

Mathématiques

Corrigé du DS n°2

Exercice 1.

1. La proposition est vraie. Soit en effet $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $y = 2\sqrt{x}$: alors on a bien, comme $1 \leq 2$ et $\sqrt{x} \geq 0$,

$$\sqrt{x} \leq 2\sqrt{x} = y.$$

2. La proposition est fausse. En effet, si $y = -1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $y < \sqrt{x}$. C'est donc que $\neg B$ est vraie, donc B est fausse.

3. La proposition est fausse. Soit en effet $x \in \mathbb{R}_+$. En posant $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$, on a $\sqrt{x} > y$ (la justification est la même que pour la proposition de la question 1.). On a donc montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} > y.$$

C'est donc le contraire de la proposition qui est vraie, donc la proposition initiale bien est fausse.

4. La proposition est fausse. Soit en effet $y \in \mathbb{R}$. En posant $x = y^2 + 1$, on a $x \in \mathbb{R}_+$ et $0 \leq y^2 < y^2 + 1$, donc par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{y^2} < \sqrt{y^2 + 1}.$$

Or $\sqrt{y^2} = |y|$, donc

$$y \leq |y| < \sqrt{x} = \sqrt{y^2 + 1}.$$

On a donc montré que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} > y.$$

C'est donc le contraire de la proposition qui est vraie, donc la proposition initiale bien est fausse.

5. La proposition est fausse. En effet, en posant $x = -1$ et $y = 1$, on a $x \leq y$ et

$$\frac{1}{y} = 1 > -1 = \frac{1}{x}.$$

6. La proposition est fausse. En effet, en posant $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$, on a

$$ac = 0 \leq 0 = bc \quad \text{et} \quad a > b.$$

Exercice 2.

1. (a) D'après $(\star\star)$ utilisée avec $x = y = 0$, on obtient

$$f(0)f(0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0)^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0) = 0.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après $(\star\star)$ utilisée avec $y = x$, on a

$$f(x)^2 = \sqrt{x}f(2x) + \sqrt{x}f(2x) = 2\sqrt{x}f(2x),$$

ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- (c) Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, d'après la question précédente,

$$f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x) \quad \text{et} \quad f(y)^2 = 2\sqrt{y}f(2y),$$

ce qui donne, comme $\sqrt{x} \neq 0$ et $\sqrt{y} \neq 0$,

$$f(2x) = \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f(2y) = \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}}.$$

En réinjectant dans $(\star\star)$, on obtient

$$f(x)f(y) = \sqrt{y} \cdot \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} (\sqrt{xy} f(x)^2 + \sqrt{xy} f(y)^2).$$

(d) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors

$$(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y))^2 = yf(x)^2 + xf(y)^2 - 2\sqrt{xy}f(x)f(y) = 0,$$

d'après la question précédente.

(e) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. D'après la question 1.(d),

$$\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{y}f(x) = \sqrt{x}f(y).$$

Comme x et y sont strictement positifs, on peut diviser par $\sqrt{xy}$ et on obtient

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{f(y)}{\sqrt{y}}.$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on en déduit que la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(f) Première étape : Comme g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}.$$

Comme $f(0) = 0 = \alpha \cdot \sqrt{0}$, on a finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}.$$

Deuxième étape : On réinjecte ce résultat dans $(\star\star)$:

$$\alpha\sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{y} = \sqrt{y} \cdot \alpha\sqrt{2x} + \sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{2y},$$

i.e.

$$\alpha^2\sqrt{xy} = 2\alpha\sqrt{2xy}.$$

Pour $x = y = 1$, cela donne

$$\alpha^2 = 2\alpha\sqrt{2} \quad \text{i.e.} \quad \alpha(\alpha - 2\sqrt{2}) = 0.$$

Ainsi $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2\sqrt{2}$. Finalement, f est soit la fonction nulle, soit

$$f(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{x}.$$

2. Vérification : La fonction nulle est solution. Pour $f(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{x}$ et $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y) = \sqrt{y} \cdot 2\sqrt{4x} + \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{4y} = 2\sqrt{2x} \cdot 2\sqrt{2y} = f(x)f(y),$$

donc f est bien solution.

Exercice 3.

1. Première méthode : récurrence

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$S_n = n \cdot 2^{n+1} + 1.$$

Initialisation :

$$S_0 = \sum_{k=0}^0 (k+1)2^k = 1 = 0 \cdot 2^{0+1} + 1,$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)2^k = \sum_{k=0}^n (k+1)2^k + (n+2)2^{n+1} = n \cdot 2^{n+1} + 1 + (n+2)2^{n+1} = (2n+2)2^{n+1} + 1 = (n+1)2^{n+2} + 1.$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = n \cdot 2^{n+1} + 1.$$

2. Deuxième méthode : télescopage

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n (k+1)x^k.$$

(a) Simplification de $(1-x)f_n(x)$:

$$\begin{aligned}(1-x)f_n(x) &= (1-x) \sum_{k=0}^n (k+1)x^k \\&= \sum_{k=0}^n (k+1)x^k - \sum_{k=0}^n (k+1)x^{k+1} \\&= \sum_{k=0}^n kx^k + \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{i=1}^{n+1} ix^i \text{ avec } i = k+1 \\&= \sum_{k=0}^n x^k - (n+1)x^{n+1}.\end{aligned}$$

(b) Expression de $f_n(x)$ pour $x \neq 1$:

$$f_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^n x^k - (n+1)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

(c) Conclusion :

$$S_n = f_n(2) = 1 - 2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} = n \cdot 2^{n+1} + 1.$$

3. Troisième méthode : dérivation

On pose :

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Dérivée de g_n :

$$g'_n(x) = \sum_{k=0}^n (k+1)x^k.$$

(b) Expression alternative pour $x \neq 1$:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{k+1} = x \sum_{k=0}^n x^k = x \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x-x^{n+2}}{1-x}.$$

En dérivant :

$$g'_n(x) = \frac{(1-(n+2)x^{n+1})(1-x) + x - x^{n+2}}{(1-x)^2}, \quad x \neq 1.$$

(c) Conclusion :

$$S_n = g'_n(2) = \frac{(1-(n+2)2^{n+1})(1-2) + 2 - 2^{n+2}}{(1-2)^2} = n \cdot 2^{n+1} + 1.$$

Exercice 4.

On note pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

On pouvait aussi étudier la fonction f .

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = 2 + f\left(\frac{a}{b}\right),$$

D'après la question 1., on a alors

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: "Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. $\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2$."

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Si $a_1 \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 1,$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soient $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$.

On développe

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) + a_{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{n+1}} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + 1.$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence et en regroupant les deux sommes,

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_{n+1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{n+1}} \right) + 1.$$

Ce qui peut se réécrire à l'aide de la fonction f ,

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2 + \sum_{k=1}^n f\left(\frac{a_{n+1}}{a_k}\right) + 1.$$

Or, pour tout k ,

$$f\left(\frac{a_{n+1}}{a_k}\right) \geq 2 \quad \text{d'après la question 1.}$$

Donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2 + 2n + 1.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.