

Équations différentielles

Feuille d'exercices #17

⊗ Partie A – Résolution effective d'équations différentielles linéaires

★ **Exercice 1** — Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y' + y = \sin(t); \quad \cos(t)y' + \sin(t)y = t; \quad y' - \cos(t)y = \sin(2t)$$

$$2ty' + y = 1 + t; \quad y' - 2y = \sin(2t)e^t; \quad (1-t)y' + y = t$$

★ **Exercice 2** — Montrer que l'équation différentielle $xy' + 2y = \frac{x}{x^2 + 1}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ — notée f — et l'expliciter. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

★ **Exercice 3** — Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x tf(t) dt = 1$$

★ **Exercice 4** — Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' + y = t^2 e^t + t; \quad y'' + 4y' + 4y = \sin t$$

$$y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sh}(2t); \quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

★ **Exercice 5** — Résoudre pour $m \in \mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 2my' + y = e^{-t}; \quad y'' - 2y' + y = e^{mt}; \quad y'' - 2my' + (m^2 + 1)y = e^x \sin x$$

★ **Exercice 6** — On note $(\mathcal{E})$ l'équa. différentielle $x^2 y'' + xy' - 4y = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Chercher les solutions de l'équation homogène sous la forme $y_h(x) = \lambda x^p$.
2. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = x^p z(x)$ puis résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ pour $n \neq 2$.

★ **Exercice 7** — Intégrer $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$ en posant $x = \operatorname{sh}(t)$.

★ **Exercice 8** — Résoudre $t^3 y'' + ty' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ via une solution polynomiale.

★ **Exercice 9** — On considère l'équation différentielle :

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0 \quad (\mathcal{E})$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$ de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur un intervalle ne contenant pas $-1/2$.

★ **Exercice 10** — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - \alpha xy' + \alpha y = 0 \quad (\mathcal{E}_\alpha)$$

1. Déterminer les solutions de $(\mathcal{E}_2)$ développables en séries entières. Obtient-on toutes les solutions de $(\mathcal{E}_2)$?
2. Soient un entier $n \geq 3$ et φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = (1-X^2)P'' - 3XP'$.
 - a) Montrer que $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
 - b) Montrer que φ est diagonalisable et en déduire toutes les solutions polynomiales de l'équation $(\mathcal{E}_3)$.
3. Résoudre l'équation $(\mathcal{E}_1)$ à l'aide du changement de variable $x = \sin t$.

★ **Exercice 11** — On considère l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1 \quad (\mathcal{E})$$

Intégrer $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $z = x^2 y$. Étudier le recollement en 0.

★ **Exercice 12** —

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation :

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

★ **Exercice 13** — Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + y(-x) = \cos(x) - x$.

★★ **Exercice 14** — Pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on note L_u l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ défini par $L_u(y) = y' + uy$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2\operatorname{th}(x)y' + y = 0$ à l'aide de $L_u \circ L_v$ pour deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ bien choisies.

★★ **Exercice 15** — *Équations différentielles linéaires homogènes à coeff. constants*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ où $a_n \neq 0$. On note $\mathcal{S}_P$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation $P(D)(y) = 0$ où D désigne l'opérateur de dérivation $f \mapsto f'$.

1. a) Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux.
On pose $P = P_1 \times \dots \times P_r$. Montrer que $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{S}_{P_r}$.
b) En déduire les solutions de l'équation $y^{(3)} + 2y'' + y' + 2y = 0$.
2. Montrer par récurrence que pour $P = (X - \alpha)^n$, les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha t} Q(t)$ avec $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
3. En déduire la forme générale des solutions pour $P \in \mathbb{C}[X]$ quelconque.

⊗ Partie B – Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

★ **Exercice 16** — Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = 3x - y + 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = x + 8y - 2 \\ y'' = 2x + y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - y - z + t \\ y' = -x + y - z + t \\ z' = -x - y + z + t \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 2x + 3y + 3z + 1 \\ y' = 3x + 2y + 3z + t \\ z' = 3x + 2y + 3z \end{cases}$$

★★ **Exercice 17** — Montrer, sans les déterminer, que les trajectoires du système différentiel suivant sont planes :

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$$

Généraliser aux systèmes linéaires de la forme $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 0$.

★★★ **Exercice 18** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que toute solution X de l'équation $X' = AX$ vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$.

★★ **Exercice 19** — On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si et seulement si les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de norme constante.

⊗ Partie C – Étude qualitative de solutions

★ **Exercice 20** — Soit $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

★ **Exercice 21** — Soient f et g deux solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$, où $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) < g(t)$.

★ **Exercice 22** — Soient $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et T -périodiques. On considère l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$.

1. Montrer qu'une solution φ est T -périodique si et seulement si $\varphi(0) = \varphi(T)$.
2. Montrer que pour toute solution φ , la suite $(\varphi(nT))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone ou constante.

★ **Exercice 23** — Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer qu'une solution de l'équation $y'' + a(x)y = 0$ est impaire ssi elle vérifie $y(0) = 0$.

★★ **Exercice 24** — *Comportement en $+\infty$ (1)*

1. Soit $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = b$ ont une limite nulle en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) + f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

★★ **Exercice 25** — *Comportement en $+\infty$ (2)*

1. Donner la forme intégrale des solutions de $y'' + 3y' + 2y = u$ où $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. En déduire que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$, il en est de même de toutes ses solutions.

★★ **Exercice 26** — Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) \geq 0$.

1. Exprimer la solution générale de l'équation $y'' + y = b(x)$, où $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) + f(x) \geq 0$.

★ **Exercice 27** — Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $y' = ay + b$. Montrer l'équivalence entre :

- (i) tous les éléments de $\mathcal{S}$ sont bornés (ii) a et b sont intégrables

★★★ **Exercice 28** —

1. Soient $A \in \mathbb{R}^+$, $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues. On suppose que pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t) dt. \text{ Montrer que si } x \geq 0, f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right).$$

Soit $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $x''(t) + a(t)x(t) = b(t)$, où a et b sont des applications continues sur $\mathbb{R}^+$, b et $t \mapsto t a(t)$ étant de plus supposées intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que pour tout $t \geq 1$,

$$x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u) du + \int_1^t (t-u)b(u) du$$

3. On pose $y(t) = \frac{|x(t)|}{t}$ pour $t \geq 1$. Montrer l'existence de $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 1$, $y(t) \leq K \exp\left(\int_1^t u|a(u)| du\right)$.

★★★ **Exercice 29** — *Théorème de séparation de Sturm*

On considère l'équation différentielle $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ où $p, q \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

- Montrer que les zéros d'une solution non nulle sont simples et isolés.
- En déduire qu'une solution non nulle admet un nombre fini de zéros sur tout segment. On pourra introduire une suite de zéros distincts de φ .
- Soient désormais f et g deux solutions indépendantes et W le wronskien associé. Montrer que pour tous $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t p(x) dx\right)$.
- On suppose que f admet deux zéros consécutifs t_1 et t_2 , avec $t_1 < t_2$. Montrer que g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]t_1, t_2[$.

★★★ **Exercice 30** — *Formule de Liouville*

Soient I un intervalle et $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On note W le wronskien associé à un système fondamental de solutions de l'équation $X' = A(t)X$. Montrer que :

$$\forall t_0 \in I, \quad \forall t \in I, \quad W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(u)) du\right)$$