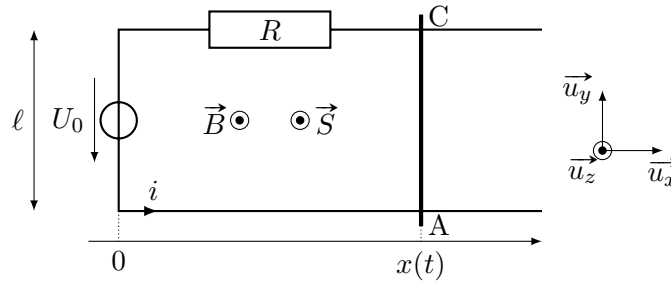


1 Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

1.1 Exemple des rails de Laplace

Définition. Les rails de Laplace sont deux conducteurs rectilignes parallèles, reliés par une tige mobile. Le circuit est ainsi **déformable**. Il est placé dans un champ magnétique constant.



Le générateur idéal, de force électromotrice U_0 , impose un courant $i > 0$. Nous avons constaté expérimentalement la mise en mouvement de la barre, à l'aide de la force de Laplace. Quelle vitesse peut-elle atteindre ?

Appliquons les lois de la mécanique (le PFD). On étudie le mouvement du barreau de masse m dans le référentiel de la salle du laboratoire. On repère la position de son centre d'inertie M dans le repère du schéma. Faisons un bilan des forces :

- ▷ le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- ▷ la réaction normale : $\vec{N} = N\vec{u}_z$;
- ▷ la force de Laplace : $\vec{F}_{\text{Lap}} = i\vec{AC} \wedge \vec{B} = i\ell B\vec{u}_x$;
- ▷ d'éventuels frottements : $\vec{F}_f = -F_f\vec{u}_x$ avec $F_f > 0$.

Appliquons ainsi le principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{Lap}} + \vec{N} + \vec{F}_f$$

On note $v = \dot{x}$. En projetant sur l'axe $\vec{u}_x$:

$$m \frac{dv}{dt} = i\ell B - F_f$$

Nous avons obtenu l'équation **mécanique**.

Déterminons l'équation électrique par l'application de la loi de Faraday. On néglige l'autoinduction.

Pourquoi y-a-t-il induction ? Le flux magnétique varie : le champ magnétique est constant, mais la surface du circuit varie.

Calculons le flux du champ magnétique à travers le circuit. Définissons $\vec{S}$ d'après le sens de i : $\vec{S} = S\vec{u}_z$. Donc :

$$\Phi = B\vec{u}_z \cdot S\vec{u}_z = BS = B\ell x$$

Donc la force électromotrice d'induction est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell \dot{x}$$

Cette force électromotrice doit être placée en convention générateur. D'après la loi des mailles :

$$e + U_0 = Ri \quad \text{soit} \quad U_0 = Ri + B\ell \dot{x}$$

Nous avons obtenu l'équation **électrique** :

$$U_0 = Ri + B\ell v$$

L'équation électrique et l'équation mécanique sont deux équations couplées reliant les fonctions v et i .

Résolution. En l'absence de frottements, on peut obtenir une équation différentielle sur v : on exprime i d'après l'équation électrique :

$$i = \frac{U_0}{R} - \frac{B\ell}{R}v$$

que l'on injecte dans l'équation mécanique (en l'absence de frottements $F_f = 0$) :

$$m \frac{dv}{dt} = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{B\ell}{R}v \right) \ell B = \frac{U_0 \ell B}{R} - \frac{B^2 \ell^2}{R}v$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{Rm}v = \frac{U_0 \ell B}{Rm}}$$

On obtient une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Rm}{B^2 \ell^2} \quad \text{et} \quad v_{\text{lim}} = \frac{U_0}{B\ell}$$

La vitesse du rail finit par atteindre une valeur limite, malgré l'absence de frottements. C'est le terme d'induction qui est responsable de cela. On retrouve un effet de la loi de Lenz : l'induction s'oppose par ses conséquences à la variation du flux donc au mouvement du barreau.

Méthode.

1. Obtenir l'équation électrique :
 - (a) définir un sens conventionnel pour le courant, en déduire $\vec{S}$, calculer le flux ;
 - (b) utiliser la loi de Faraday pour obtenir l'expression de la force électromotrice ;
 - (c) l'ajouter dans le circuit en la fléchant en convention générateur ;
 - (d) appliquer la loi des mailles ;
2. obtenir l'équation mécanique : appliquer le principe fondamental de la dynamique (si translation) ou le théorème du moment cinétique (si rotation) ;
3. résoudre les équations obtenues.

Bilan de puissance.

- Bilan de puissance électrique. On multiplie la loi des mailles par i :

$$U_0 i = Ri^2 + B\ell v i$$

On identifie :

- la puissance fournie par le générateur (celui-ci est fléché en convention générateur) : $\mathcal{P}_g = U_0 i$;
- la puissance dissipée par effet Joule : $\mathcal{P}_J = Ri^2$;
- la puissance reçue par la force électromotrice : $\mathcal{P}_e = -ei = B\ell v i$.

Soit :

$$\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_e$$

- Bilan de puissance mécanique. On multiplie le PFD par v :

$$mv \frac{dv}{dt} = i\ell Bv - F_f v$$

On identifie :

- la dérivée de l'énergie cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = mv \frac{dv}{dt}$;
- la puissance des forces de Laplace : $\mathcal{P}_{\text{Lap}} = i\ell Bv$.
- la puissance de la force de frottement : $\mathcal{P}_f = -F_f v < 0$.

Soit :

$$\frac{dE_c}{dt} - \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{\text{Lap}}$$

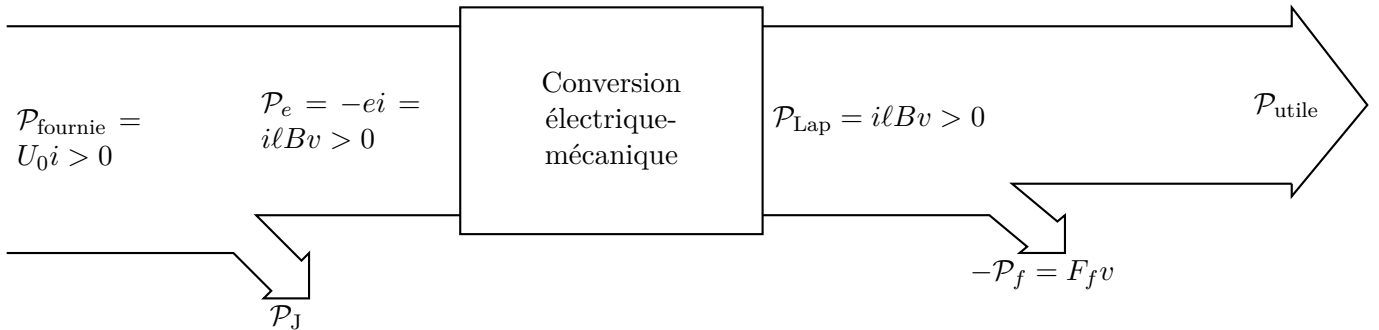
- On remarque que :

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_{\text{Lap}}$$

Le couplage électromécanique est parfait : la puissance électrique reçue par la force électromotrice induite est égale à la puissance mécanique (motrice) des forces de Laplace. D'où le bilan global :

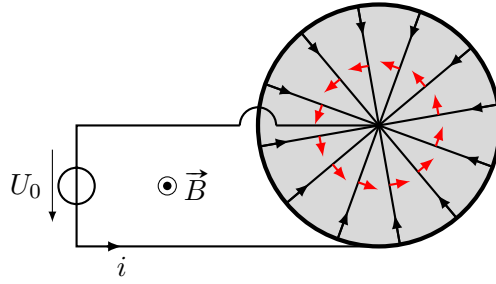
$$\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + (-\mathcal{P}_f) + \frac{dE_c}{dt}$$

Le bilan de puissance d'une conversion électrique-mécanique peut s'écrire comme :



1.2 Le moteur à entrefer plan

La géométrie des rails de Laplace peut être modifiée pour obtenir un moteur rotatif alimenté en courant continu.



Chaque « rayon » de la roue conduit à une force de Laplace dont les moments s'additionnent. À cause de la loi de modération de Lenz, ils s'opposent à la mise en mouvement. Le rotor atteint alors une vitesse angulaire limite proportionnelle à la tension d'alimentation.

La vitesse de rotation de ces moteurs est très stable, le couple est indépendant de la vitesse de rotation et du fait de la faible inertie du rotor, il réagissent rapidement aux changements de vitesse de rotation. Ils sont également peu encombrants. En revanche, leur puissance est limitée à 1 kW environ.

Applications :

- motorisation des bicyclettes et des chaises roulantes (peu encombrant) ;
- robotique industrielle ;
- médical (pompes à sang, à dialyse) ;
- militaire (chargeurs de munitions, tourelles).

1.3 Le haut-parleur électrodynamique

Définition. Un haut parleur convertit un signal électrique en un signal mécanique (la vibration d'une membrane pour émettre le son).

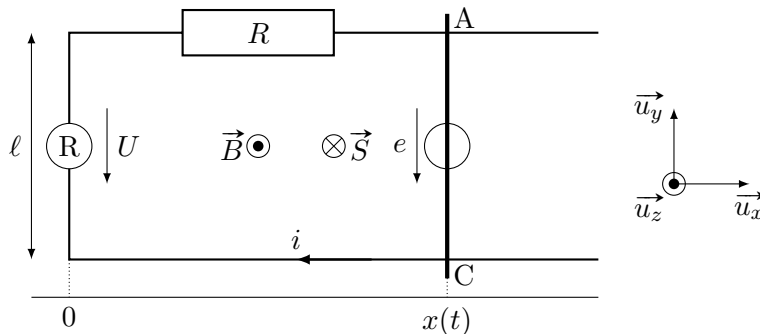
La géométrie des haut-parleurs rend difficile un calcul du flux magnétique à travers un circuit déformable, néanmoins, on peut mettre en évidence quelques-unes de ses caractéristiques sur un modèle très simple utilisant la géométrie des rails de Laplace. Nous le ferons en TD.

2 Réversibilité de la conversion électromécanique

2.1 Les rails de Laplace

Observation expérimentale : On relie l'extrémité des rails de Laplace à un ampèremètre. Lorsque le barreau est mis en mouvement (à la main), un courant de quelques dixièmes de μA circule dans le circuit. Son sens est inversé si l'on change le sens du mouvement ou le sens du champ magnétique.

On considère le circuit ci-dessus, avec un dipôle récepteur (tension U) quelconque.



Pourquoi cette observation ? Le champ magnétique est certes constant, mais, pour avoir induction, il suffit que le **flux magnétique** varie. On voit que le circuit est déformable : si le barreau se déplace, la surface change et le flux également.

Équation électrique.

- Flux magnétique : fixons un sens conventionnel pour i , et définissons $\vec{S}$ d'après ce sens :

$$\vec{S} = -S\vec{u}_z$$

Donc :

$$\Phi = -BS = -Blx$$

- Force électromotrice d'induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = Bl\dot{x}$$

- Loi des mailles : la force électromotrice doit être placée en convention générateur. D'après la loi des mailles :

$$e = Ri + U \quad \text{soit} \quad Bl\dot{x} = Ri + U$$

On note $v = \dot{x}$:

$$Blv = Ri + U$$

Nous avons obtenu l'équation **électrique**.

Remarque : loi de Lenz. Si $\dot{x} > 0$, le flux augmente. Par ailleurs, l'équation électrique donne $i > 0$, le champ magnétique créé par le courant induit s'oppose au champ constant, de façon à contrecarrer l'augmentation du flux.

Équation mécanique. Notons $\vec{F} = F\vec{u}_x$ la force exercée par l'expérimentateur sur la barre, supposons la constante.

- De quoi parle-t-on ? On étudie le mouvement du barreau de masse m dans le référentiel du laboratoire. On considère le repère et les notations indiquées sur le schéma précédent.
- Bilan des forces :
 - ▷ le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
 - ▷ la réaction normale : $\vec{N} = N\vec{u}_z$;
 - ▷ la force exercée par l'expérimentateur sur la barre : $\vec{F} = F\vec{u}_x$;
 - ▷ d'éventuels frottements : $\vec{F}_f = -F_f\vec{u}_x$ avec $F_f > 0$;
 - ▷ la force de Laplace : $\vec{F}_{\text{Lap}} = i\vec{AC} \wedge \vec{B} = -ilB\vec{u}_x$.

Remarque : loi de Lenz. Si $\dot{x} > 0$, alors $i > 0$ et la force de Laplace est dirigée selon $-\vec{u}_x$: la force de Laplace s'oppose à la mise en mouvement de la barre.

- Principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_f + \vec{F}_{\text{Lap}}$$

Projetons-le sur l'axe x :

$$m\frac{dv}{dt} = F - ilB - F_f$$

Nous avons obtenu l'équation **mécanique**.

Ce sont là encore deux équations couplées reliant les fonctions v et i . On peut obtenir une seule équation que l'on peut résoudre à partir des deux équations obtenues, en utilisant l'équation électrique pour éliminer i de l'équation mécanique.

Bilan de puissance.

- Bilan de puissance électrique. On multiplie la loi des mailles par i :

$$ei = Ui + Ri^2$$

On identifie :

- la puissance générée par la force électromotrice d'induction : $\mathcal{P}_e = +ei = B\ell vi$;
- la puissance dissipée par effet Joule : $\mathcal{P}_J = Ri^2$;
- la puissance reçue par le récepteur : $\mathcal{P}_r = Ui$.

Soit :

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_r$$

- Bilan de puissance mécanique. On multiplie le PFD par v :

$$mv \frac{dv}{dt} = i\ell Bv - F_f v + Fv$$

On identifie :

- la puissance fournie par l'opérateur : $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = Fv$
- la variation d'énergie cinétique de la barre : $\frac{dE_c}{dt} = mv \frac{dv}{dt}$.
- la puissance de la force de Laplace : $\mathcal{P}_{\text{Lap}} = -i\ell Bv$
- la puissance de la force de frottement : $\mathcal{P}_f = -F_f v < 0$.

Soit :

$$\frac{dE_c}{dt} - \mathcal{P}_f - \mathcal{P}_{\text{Lap}} = \mathcal{P}_{\text{fournie}}$$

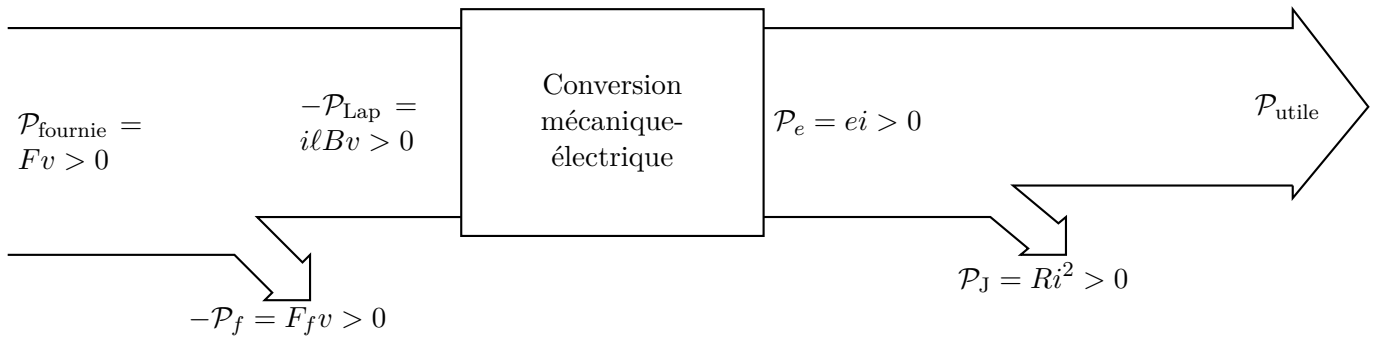
- On remarque sur cet exemple que :

$$\mathcal{P}_e = -\mathcal{P}_{\text{Lap}}$$

Là encore, le couplage électromécanique est parfait : la puissance électrique fournie par la force électromotrice induite (ei) est égale à l'opposée de celle de la force de Laplace ($-\mathcal{P}_{\text{Lap}} = i\ell Bv$). D'où le bilan global :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = \frac{dE_c}{dt} + (-\mathcal{P}_f) + \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_r$$

Le bilan de puissance d'une conversion mécanique-électrique peut s'écrire généralement comme (en prenant $dE_c/dt = 0$) :



2.2 Freinage électromagnétique

Dans le dispositif des rails de Laplace, la force de Laplace s'oppose au mouvement de la barre, conformément à la loi de Lenz. En l'absence d'opérateur externe pour maintenir le mouvement ($F = 0$), de récepteur ($U = 0$) et de frottements ($F_f = 0$) :

$$m \frac{dv}{dt} = -i\ell B \quad \text{et} \quad B\ell v = Ri \quad \text{donc} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \text{soit} \quad v(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Cela conduit à une décroissance exponentielle de la vitesse de la barre sur un temps $\tau = Rm/(B\ell)^2$.

C'est le principe des ralentisseurs électromagnétiques utilisés sur les poids lourds. Dans un camion, il y a un disque solidaire de l'essieu qui tourne à la même vitesse angulaire que les roues. Sur demande du conducteur, un électroaimant peut générer un champ magnétique orthogonal au disque : des courants induits apparaissent dans le volume du disque : ces courants sont nommés **courants de Foucault**. Un couple proportionnel à ω induit une décroissance exponentielle de la vitesse du camion.

Avantages :

- il n'y a pas de frottements solide donc pas d'abrasion (pas d'usure mécanique) ;
- les forces de Laplace sont réparties sur le volume donc il y a moins d'échauffement localisé ;
- il n'y a pas de blocage de la roue (si la vitesse de la roue est nulle, il n'y a pas de force de freinage) ;
- il est éventuellement possible de récupérer l'énergie.

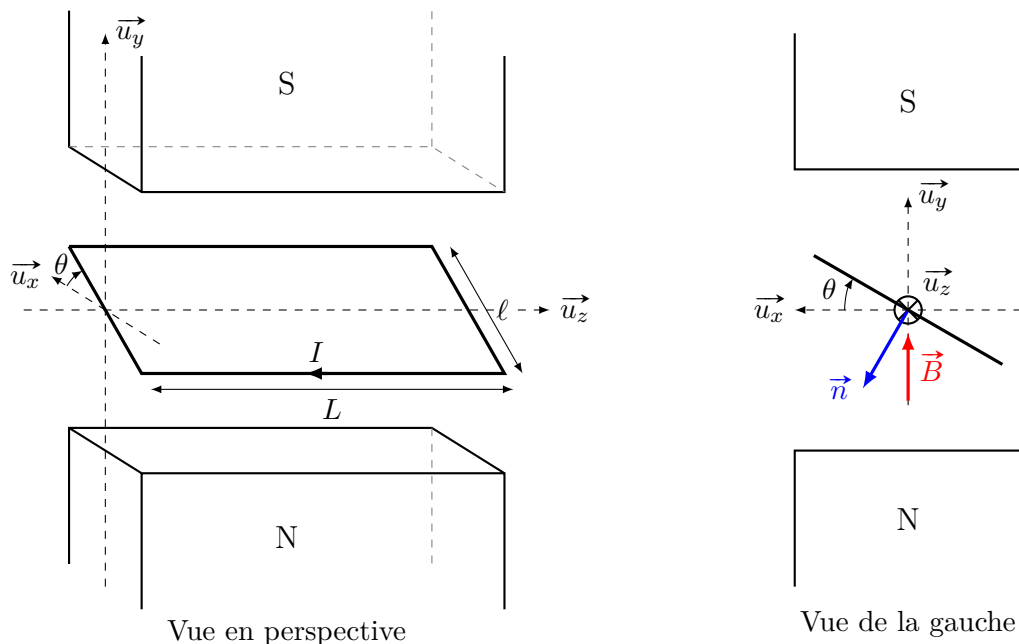
Inconvénients :

- le freinage est peu efficace à basse vitesse et ne permet pas au véhicule de s'arrêter (ou au bout d'un temps très long).

3 Notions d'électrotechnique

3.1 Machine à courant continu

On fabrique un moteur en plaçant un **rotor** constitué d'une spire rectangulaire plongée dans un champ magnétique créé par deux aimants permanents (pôle N et S sur le schéma, constituant le **stator**). La spire a une largeur ℓ et une longueur L et est parcourue par un courant I .



Le champ magnétique est vertical (les lignes de champ sortent par le Nord). On utilise le repère direct $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ du schéma. Le champ magnétique est alors :

$$\vec{B} = B\vec{u}_y$$

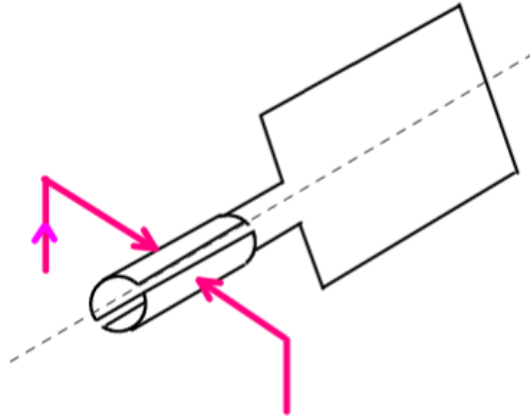
Sur le schéma de droite, le sens horaire est le sens positif des angles (z est dans la feuille). On note θ l'angle entre l'axe $\vec{u}_x$ et la spire. Le courant qui circule dans la bobine permet de définir le moment magnétique :

$$\vec{m} = -i\ell L \cos \theta \vec{u}_y + i\ell L \sin \theta \vec{u}_x$$

Couple des actions de Laplace. On sait que ce couple est $\Gamma = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z$ donc :

$$\Gamma = i\ell L B \sin \theta$$

A priori, la spire tourne jusqu'à se stabilise alors dans sa position d'équilibre $\theta = \pi$. Pour que ce système se comporte comme un moteur, on ajoute un mécanisme qui permet d'inverser le sens du courant à chaque demi-tour. C'est le **collecteur**.



Ainsi, si $0 < \theta < \pi$, on a le couple ci-dessus, et si $\pi < \theta < 2\pi$, on a $\Gamma = -i\ell L \sin \theta$. Soit :

$$\Gamma = iSB |\sin \theta|$$

Le couple moyen est donc :

$$\langle \Gamma \rangle = iSB \langle |\sin \theta| \rangle_{[0;2\pi]}$$

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{2}{\pi} BSi$$

Force électromotrice d'induction. Il y a induction car l'angle entre le vecteur surface et le champ magnétique varie. Le vecteur surface est

$$\vec{S} = -\ell L \cos \theta \vec{u}_y + \ell L \sin \theta \vec{u}_x$$

Soit :

$$\Phi = -\ell L B \cos \theta$$

Donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell L \times (-\dot{\theta} \sin \theta)$$

$$e = -B\ell L \omega \sin \theta$$

En convention récepteur, la tension aux bornes de la MCC est :

$$u = -e = B\ell L \omega \sin \theta$$

Lorsque $\pi < \theta < 2\pi$, la tension est inversée par le collecteur, de sorte que la tension aux bornes de la machine est :

$$u = e = -B\ell L\omega \sin \theta$$

Finalement, la tension aux bornes de la machine est, quelque soit θ :

$$u = B\ell L |\sin \theta|$$

La tension moyenne est donc :

$$\langle u \rangle = BS \langle |\sin \theta| \rangle_{[0;2\pi]} \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle u \rangle = \frac{2}{\pi} BS}$$

On obtient la relation $u = K\omega$, avec $K = 2BS/\pi$, avec la même constante de proportionnalité qu'entre Γ et i . On retiendra :

En l'absence de frottements, en négligeant l'effet Joule et l'autoinduction :

$$u = k\phi\omega \quad \text{et} \quad \Gamma = k\phi i$$

où k est une constante géométrique et $\phi = B\ell L$ le flux à travers une spire.

Remarque.

1. Ce moteur présente l'inconvénient d'imposer un couple variable en fonction de θ (il existe des positions pour lesquelles le couple exercé est nul, le moteur ne peut donc pas démarrer à partir de ces positions). Pour résoudre ces problèmes, les moteurs réels ont un champ magnétique radial qui produit ainsi un couple constant.
2. On a montré que $u = K\omega$ et $\Gamma = Ki$, ainsi :

$$uI = K\omega i = K\omega \frac{\Gamma}{K} = \Gamma\omega$$

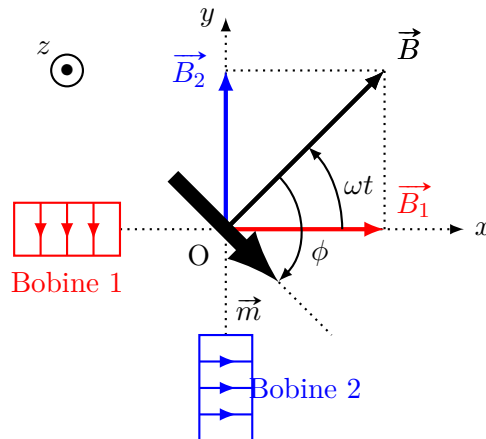
La puissance électrique ui est égale à la puissance mécanique $\Gamma\omega$. Le couplage électro-mécanique est parfait.

3. En présence d'autoinduction (on note L l'auto-inductance du rotor), de l'effet Joule (on note r la résistance des bobinages du rotor) et de frottements (qui exercent un couple résistant $-\Gamma_r$:

$$u = k\phi\omega + ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad \Gamma = k\phi i - \Gamma_r$$

3.2 Champ magnétique tournant

On place deux bobine à 90° l'une de l'autre. La bobine 1 est parcourue par un courant $i_1 = i_0 \cos(\omega t)$ et la bobine 2 par un courant $i_2 = i_0 \sin(\omega t)$. Ces deux bobines fixes constituent le **stator**.



Le champ produit par la bobine 1 en O est $\vec{B}_1 = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$. Le champ produit par la bobine 2 en O est $\vec{B}_2 = B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$. Le champ magnétique total appliqué en O est donc :

$$\vec{B} = B_0 (\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y)$$

Le vecteur :

$$\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

est un vecteur unitaire faisant un angle ωt avec l'axe $\vec{u}_x$. On réalise ainsi un **champ magnétique tournant**.

On peut ensuite placer un aimant dans ce champ magnétique tournant : cet aimant constitue le **rotor**. Il va avoir tendance à suivre le champ tournant : on a construit un moteur. C'est le principe du moteur synchrone.

En pratique : on utilise des tensions **triphasées**, c'est à dire trois signaux de tensions :

$$U_1(t) = U \cos(\omega t) \quad U_2(t) = U \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad U_3(t) = U \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Avec trois bobines placées à des angles de $0, 2\pi/3$ et $4\pi/3$.

