



VERSION ALLEGÉE

Pour éviter tout excès de technicité, certaines définitions utilisées dans ce chapitre sont un peu édulcorées par rapport à celles véritablement utilisées par les probabilistes. Elles sont cependant à notre programme telles que données ici.

I Le triplet fondamental

I-1 Cas des probabilités finies

I.1-a) Rappel de définition et propriétés élémentaires

Notation : Pour un ensemble Ω , on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$$



Remarque :

Si Ω est de cardinal fini n , on a $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$.



Définition (rappel)

Pour tout ensemble **fini** non vide Ω , on appelle *mesure (ou loi) de probabilité* p sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- i ■ $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq p(A) \leq 1$
- ii ■ $p(\emptyset) = 0$; $p(\Omega) = 1$
- iii ■ Pour tout couple (A, B) d'éléments incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$p(A \sqcup B) = p(A) + p(B)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ est alors appelé *espace probabilisé*.

Étant donné un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, on rappelle également le vocabulaire suivant :

- on appelle Ω l'*ensemble fondamental* (ou l'*univers*).
- Un élément de Ω est appelé *épreuve* (ou événement fondamental).
- Un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelé *événement*.

? Exercice 1

Montrer que la condition $p(\emptyset) = 0$ de la définition est redondante.

Solution

On a $\Omega = \emptyset \sqcup \Omega$ une réunion d'ensembles incompatibles. Ainsi, on a

$$p(\Omega) = p(\emptyset) + p(\Omega)$$

Il suffit d'isoler $p(\emptyset)$ d'un côté de l'égalité pour obtenir directement

$$p(\emptyset) = p(\Omega) - p(\Omega) = 0$$

Propriété 1

On rappelle également que la propriété iii de la définition nous amène à un résultat plus général qui est le suivant :

Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont des ensembles deux à deux incompatibles, alors

$$p(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = p(A_1) + \dots + p(A_n)$$

■ Exemple 1 :

Une compagnie pétrolière dispose de 4 bateaux numérotés de 1 à 4. Les bateaux 3 et 4 sont plus récents. L'expérience est la suivante : pour faire un voyage, le compagnie choisit un des bateaux, avec une probabilité deux fois plus importante de choisir un bateau récent qu'un bateau ancien.

On modélise cette expérience par le triplet fondamental $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ suivant :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ p décrit par

i	1	2	3	4
$p(\{i\})$	a	a	$2a$	$2a$

où $a \in [0, 1]$. Pour trouver a , il nous suffit d'utiliser la propriété ci-dessus avec les 4 ensembles 2 à 2 incompatibles $A_i = \{i\}$ pour $i \in \Omega$. Ainsi :

$$a + a + 2a + 2a = p(A_1) + \dots + p(A_4) = p(A_1 \cup \dots \cup A_4) = p(\Omega) = 1$$

D'où

$$a = \frac{1}{6}$$

On peut également trouver de la même manière par exemple

$$p(\{1, 3\}) = p(\{1\}) + p(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$



Remarque :

Généralement, à des fins de simplicité d'écriture, on préfère utiliser l'abus de notation $p(i)$ à la place de $p(\{i\})$ si $i \in \Omega$.

Première problématique : connaît-on Ω ?

Pour une expérience donnée, on a deux possibilités pour l'univers :

- **on connaît à l'avance** exactement l'ensemble des résultats possibles (*par exemple, un lancé de dé à 6 faces. On peut énoncer clairement un univers $\Omega = \{1, \dots, 6\}$*)
- **on ne connaît pas à l'avance** l'ensemble des résultats (*par exemple, si on étudie l'ensemble des effets secondaires d'un médicament*)

Deuxième problématique : Peut-on se contenter d' Ω fini ?

Faisons une expérience simple :

On lance une pièce de monnaie et on s'arrête dès que l'on obtient "Pile". On s'intéresse aux résultats exacts de l'expérience.

On peut par exemple représenter chaque épreuve par un mot constitué des lettres P et F qui représentent respectivement l'obtention d'un pile ou d'un face. FFFP représenterait donc par exemple l'obtention de trois "faces" avant l'obtention du premier Pile, tandis que le mot infini FFFF... représente le fait de ne jamais tomber sur Pile.

On a donc au final un univers **infini** ! (à méditer).

$$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, \dots\} \cup \{FFFF \dots\}.$$

Peut-on construire un univers fini pour décrire l'ensemble des résultats de cette expérience ? Non. (à méditer là aussi).

Troisième problématique : peut-on appliquer la définition d'une mesure de probabilité finie à Ω infini ?

La réponse à cette question est là aussi : **Non**. Pour plusieurs raisons :

- 1 ■ Avec la définition "basique" donnée jusque là, on ne peut pas calculer la probabilité d'une réunion infinie d'événements.
- 2 ■ Se contenter d'utiliser comme ensemble d'événements $\mathcal{P}(\Omega)$ se révèle en réalité trop complexe pour l'étude des probabilités en général dans le cas notamment où $\Omega = \mathbb{R}$ qui contient trop de sous-ensembles "compliqués" (et HP) qu'il est inutile de prendre en compte lors de calculs de probabilités.

Cet aspect technique de construction d'univers sera très brièvement évoqué cette année. (cf ci-après.)

I-2 Cas général : mesure de probabilité

Convention d'écriture :

Pour des facilités d'écriture, les indices de la réunion/somme dans les différents théorèmes et résultats à partir de maintenant sont pris à partir de 0 ou 1), mais rien n'empêche évidemment d'utiliser en pratique une indexation différente.

I.2-a) Réunions et intersections "dénombrables"

Définition

Les opérateurs de réunion et d'intersection infinie ont le même sens que dans le cadre fini :

- 1 ■ L'événement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ correspond à "*au moins un des événements A_n se produit.*"
- 2 ■ L'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ correspond à "*tous les événements A_n se produisent.*"

Une réunion (resp. intersection) avec des indices dans $\mathbb{N}$ s'appelle une *réunion* (resp. *intersection*) *dénombrable*.

Exemple 2 :

Si on lance une pièce jusqu'à obtention de Pile et qu'on modélise l'univers par $\Omega = \mathbb{N}$ où :

$$i \in \Omega \text{ désigne } \begin{cases} \text{le premier Pile arrive au rang } i & \text{si } i > 0 \\ \text{on n'obtient jamais Pile} & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

On peut dire par exemple :

★ Cas 1 : $\Omega = \mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \{i\}$ (ici $\{i\}$ 2 à 2 incompatibles - "ou" exclusifs)

"Soit on n'obtient jamais pile (événement $\{0\}$), soit on tombe pour la première fois sur Pile à un moment i ."

★ Cas 2 : $\Omega = \mathbb{N} = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{+\infty} \underbrace{[1; i]}_{\text{Pile arrive au plus tard au moment } i}$ ("ou" non exclusifs)

"Soit on n'obtient jamais pile (événement $\{0\}$), soit il existe i tel que Pile arrive au plus tard au moment i ."

Exemple 3 :

Dans l'expérience précédente, si on prend les événements A_i : "On tombe sur Pile entre le 5^{ème} et le n ^{ème} lancer" alors

$$\bigcap_{n=5}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n=5}^{+\infty} [5; n] = \{5\}$$

c'est-à-dire : "on tombe sur Pile au 5^{ème} lancer."



Remarque :

Dans le cas des “ou” **exclusifs** (événements 2 à 2 incompatibles), on souhaitera évidemment pouvoir faire le même type de calcul que pour les probabilités finies :

$$p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$$

mais pour l’instant, la définition de probabilités finies ne nous le permet pas. (On peut faire seulement des sommes finies !)

I.2-b) Notion de tribu

Dans le cas de certains univers infinis, il est nécessaire d’affiner la notion de “ $\mathcal{P}(\Omega)$ ”. Voyons dans quel cadre on peut être confronté à ce type de circonstances dans l’exemple ci-dessous :

■ Exemple 4 :

On lance deux fléchettes sur une cible carré lointaine de côté 1 mètre. On mesure la distance entre les deux impacts, ce qui nous amène alors à considérer l’univers $\Omega = [0, \sqrt{2}]$ (unité en mètre). On a donc un univers qui n’est ni fini, ni $\mathbb{N}$, **mais un intervalle de $\mathbb{R}$** .



MAIS OÙ EST LE PROBLÈME ?

C’est que dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, il y a des éléments qui sont vraiment (oui vraiment) très compliqués ! (exemples hors programme)

On veut éviter de les utiliser et ne se contenter que de choses a peu près raisonnables : (intervalles, réunions, intersections, complémentaires, etc...)

On a donc besoin de **généraliser** $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ par un outil plus restrictif dans un cadre général.



Définition

Soit Ω un ensemble fondamental et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une **tribu** sur Ω si

- $\Omega \in \mathcal{T}$,
- $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire, (i.e. si $A \in \mathcal{T}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$.)
- $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable : (i.e. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{T}$, on a $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$.)

Propriété 2

Si $\mathcal{T}$ est une tribu, alors elle est également stable par intersection.

Démonstration : admise. $\square$

■ Contre-Exemple(s) :

- 5 ■ Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, l’ensemble $\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{1, 2\}\}$ n’est pas une tribu.
- 6 ■ Si $\Omega = \mathbb{Z}$, l’ensemble $\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots\}$ n’est pas une tribu.

■ Exemples :

Soit Ω un ensemble fondamental.

- 7 ■ $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu.
- 8 ■ $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu quelquesoit Ω .
- 9 ■ Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, une tribu sur Ω peut être $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
- 10 ■ Si $\Omega = \mathbb{N}$, une tribu sur Ω peut être $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1\}$



Définition

Pour tout ensemble Ω et toute tribu $\mathcal{T}$ sur Ω , on appelle le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ un **espace probabilisable** (ou **espace mesurable**).

I.2-c) La tribu des Boréliens

Commentaires :

Si l’ensemble fondamental est $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$, au vue des raisons évoquées précédemment, on choisit donc généralement une tribu plus petite que $\mathcal{P}(\Omega)$:



Définition et Proposition

Si l’univers $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, il existe une tribu ayant les propriétés suivantes :

- elle contient l’ensemble $\mathcal{C} = \{[a, b] \mid a, b, \in \Omega\}$
- il n’existe pas de tribu plus petite contenant $\mathcal{C}$

On la note $\mathcal{B}(\Omega)$. On l’appelle **tribu des boréliens** sur Ω .

Concrètement :

On peut montrer (**et on va simplement retenir**) que cette tribu fait tout ce dont on a besoin dans $\mathbb{R}$: elle contient les intervalles de tout type (fermés, bornés, semi-ouverts) leurs réunion, intersections, complémentaires, etc... .

De plus, conformément à ce qui a évoqué en début de paragraphe, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$! (démonstration toujours HP)

Commentaires :

| Tout d'abord, on récupère le vocabulaire des espaces finis :

 Définition

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$,

- on appelle Ω l'*ensemble fondamental* (ou l'*univers*).
- Un élément de Ω est appelé *épreuve*.
- Un élément de $\mathcal{T}$ est appelé *évènement*.
- Pour un évènement $A \in \mathcal{T}$, l'évènement $\bar{A} = A^c$ est appelé *évènement contraire de A*.
- Si deux évènements A et B sont disjoints, alors ils sont dits *incompatibles*.

Commentaires :

| Ensuite on généralise la notion de mesure de probabilités :

 Définition

Étant donné un ensemble Ω et une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω , on appelle *mesure de probabilité* p sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $p : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- 1 ■ $\forall A \in \mathcal{T}$, on a $0 \leq p(A) \leq 1$
- 2 ■ $p(\emptyset) = 0$; $p(\Omega) = 1$
- 3 ■ *axiome de Σ -additivité* :

Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles de $\mathcal{T}$, la

série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n)$ est convergente et $p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ est alors appelé *espace probabilisé*.



Remarque :

- Si on a $A_n = \emptyset$ (et donc $p(A_n) = 0$) pour tout $n > N$, on obtient alors, **sous réserve d'incompatibilité des A_n** : $p\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = \sum_{n=0}^N p(A_n)$.
- Si on suppose Ω fini, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et que l'on se donne $A_n = \emptyset \forall n \geq 2$ (et donc $p(A_n) = 0$) dans la troisième hypothèse, on **retrouve la définition d'une mesure de probabilité finie** donnée en première année.



Remarque :

- **L'ordre dans lequel on fait la somme des $p(A_n)$ n'importe pas.** On rappelle en effet que nous avons vu dans le chapitre sur les séries que si la série est convergente et de termes positifs (ce qui est le cas ici), on pouvait sommer dans n'importe quel ordre.
- **Si les A_n sont bien incompatibles**, la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n)$ est en réalité une **hypothèse redondante**. En effet, on sait qu'elle est forcément convergente car c'est une série à termes positifs et majorée (par 1) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n p(A_k) = p\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq 1$$

Cette année, les tribus utilisées seront, soit $\mathcal{P}(\Omega)$ (probabilités finies ou discrètes), soit la tribu des boréliens (probabilités à densité.)

Commentaires :

| Observons maintenant l'émergence de nouveaux types d'évènements :

■ Exemple 11 :

Choisissons au hasard un nombre dans l'intervalle $[0, 1]$. Intuitivement, réfléchir à la probabilité possible de l'évènement A : "Obtenir 0" ainsi qu'à l'évènement : B : "Obtenir un nombre contenu dans l'intervalle $]0, 1[$ ".

On ne démontrera pas encore les choses ici mais on peut imaginer que si on généralise (**de manière totalement scandaleuse !**) le principe d'équiprobabilité vu dans le cadre des probas finies, on "devrait avoir"

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}} = \ll \frac{1}{\infty} \gg = 0$$

Cette formule étant, pour des raisons évidentes, **en réalité inutilisable dans ce cas**, on voit néanmoins mal quel pourrait être une autre probabilité pour cet évènement (et ceci pourra d'ailleurs être montré proprement un peu plus tard dans l'année.) **On aurait donc un évènement de probabilité nulle, mais qui n'est pas impossible !**

Pour ce qui est de $p([0, 1])$, on écrira plutôt :

$$p([0, 1]) = p([0, 1]) - (p(0) + p(1)) = 1 - 0 = 1$$

On a donc un évènement de probabilité 1, mais qui n'est pas l'univers !



Définition

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$,

- Si $A \in \mathcal{T}$ est tel que $A \neq \emptyset$ et $p(A) = 0$, on dit que A est *négligeable*.
- Si $A \in \mathcal{T}$ est tel que $A \neq \Omega$ et $p(A) = 1$, on dit que A est *presque sûr*.

I-3 Cohérence avec les propriétés connues

 **Remarque :**
Les propriétés ci-dessous, déjà connues dans le cadre des probabilités finies se généralisent aisément à toutes les mesures de probabilités. (à traiter en exercice)

Propriété 3

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et des événements $A, B \in \mathcal{T}$.

- Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \sqcup B) = p(A) + p(B)$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- Si $A \subset B$, on a $p(A) \leq p(B)$ et $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$.
- Pour A et B quelconques, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

? Exercice 2

Montrer que

$$p(A \cup B \cup C) = (p(A) + p(B) + p(C)) - (p(A \cap B) + p(A \cap C) + p(B \cap C)) + p(A \cap B \cap C)$$

II Probabilités conditionnelles : les "si"

II-1 Définition et exemples de calculs

Commentaires :

On rappelle que, dans le cas des probabilités finies, on sait que la probabilité d'un événement A connaissant déjà la réalisation d'un autre événement B tel que $p(B) \neq 0$ peut s'écrire (sous réserve de définition) $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Cette formule peut s'interpréter grace de l'arbre de probabilité suivant :



Heureusement, on peut étendre cette notion à l'ensemble de toutes les mesures de probabilités.

Définition

Pour tout événement B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, vérifiant $p(B) \neq 0$ et $A \in \mathcal{T}$, on appelle **probabilité de A sachant B** et on note $p_B(A)$ la probabilité de l'événement A "sachant que B est déjà vérifié".

Propriété 4

Avec les notations de la définition précédente, l'application

$$p_B : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+; A \mapsto p_B(A)$$

est bien une mesure de probabilités et on a

$$p(B)p_B(A) = p(A \cap B)$$

Démonstration : admise. $\square$

! CONFUSION

On voit bien sur la formule qu'il ne faut pas confondre la probabilité "conditionnelle" avec la probabilité de l'intersection !

Exemples classiques de Probabilités conditionnelles :

Mots de l'énoncé	Exemples	Formule
Sachant que	Déterminer la probabilité qu'il pleuve ce matin $\underbrace{\hspace{10em}}_{B: \text{il pleut ce matin}}$ sachant que j'ai pris mon parapluie $\underbrace{\hspace{10em}}_A$	$P_A(B) = ?$
Si	J'emmène mon parapluie $\underbrace{\hspace{10em}}_A$ s'il pleut ce matin $\underbrace{\hspace{10em}}_B$ avec une proba de 0.8	$P_B(A) = 0.8$

et d'autres mots encore : **en supposant que, en imaginant que, ...**

Exemples classique d'intersections :

Mots de l'énoncé	Exemples	Formule
et	Déterminer la probabilité qu'il pleuve ce matin $\underbrace{\hspace{10em}}_{B: \text{il pleut ce matin}}$ et que j'ai pris mon parapluie $\underbrace{\hspace{10em}}_A$	$P(A \cap B)$
"succession"	On tire sans remise 2 boules dans une urne. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule rouge $\underbrace{\hspace{10em}}_{A: \text{boule rouge en 1}^{\text{er}}}$ puis une boule noire boule noire en 2^{ème}	$P(A \cap B)$

et bien d'autres encore...

Commentaires :

L'erreur fréquemment commise est de penser qu'il faut systématiquement utiliser la formule $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{p(B)}$ pour calculer la probabilité conditionnelle, ce qui est faux. Voyons ci-dessous deux exemples de situation. Dans la première, on utilise la formule, la deuxième non.

? Exercice 3

Un couple a deux enfants. Calculer la probabilité qu'ils aient 1 fille sachant qu'ils ont au moins un garçon.

Solution

En travaillant sur l'univers $\Omega = \{(\underbrace{i}_{1^{\text{er}} \text{ enfant}}, \underbrace{j}_{2^{\text{ème}} \text{ enfant}}) \in \{G, F\}^2\}$ avec la probabilité uniforme et en posant

A : « ils ont une fille » B : « ils ont au moins un garçon »

On a

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(\{(F, G), (G, F)\})}{p(\{(F, G), (G, F), (G, G)\})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

? Exercice 4

On dispose de 2 urnes appelées U_1 et U_2 . L'urne U_2 contient autant de boules rouges que de boules bleues.

On lance maintenant un dé équilibré à 6 faces. On note RP : « le résultat est pair ».

Si le résultat est pair, on tire une boule dans l'urne U_2 . On regarde la couleur de la boule obtenue. Décrire p_{RP} c'est-à-dire : donner l'univers, la tribu associée ainsi que la loi de probabilité p_{RP} .

Solution

On sait qu'on a tiré un nombre pair et qu'on tire alors une boule dans l'urne U_2 qui contient autant de boules rouges que bleues. Ainsi, on peut poser

$\Omega = \{R, B\}$ où R désigne le fait de tirer une boule rouge et B une boule bleue.

Alors Ω est fini. On peut donc poser comme tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Étant donné qu'il y a le même nombre de boules rouges et bleues, la probabilité p_{RP} est alors l'équiprobabilité.

Commentaires :

En bref, lors d'expériences menées par étapes, il est souvent utile (et nécessaire) de déterminer la probabilité conditionnelle par d'autres moyens que la formule, par exemple par une analyse directe de la problématique en se plaçant directement dans le cadre du "sachant que". De plus, dans ce cadre, la probabilité conditionnelle sert justement à calculer les $P(A \cap B)$:

? Exercice 5

Dans le cadre de l'exercice précédent, calculer la probabilité d'avoir un résultat pair pour le dé et d'obtenir une boule rouge.

Solution

On cherche $p(RP \cap \{R\})$:

Par probabilités conditionnelles, comme $p(RP) \neq 0$, on a

$$p(RP \cap \{R\}) = p(RP)p_{RP}(\{R\})$$

Or, on peut calculer par équiprobabilité sur les résultats du dé que

$$p(RP) = \frac{1}{2}$$

$$p_{RP}(\{R\}) = \frac{1}{2}$$

D'où

$$p(\text{« avoir un résultat pair pour le dé et obtenir une boule rouge »}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Propriété 5

Pour tout événement $A, B \in \mathcal{T}$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, on a

$$p(A \cap B) = p_B(A)p(B) \quad \text{si } p(B) \neq 0 \quad \text{ou} \quad p(A \cap B) = p_A(B)p(A) \quad \text{si } p(A) \neq 0$$

Notation

Si $p(B) = 0$, par convention, on va poser **$p_B(A)p(B) = p(A \cap B) = 0$** .

en effet, si $p(B) = 0$, comme $A \cap B \subset B$, on a également $p(A \cap B) = 0$. On généralise donc la formule $p_B(A)p(B) = p(A \cap B)$ dans ce cadre.

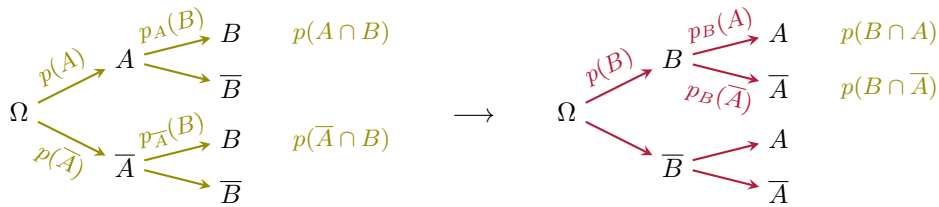
Les formules établies par la suite seront toutes écrites suivant cette convention.

II-2 Formules de Bayes

Après la généralisation de la formule des probabilités conditionnelles la formule de Bayes se généralise donc également sans modification :

Commentaires :

Rappelons que cette formule vise en quelque sorte à "inverser" les étapes, c'est-à-dire par exemple que si l'arbre de gauche ci-dessous est connu, on peut déterminer l'arbre de droite. (Cette formule n'a pas nécessité d'être apprise par coeur. Elle découle immédiatement des autres propriétés connues.)



Théorème 6 Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé. Pour tout $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $p(A), p(B) \neq 0$, on a que

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\bar{A}}(B)p(\bar{A})}$$

II-3 Formule des probabilités composées

Théorème 7 Formule des probabilités composées

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$. On a alors

$$p(A_1 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1)p_{A_1}(A_2)p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots p_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration : exercice. $\square$

? Exercice 6

On dispose d'une urne contenant n boules dont 5 boules blanches. On tire sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ?

Solution

On note B_i l'événement "obtenir une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage". On cherche donc $p(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$: D'après la formule des probabilités composées,

$$p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1)p_{B_1}(B_2)p_{B_1 \cap B_2}(B_3)$$

Or, par équiérobabilité des tirages, on a

$$p(B_1) = \frac{5}{n} \quad ; \quad p_{B_1}(B_2) = \frac{4}{n-1} \quad ; \quad p_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{3}{n-2}$$

D'où

$$p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2}$$

Commentaires :

Cette formule permet de démontrer des résultats que l'on considère souvent comme intuitifs, alors qu'ils ont en réalité (cf formule) une justification bien précise.



Remarque :

Cette formule est souvent utilisée quand les événements $A_1, \dots, A_n$ sont donnés dans un ordre chronologique décroissant :

$$A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_1.$$

i.e.

A_n entraîne A_{n-1} , qui entraîne $A_{n-2}, \dots$ qui entraîne A_1

La formule s'écrit alors

$$p(A_n) = \underbrace{p(A_1)p_{A_1}(A_2) \dots p_{A_{n-1}}(A_n)}_{\text{du plus gros au plus petit}}$$

? Exercice 7

On reprend l'exemple précédent. On cherche toujours la probabilité d'obtenir 3 boules blanches, mais avec des événements chronologiques. On pose A_i : "les i première boules sont blanches."

Solution

On cherche donc $p(A_3)$ et on sait que

$$A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$$

D'après la formule des probabilités composées pour des événements chronologiques,

$$p(A_3) = p(A_1)p_{A_1}(A_2)p_{A_2}(A_3)$$

Or, par équirobabilité des tirages, on a

$$p(A_1) = \frac{5}{n} \quad ; \quad p_{A_1}(A_2) = \frac{4}{n-1} \quad ; \quad p_{A_2}(A_3) = \frac{3}{n-2}$$

D'où

$$p(A_3) = \frac{5}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2}$$

III Indépendance

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$.

Commentaires :

Instinctivement un événement A est indépendant de B , si la réalisation de A ne dépend pas de celle de B . EN CONSEQUENCE : une restitution sous forme de formule serait donc la suivante :

$$p_B(A) = p(A)$$

D'un autre côté, cette formule a l'air non symétrique entre A et B (ce qui est contraire à l'instinct. Heureusement, ce n'est qu'une impression.

Propriété 8

On se donne $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $p(A), p(B) \neq 0$. Alors on a

$$p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A)p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Démonstration :

Soient $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $p(A), p(B) \neq 0$. Alors on a

$$p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p(A \cap B)/p(B) = p(A) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

De même, on pourra écrire

$$\square \quad p(A \cap B) = p(A)p(B) \Leftrightarrow p(B \cap A)/p(A) = p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Définition

Étant donné $A, B \in \mathcal{T}$, on dit que A et B sont *indépendants* si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Remarque :

Toutes les propriétés vues en première année sur l'indépendance restent vraies. (Les relire et les redémontrer.)

INUTILE DE SYSTÉMATIQUEMENT SE LANCER DANS UN CALCUL !

La formule d'indépendance est un équivalent de la question instinctive :

"les deux événements s'influencent-ils l'un l'autre ?"

Ainsi, un peu de bon sens suffit souvent à affirmer les choses ...

■ Exemple 12 :

Prenons A : "Obtenir Face sur la pièce équilibrée que je lance." et B : "Il fait beau ce matin" n'ont clairement rien à voir l'un avec l'autre. Sous des conditions raisonnables de l'énoncé, on peut affirmer qu'il y a indépendance...

FAUX SEMBLANTS

Attention toutefois aux affirmations trop hâtives ! Les apparences sont parfois trompeuses si les événements sont liés à une même expérience. (Par exemple 2 considérations différentes faites sur un même lancer de 2 dés.)

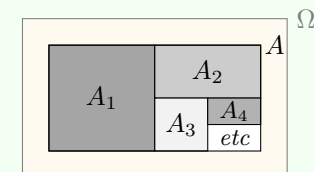
IV systèmes (quasi)-complets : les "ou" exclusifs

IV-1 Définition

Définition

Étant donné $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, $A \in \mathcal{T}$ un événement et $I \subset \mathbb{N}$. On dit que la famille $(A_k)_{k \in I}$ est un *système complet d'événements* (ou une partition) de A si :

- $A_k \in \mathcal{T}$ pour tout $k \in I$;
- les événements A_k sont 2 à 2 incompatibles ;
- $\bigsqcup_{k \in I} A_k = A$



Commentaires :

Pour un ensemble A , on est confronté à un système complet si on peut dire "ou" de manière exclusive et si on a listé toutes les possibilités.

La famille $(A_k)_{k \in I}$ dans $\mathcal{T}$ est donc un système complet d'événements de A si et seulement si :

- deux A_k distincts ne peuvent se produire en même temps
- l'ensemble des A_k forme toutes les possibilités pour obtenir A .

■ Exemples :

- 13 ■** Si on cherche le rang d'apparition du premier pile lors d'une série de lancers de pile ou face, on pose
- A_n : "Obtenir Pile la 1^{ère} fois au rang n " $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et A_0 : "Ne jamais obtenir Pile"
- Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de l'univers.
- 14 ■** Si $\Omega = \mathbb{N}$ et A l'ensemble des nombres pairs. Alors, en posant $A_n = \{2n\}$ pour tout entier n , on trouve que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de A .

NOTATIONS

Faire attention aux mélanges de notations. Le système complet est une **famille** d'événements (on peut en faire une liste), **pas une réunion** !

Schématiquement : $\{A_k\}_{k \in I} \neq \bigcup_{k \in I} A_k$

Celui de gauche peut s'apparenter à des "pièces détachées", alors que la réunion (à droite) serait plutôt par exemple la voiture montée au complet.

- Remarque :**
- Par défaut, si on parle d'un "système complet" sans préciser de quel événement " A " il est issu, c'est qu'on parle d'un système complet de l'univers Ω .

Définition

Étant donné $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, on dit que la famille $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un **système quasi-complet d'événements** de $A \in \mathcal{T}$ si :

- $A_k \in \mathcal{T}$, $A_k \subset A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;
- les événements A_k sont 2 à 2 incompatibles;
- $p\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(A_k) = p(A)$.

■ Exemple 15 :

On imagine à nouveau qu'on lance une pièce de monnaie indéfiniment avec

$$\forall n \geq 1, \quad A_n = \text{« Obtenir Pile la 1^{ère} fois au } n^{\text{ième}} \text{ lancer »}$$

Montrons que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **quasi complet**. Les événements étant 2 à 2 incompatibles, il reste à montrer que $p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$:

On sait par σ -additivité que

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(A_n)$$

Notons maintenant F_k : « obtenir Face au $n^{\text{ième}}$ lancer ». Alors pour $n \geq 1$:

$$A_n = F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n}$$

Les lancers étant infinis quoi qu'il arrive, les résultats à chaque lancer sont indépendants. Ainsi,

$$p(A_n) = p(F_1) \dots p(F_{n-1}) p(\overline{F_n})$$

Or, par équiprobabilité, au $i^{\text{ème}}$ lancer, on a une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'obtenir Pile ou Face. Ainsi,

$$p(A_n) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{n-1 \text{ fois}} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Maintenant :

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Le système est donc bien quasi-complet... !

Remarque :

Dans l'exemple précédent, avec la notation A_0 : "Ne jamais obtenir Pile", comme $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est complet on peut en déduire que A_0 est négligeable :

$$p(A_0) = 1 - p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 - 1 = 0$$

? Exercice 8

Réfléchir à ce qui change dans la démonstration de cet exemple si on suppose que l'on s'arrête dès l'obtention du premier Pile.

Solution

Les événements ne sont maintenant plus indépendants. En effet, si par exemple pile au premier lancer ($\overline{F_1}$), alors on ne peut pas obtenir face (F_2) au deuxième, puisque le jeu s'est arrêté. ... Il faut donc utiliser la formule des probabilités composées :

$$p(A_n) = p(F_1)p(F_1)_{F_1} \dots p(F_1 \cap \dots \cap F_{n-2})(F_{n-1})p(\overline{F_n})$$

Mais fort heureusement, les probabilités sont les mêmes!!



Remarque :

La définition inclut les système quasi-complets finis.

En effet, il suffit de prendre $A_k = \emptyset$ pour tout $k > N$. $\sum_{k=0}^{+\infty} p(A_k)$ devient alors une somme finie $\sum_{k=0}^N p(A_k)$.

■ Exemple 16 :

On choisit un nombre au hasard entre 0 et 1 (0 et 1 inclu.).

On associe à cette expérience l'ensemble fondamental $\Omega = [0; 1]$ et la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens.

Comparons les systèmes suivants :

$$A_1 = [0; 1/2[\text{ et } A_2 = [1/2; 1] \quad (1)$$

et

$$B_1 =]0; 1/2[\text{ et } B_2 = [1/2; 1] \quad (2).$$

Le système (1) est clairement un système complet pour $\Omega = [0; 1]$, car

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = \Omega$$

Mais même si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$,

$$B_1 \cup B_2 =]0; 1] \neq \Omega$$

Donc le système (2) n'est **pas complet**. Néanmoins, la probabilité de tomber **exactement** sur 0 est nulle. (Pour l'instant, il faut se contenter de l'intuition, nous prouverons ceci un peu plus tard.) Ainsi, on a en fait

$$p(B_1 \cup B_2) = 1 - p(\overline{B_1 \cup B_2}) = 1 - p(\{0\}) = 1$$

Le système (2) est donc quasi-complet.

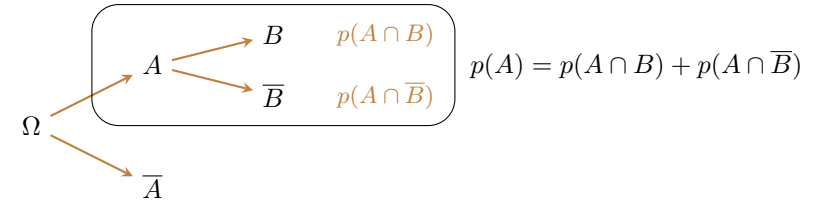
Commentaires :

En observant les définitions, on voit qu'un système complet est un cas particulier de système quasi-complet, toutes les propriétés suivantes sont donc valables dans les deux cadres...

IV-2 Formule(s) des probabilités totales

Commentaires :

Si la formule des probabilités composées consiste à suivre **une branche** d'un arbre de probabilités, la formule des probabilités totales ci-dessous consistera plutôt à analyser la décomposition suivant **ses extrémités**.



Voyons par étape comment ceci se généralise à des systèmes infinis :

Propriété 9 (Découpage par système quasi-complet)

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Soit B un événement quelconque. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un **système (quasi)-complet d'événements** de Ω (ou de A tel que $B \subset A$), alors

$$p(B) = p\left(B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(B \cap A_n).$$

Démonstration :

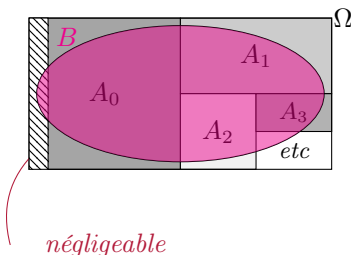
Posons C le complémentaire dans Ω de $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Alors $\Omega = C \sqcup \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ puis

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap \Omega) = p\left(B \cap C \sqcup \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \\ &= p\left((B \cap C) \sqcup \left(B \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\right) = p(B \cap C) + p\left(B \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

Or, $B \cap C \subset C$, d'où $0 \leq p(B \cap C) \leq p(C) = 0$ et donc $p(B \cap C) = 0$.

On en déduit que

$$\square \quad p(B) = p\left(B \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(B \cap A_n)$$



? Exercice 9

On lance une pièce de monnaie indéfiniment. Calculer la probabilité de l'événement B : « le deuxième Pile arrive juste après le premier. »

Solution

Nous avons démontré tout à l'heure qu'en posant $A_n = \text{« Obtenir Pile au } n^{\text{ième}} \text{ lancer »}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le système $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est quasi complet. Ainsi, par découpage en système quasi-complet, on a

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap A_n)$$

Or, en reprenant les notations utilisées dans la démonstration de " $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est quasi complet" à la page 9, on trouve que

$$B \cap A_n = F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n} \cap \overline{F_{n+1}}$$

D'où la encore par indépendance,

$$p(B \cap A_n) = p(F_1) \dots p(F_{n-1}) p(\overline{F_n}) p(\overline{F_{n+1}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Et donc

$$p(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(intuitif et logique. Après un pile arrive un autre pile avec « 1 chance sur 2 » !)

■ Exemple 17 :

Suivant une étude (non contractuelle), on sait que la probabilité p_k pour une famille d'avoir k enfants est telle que

$$p_0 = p_1 = a, \quad p_k = (1 - 2a)2^{-(k-1)} \quad \forall k \geq 2.$$

On part du principe que la probabilité d'avoir une fille ou un garçon est la même. Quelle est dans ce cas la probabilité d'avoir exactement 2 garçons sur l'ensemble des enfants eus par le couple ?

Notons G l'événement "avoir deux garçons" et E_n : "La famille a n enfants." Alors le système $\{E_n\}_{n \geq 2}$ est un système complet de l'événement G et on a alors

$$P(G) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(G \cap E_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} P_{E_n}(G) P(E_n)$$

Or $P_{E_n}(G) = P(\text{"Il y a deux garçons et } n - 2 \text{ filles"})$ L'événement ci-dessus est l'ensemble des permutations de la liste $\underbrace{GG \underbrace{F \dots F}_{n-2 \text{ fois}}}$.

De plus, chacune de ces listes est de probabilité égale à $\frac{1}{2^n}$ par indépendance. Ainsi, comme on a $\binom{n}{2}$ permutations possibles,

$$P_{E_n}(G) = \binom{n}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{2^n}$$

D'où

$$P(G) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{2^n} (1-2a)2^{-(n-1)} = (1-2a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{4^n} = (1-2a) \frac{1}{4^2} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3}$$

i.e.

$$P(G) = \frac{8}{27}(1-2a)$$

Théorème 10 (Formule des probabilités totales)

Étant donné $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, et $(A_0, \dots, A_n, \dots)$ un système quasi-complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Alors, pour tout événement $B \in \mathcal{T}$, on a

$$p(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{A_n}(B) p(A_n) \quad (\text{avec } p_{A_n}(B) p(A_n) = 0 \text{ si } p(A_n) = 0)$$

Démonstration :

On sait déjà, d'après le découpage en système quasi-complet démontré précédemment, que

$$p(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(B \cap A_n) \quad (*)$$

Or, pour tout $k = 0, \dots, n$, on a $p(B \cap A_n) = p_{A_n}(B) p(A_n)$. On réinjecte dans (*) et c'est terminé. $\square$

v Variables aléatoires

Rappel : Dans le cadre des variables aléatoires **finies**, en première année, avec un univers Ω fini, nous avons défini une variable aléatoire simplement comme une application

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nous avons alors régulièrement utilisé des notations de type « $X = i$ » pour désigner l'événement "la variable aléatoire X prend la valeur i " (pour $i \in \mathbb{R}$), ou « $X \in B$ » pour désigner l'événement "la variable aléatoire X prend ses valeurs dans B " (pour B un ensemble de réels).

Rappelons que cela signifie la chose suivante :

$$(X = i) = \{w \in \Omega \mid X(w) = i\} \quad (\text{tous les événements élémentaires qui donnent } i \text{ par } X)$$

$$(X \in B) = \{w \in \Omega \mid X(w) \in B\} \quad (\text{tous les événements élémentaires qui donnent } B \text{ par } X)$$

■ Exemple 18 :

On lance deux dés et on appelle S la somme obtenue. Pour l'univers

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \llbracket 1; 6 \rrbracket\}$$

et

$$S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; (i, j) \mapsto i + j$$

l'événement « $S = 4$ » correspond à

$$(S = 4) = \{w \in \Omega \mid S(w) = 4\} = \{(1, 3); (2, 2); (3, 1)\}$$

De même « $S \leq 3$ » correspond à

$$(S \leq 3) = \{w \in \Omega \mid S(w) \leq 3\} = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1)\}$$

et à y regarder de plus près, « $S \in]2, 3[$ » correspond à

$$(S \in]2, 3[) = \emptyset$$

V-1 Définition générale

Commentaires :

Dans le cadre futur des variables construites sur un univers étant un intervalle I de $\mathbb{R}$, il faut adapter la théorie à la présence d'une tribu potentiellement différente de $\mathcal{P}(\Omega)$:

✍ Définition

On appelle variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ toute fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ soit un espace probabilisé
2. pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(X \leq a) \in \mathcal{T}$ (i.e. " $(X \leq a)$ est un événement".)

Commentaires :

Grâce aux propriétés des tribus, beaucoup d'autres événements « $X \in B$ » seront également des événements bien définis :

Propriété 11

Si X est une variable aléatoire et I un intervalle ou une réunion finie d'intervalles, alors $(X \in I)$ est un événement.

Il est **HP** de vous demander de vérifier qu'une fonction est une variable aléatoire. La seule chose que vous aurez donc à savoir c'est que toute fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ à peu près raisonnablement définie sera une variable aléatoire.

■ Exemple 19 :

Pour Ω fini, toute fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ quelquesoit la probabilité p .

Commentaires :

L'intérêt d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est généralement :

- de "résumer" les choses à observer et d'aller à l'essentiel.
- et/ou de simplifier les calculs de probabilités en "se débarrassant" de l'univers d'origine souvent inutile, sur lequel il était peut être difficile d'effectuer des calculs.

V-2 Loi d'une v.a. / fonction de répartition

■ Exemple 20 :

Effectuons une infinité de lancers d'une pièce équilibrée.

- **Résultats complets : l'univers** qui détaille l'ensemble des faces obtenues à chaque lancer.

Modélisation possible : $\Omega = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid u_n \in \{P, F\}\}$

où un événement élémentaire y est une suite (infinie) de F et de P , par exemple

$$(F, F, P, F, P, \dots)$$

Problème : La probabilité de chaque événement élémentaire est nulle. (à méditer) On ne peut donc pas généraliser le calcul de probabilité d'événement A comme pour les variables finies $P(A) = \sum_{w \in A} \underbrace{P(w)}_{=0} !!!$

- En revanche, si on s'intéresse maintenant seulement à

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}; w \mapsto \begin{cases} \text{le rang d'apparition du premier P s'il apparait au moins 1 fois} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Les "nouveaux" événements étudiés sont du type $(X = n)$ où les n sont les valeurs de X (cf. section support ci-après.)

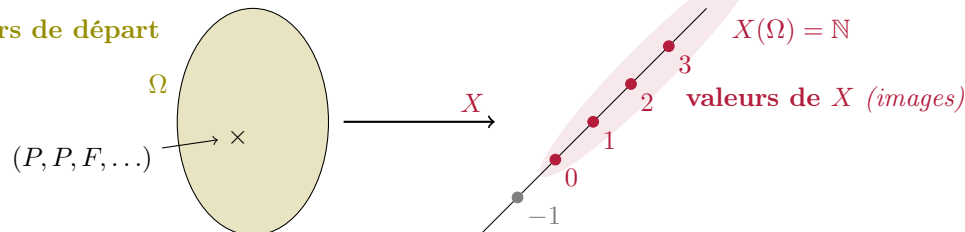
et on peut établir leur probabilité en se servant d'autres outils que le calcul proposé ci-dessus comme nous l'avons déjà fait dans l'exemple sur le système complet p.9 :

$$P(X = n) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Commentaires :

Si on décompose l'exemple précédent :

univers de départ



De manière générale, pour toute fonction, l'ensemble de ses valeurs est défini par :

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = \text{"toutes les valeurs que prend } X\text{"}$$

Notons alors que, comme il s'agit de l'ensemble de toutes les valeurs possibles, on a

$$P(X \in X(\Omega)) = P(\text{"antécédents de } X(\Omega)\text{"}) = P(\Omega) = 1.$$

Exemples :

- 21 ■ Si on regarde le nombre de boules rouges que l'on peut obtenir en sélectionnant de manière simultanée 10 boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 6 boules blanches, on a

$$X(\Omega) = \llbracket 4, 6 \rrbracket$$

- 22 ■ Sur l'exemple précédent (lancer infini d'une pièce et X rang d'apparition du premier Pile), on a

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

- 23 ■ Si X est le résultat du choix d'un nombre dans l'intervalle $[0, 1]$ alors trivialement

$$X(\Omega) = [0, 1]$$

Commentaires :

Étant donné la possibilité d'avoir des événements négligeables, on aimerait se laisser un peu plus de souplesse. On aimerait par exemple, dans l'exemple de la première apparition de Pile, pouvoir se débarrasser du cas $X = 0$ qui est négligeable :



Définition

Si X est une v.a. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, on appelle *support de X* et on note $\text{Supp}(X)$ tout sous-ensemble de $X(\Omega)$ tel que $P(X \in \text{Supp}(X)) = 1$.

Commentaires :

Dit "simplement" cela correspond à l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable X où on ne se préoccupe pas de ce qui est négligeable. On va donc voir qu'un support n'est pas forcément défini de manière unique (cf ci-dessous)

Exemples :

- 24 ■ Un support trivial (et **maximum**!) pour toute variable aléatoire est $X(\Omega)$:

En effet, on vient de revoir plus haut que

$$P(X \in X(\Omega)) = 1.$$

- 25 ■ Sur la série infinie de lancers d'une pièce, si X est le rang d'apparition du premier Pile, comme $P(X \in \mathbb{N}^*) = 1$, on peut poser

$$\text{Supp}(X) = \mathbb{N}^*$$

- 26 ■ Si X est le résultat du choix d'un nombre dans l'intervalle $[0, 1]$ alors (sous-réserve d'admettre pour l'instant que 0 est de probabilité nulle), on a par exemple

$$\text{Supp}(X) =]0, 1]$$

mais il y a d'autres possibilités! En effet, si 0 est de probabilité nulle, il en va certainement de même pour 1, ainsi

$$\text{Supp}(X) =]0, 1[$$

Et on pourrait peut être en retirer encore d'autres (mais tout ceci arrivera un peu plus tard...)

- 27 ■ Si on regarde le nombre de boules rouges que l'on peut obtenir en sélectionnant de manière simultanée 10 boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 6 boules blanches, aucun élément de $\llbracket 4, 6 \rrbracket$ n'est de probabilité nulle. Ainsi, on ne peut rien retirer et on ne peut trouver de support plus petit que

$$\text{Supp}(X) = \llbracket 4, 6 \rrbracket$$

NOTATION TOLÉRÉE

Souvent, dans les ouvrages et au concours, les notions $X(\Omega)$ et $\text{Supp}(X)$ sont confondues. C'est un abus de notation qui est toléré. Néanmoins, dans ce cours, la différence sera faite systématiquement afin de ne pas commettre d'erreur de réflexion.

V.2-b) Loi d'une variable par fonction de répartition

? Question

| Déterminer la loi d'une variable aléatoire, c'est quoi ??

Commentaires :

Déterminer la loi d'une variable aléatoire, c'est faire un "résumé" de la variable suffisamment complet qui permet de calculer n'importe quelle probabilité sur la tribu.

- Dans le cas des variables finies : on sait qu'il suffit de déterminer ses valeurs (support), puis tous les $P(X = i)$ pour $i \in X(\Omega)$. Ceci permettait de calculer, pour tous les événements B ,

$$P(W \in B) = \sum_{i \in B} p(X = i)$$

- Dans le cas des variables à support non fini : comment les résumer de manière suffisante ? La fonction de répartition permettra d'apporter une réponse à la question de manière très générale (i.e. pour n'importe quel type de support). Nous pourrons ensuite détailler les techniques suivant les différents cas particuliers.



Définition

Étant donnée une variable aléatoire X , on appelle *fonction de répartition* de X la fonction

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ t &\mapsto P(X \leq t) \end{aligned}$$

■ Exemple 28 :

On choisit simultanément 10 boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 6 boules blanches. On note X le nombre de boules rouges obtenues et on note F la fonction de répartition de X . On cherche à déterminer $F(2), F(4), F(4.5), F(5), F(6)$

- ★ On a facilement que $F(2) = P(X \leq 2) = 0$ car l'événement est impossible.
- ★ A contrario, $F(6) = P(X \leq 6) = 1$ car c'est l'événement certain.
- ★ On a $F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 4)$ car il n'y a pas d'autre possibilité.
- ★ Comme les valeurs de X sont nécessairement entières, on a $F(4, 5) = P(X \leq 4.5) = P(X \leq 4) = F(4)$.
- ★ Pour la même raison, on a $F(5) = P(X \leq 5) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

Pour résumer après avoir fini les calculs (exercice) :

k	2	4	4.5	5	6
$P(X = k)$	0	$\frac{5}{22}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{22}$

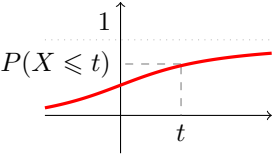


Remarque :

Dans la situation de l'exemple précédent, on a trouvé les valeurs de F seulement pour $t \in \{2, 4, 4.5, 5, 6\}$. Elle n'est donc pas entièrement déterminée. Il faudrait préciser l'ensemble de tous les $F(t)$ pour tous les t réels. On en est loin !

Commentaires :

La fonction de répartition est une fonction réelle tout à fait classique, qui n'est **pas** une variable aléatoire. Elle peut se dessiner à l'aide d'un graphique tout à fait habituel. Elle peut par exemple avoir cette allure là, (avec toujours des ordonnées clairement comprises entre 0 et 1) :



En abscisse : les valeurs de t pour tout t réel et en ordonnées, les probabilités associées. Nous allons commencer par voir quelques valeurs particulières (que nous aurons commencer à aborder dans l'exemple précédent.)

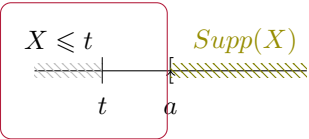
Propriété 12

Si $Supp(X) \subset [a, +\infty[$, alors $F_X(t) = 0 \quad \forall t < a$.
De même, si $Supp(X) \subset]-\infty, b]$, alors $F_X(t) = 1 \quad \forall t \geq b$

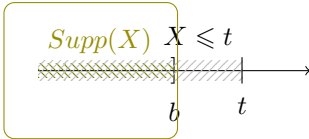
Et en français ?? :

- ★ Si les valeurs de X sont toutes supérieurs à a , alors, $X < a$ est négligeable, de même que tous les $X \leq t$ pour $t < a$.
- ★ Si les valeurs de X sont toutes inférieures à b , alors, $X \geq b$ ainsi que tout les $X \leq t$ pour $t \geq b$ sont certains.

Illustrations :



$X < a$ négligeable



$X \leq b$ de proba 1

Démonstration :

- Si $\text{Supp}(X) \subset [a, +\infty[:$

Soit $t < a$. Alors $(X \leq t) \subset (X < a) \subset (X \in \overline{\text{Supp}(X)})$. D'où

$$0 \leq P(X \leq t) \leq P(X < a) \leq P(X \in \overline{\text{Supp}(X)}) = 1 - P(X \in \text{Supp}(X)) = 1 - 1 = 0$$

et donc $P(X \leq t) = 0$.

- Si $\text{Supp}(X) \subset]-\infty, b] :$

Soit $t \geq b$. Alors $(X \in \text{Supp}(X)) \subset (X \leq b) \subset (X \leq t)$. D'où

$$1 = P(X \in \text{Supp}(X)) \leq P(X \leq b) \leq P(X \leq t) \leq 1$$

et donc $P(X \leq t) = 1$.

□

De plus, il vient rapidement une propriété élémentaire :

Propriété 13

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X . Alors F_X est une fonction croissante.