = \frac{1}{1 - q} \left(\sum_{N=0}^n q^N - nq^n \right)$$

Par passage à la limite, on obtient la convergence de la série et la somme totale.

Méthode 3 : par introduction du "1"

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n kq^{k-1}$. Alors

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \sum_{k=1}^n (k-1+1)q^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^n q^{k-1} \\ &= qS'_{n-1} + S_{n-1} = q(S'_n - nq^{n-1}) + S_{n-1} \end{aligned}$$

D'où

$$S'_n = \frac{S_{n-1} - nq^n}{1 - q}$$

Par passage à la limite, on trouve encore une fois le résultat annoncé.

□

? Exercice 6

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^n$ est **convergente** si et seulement si $|q| < 1$ et que dans ce cas, la

somme totale vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Solution

On a $\sum_{n \geq 0} nq^n = q \sum_{n \geq 0} nq^{n-1}$ pour tout réel q .

Le reste n'est qu'un simple passage à la limite : $\sum_{n \geq 0} nq^{n-1}$ étant convergente, on a que

$\sum_{n \geq 0} nq^n$ est convergente et

$$\sum_{n \geq 0} nq^n = q \sum_{n \geq 0} nq^{n-1} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

III-4 Série "dérivée seconde" $(\sum n(n-1)q^{n-2})_{n \in \mathbb{N}}$

Théorème 14

- $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
- Si $|q| < 1$ la somme totale existe et vaut $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

Moyen mnémotechnique : Pour retenir ce résultat, comme pour $\sum nq^{n-1}$, on "dérive" terme à terme par rapport à q l'expression $\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1}$, pour obtenir

$$\frac{2}{(1-q)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}.$$

⚠ INTERPRÉTATION FAUSSE

Encore une fois, ne pas voir dans ce moyen mnémotechnique un quelconque résultat sur les dérivées de séries !

Démonstration :

- Supposons maintenant que $|q| \geq 1$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $n(n-1)|q|^{n-2} \geq 1$ ce qui entraîne la divergence grossière.

- Supposons maintenant que $|q| < 1$. Montrons que la série converge.

Méthode 1 : par dérivée

On pose $g_n(q) = \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$, alors

$$g'_n(q) = \sum_{k=0}^n k(k-1)q^{k-2}$$

Dans la démonstration de la partie précédente, on a obtenu

$$g_n(q) = \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}.$$

Autrement dit, on obtient

$$\begin{aligned} g'_n(q) &= \left(\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2} \right)' \\ &= \frac{(n(n+1)q^n - n(n+1)q^{n-1})(1-q)^2 + 2(1-q)(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(1-q)^4} \\ &= \frac{(n(n+1)q^n - n(n+1)q^{n-1})(1-q) + 2(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(1-q)^3} \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} g'_n(q) = \frac{2}{(1-q)^3}$. Ainsi, on en déduit la

convergence de la série, ainsi que sa somme totale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Méthode 2 : par introduction du "1"... ou d'un "2" ...

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$, $S'_n = \sum_{k=0}^n kq^{k-1}$ et $S''_n = \sum_{k=0}^n k(k-1)q^{k-2}$.

On a

$$\begin{aligned} S''_n &= \sum_{k=0}^n k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)q^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^n (k-2+2)(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=2}^n (k-1)(k-2)q^{k-2} + 2 \sum_{k=2}^n (k-1)q^{k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)q^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} \\ &= qS''_{n-1} + 2S'_{n-1} = q(S''_n - n(n-1)q^{n-2}) + 2S'_{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(1-q)S''_n = 2S'_{n-1} - n(n-1)q^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(1-q)^2}$$

D'où le résultat annoncé. $\square$

? Exercice 7

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et que, dans ce cas, la

somme totale vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$.

Solution

On pose $S_n(q) = \sum_{k=0}^n k^2 q^k$.

- Si $|q| \geq 1$, alors il y a divergence grossière.
- Si $|q| < 1$, on a

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^n k(k-1+1)q^k = \sum_{k=0}^n k(k-1)q^k + \sum_{k=0}^n kq^k = q^2 \sum_{k=0}^n k(k-1)q^{k-2} + \sum_{k=0}^n kq^k$$

Or, on sait que $\sum_{k=0}^n k(k-1)q^k = q^2 \sum_{k=2}^n k(k-1)q^{k-2}$ et $\sum_{k=0}^n kq^k = q \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$ (termes nuls retirés et factorisation ensuite) sont toutes deux convergentes, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k &= q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} \\ &= q \left(\frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1-q}{(1-q)^3} \right) = q \frac{1+q}{(1-q)^3} \end{aligned}$$

? Exercice 8

De manière générale, montrer que, pour $a \in \mathbb{N}$, si $|q| < 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n(n-1) \dots (n-a+1)q^{n-a}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-a)!} q^{n-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-a+1)q^{n-a} = \frac{a!}{(1-q)^{a+1}}$$

Solution

Cette démonstration peut se faire par récurrence sur $\mathbb{N}$ en utilisant les méthodes d'introduction déjà vues. Notamment, par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-a+1)q^{n-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-a+a)(n-1) \dots (n-a+1)q^{n-a}$$

III-5 Série exponentielle

Définition

On appelle *série exponentielle* toute série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 15

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ est convergente.
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Démonstration :

Cette démonstration est hors programme et ne figure ici qu'à titre "culturel"

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. On montre facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

ce qui donne

$$S_n = e^x - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

On pose $I(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$. Par changement de variable $t = \frac{t}{u}$, on obtient

$$I(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{xu} du$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |I(x)| &\leq |x^{n+1}| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^n}{n!} e^{xu} \right| du \\ &\leq \frac{|x^{n+1}|}{n!} \underbrace{\int_0^1 e^{xu} du}_{\text{constant par-rapport à } n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

III-6 Application

Méthode 4 - Calcul explicite de la somme totale

Pour déterminer la convergence puis la somme totale d'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, on peut chercher à décomposer en somme de séries connues.

? Exercice 9

Déterminer la convergence et la somme totale de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n+4}{3^n}$

IV Et si on change l'ordre des termes ?

Dans une somme finie de nombres réels, on sait (commutativité dans $\mathbb{R}$) que l'on peut additionner les nombres dans n'importe quel ordre. Plus précisément, pour toute permutation $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ d'indices, on sait que

$$a_1 + \dots + a_n = a_{\varphi(1)} + \dots + a_{\varphi(n)}$$

La question ici est de savoir si oui ou non le même raisonnement est vrai dans le cas d'une somme infinie de termes. Nous allons tenter de nous convaincre graphiquement que la réponse est NON !

Considérons la "série harmonique alternée" $S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ convergente (vers $\ln 2$). C'est la somme, "de gauche à droite", des éléments

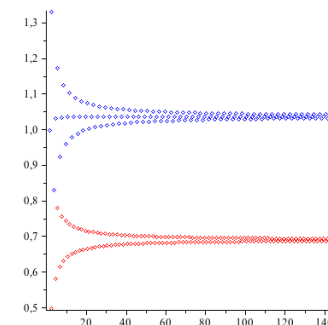
$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \dots$$

Tentons maintenant d'additionner les termes d'une autre manière. Nous prendrons 2 positifs pour un négatif. "De gauche à droite" :

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{7}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \dots$$

Nous admettrons que cette série converge également.

Ces deux séries (série harmonique en bas ... en rouge, l'autre en haut ... en bleu) sont représentées sur le graphique suivant :



Si on veut bien admettre que nous pouvons faire confiance au graphique en ce qui concerne le comportement asymptotique, nous constaterons que les sommes totales sont nettement différentes, ce qui devrait nous convaincre qu'en cas de somme infinie, en général, il faut faire attention à l'ordre dans lequel on somme les éléments !

Toutefois, la majorité des cas raisonnables que nous aurons à étudier ne poseront pas ce type de problèmes. En effet :

Théorème 16

Si une série $(\sum u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente, alors la somme des u_n peut se faire dans n'importe quel ordre.

Démonstration : admise. □

Corollaire

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **positive** est telle que $(\sum u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors, la somme des u_n peut se faire dans n'importe quel ordre.