

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1 (★)

Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = nx^n \ln x$ pour $x \in]0, 1]$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

On considère un réel $\alpha \in]0, 1[$. La convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0, \alpha]$? sur $[\alpha, 1]$?

Exercice 2 (★)

Soit $\alpha \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$.

À quelle condition portant sur α la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 3 (★)

Étudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) , avec :

$$a. f_n : x \mapsto \frac{x}{x^2 + n}; \quad b. f_n : x \mapsto x e^{-x/n}; \quad c. f_n : x \mapsto n^2 x e^{-nx}; \quad d. f_n : x \mapsto e^{-nx} \sin(nx).$$

Le cas échéant, on précisera des intervalles $J \subset I$ sur lesquels la convergence est uniforme.

Exercice 4 (★)

Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, +\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

Pour les 5/2 : calculer ensuite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$.

Exercice 5 (★)

Soit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$. Calculer $f_n(n)$; la convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$? et sur $[0, a]$ (avec $a > 0$)?

Exercice 6 (★★)

Soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$. On définit les suites de fonctions (f_n) et (g_n) en posant : $f_n(x) = h(nx)$ et $g_n(x) = h(x/n)$.

- Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ des suites de fonctions (f_n) et (g_n) .
- La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
- Sur quels intervalles y-a-t-il convergence uniforme?

Exercice 7 (★★)

Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = g(x) e^{-nx}$.

- Étudier la convergence simple de (f_n) , puis montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
- Fixons $\epsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ de sorte que pour tout $x \in [0, a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $|f_n(x)| \leq \epsilon$, et en déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' soit bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{n}{2} \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x - \frac{1}{n}\right) \right)$.

- Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une fonction à préciser.
- Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Séries de fonctions

Exercice 9 (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$ on pose $u_n(x) = \frac{x}{(1+nx)^2}$ et $v_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum u_n$ puis de $\sum v_n$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 10 (**)

Soit (a_n) une suite décroissante à valeurs positives, et $f_n : x \mapsto a_n x^n (1-x)$.

- Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
- Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est normale sur $[0, 1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
- Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est uniforme sur $[0, 1]$ si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.

Exercice 11 (*)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Utiliser un encadrement donné par la technique de comparaison à une intégrale pour déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 12 (**)

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Justifier que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
- Démontrer que pour tout $x > 0$, $2f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$.
- Utiliser le critère spécial des séries alternées pour en déduire un encadrement de $f(x)$, puis sa limite en 0.

Exercice 13 (*)

Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{n}.$$

Exprimer la dérivée sans symbole de sommation, et en déduire une expression simple de $f(x)$.

Exercice 14 (**)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 15 (**)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, puis donner des équivalents simples de f en $+\infty$ et en 0.

Exercice 16 (**)

Soit a un réel fixé dans $] -1, 1[$. On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}$.

- Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- En déduire une expression simple de $f'(x)$ puis de $f(x)$. On admettra que $f(0) = -\ln(1 - a)$.
- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos(x) + 1) dx$.

Exercice 17 (**)

On pose sous réserve de convergence : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x^2}$.

- Déterminer le domaine de définition de f et de continuité de f .
- Déterminer la limite en 0 de $xf(x)$.

Exercice 18 (**)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

- Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que la quantité $xf(x) - f(x+1)$ est constante sur $]0, +\infty[$.
- Donner des équivalents en 0 et $+\infty$ de $f(x)$.

Exercice 19 (**)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

- Établir l'existence et la continuité de f sur $]0, +\infty[$.
- Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.
- Donner des équivalents de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 20 (**)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\arctan(x+n) - \arctan(n))$.

- Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- Chercher une relation simple liant $f(x)$ et $f(x+1)$.
- Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.