

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées – TD₅

Un peu d'algèbre linéaire sans réduction

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 = 0$ et $\text{rg}(A) = r$. Montrer que la matrice A et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 2 :

Soit D une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont distincts deux à deux. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et D commutent.

Montrer que A est diagonale.

Exercice 3 :

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre.

Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u est l'ensemble de polynômes en u .

Éléments propres d'une matrice, d'un endomorphisme (exercice théorique)

Exercice 4 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $0 \in \text{Sp}(f^p)$, alors $0 \in \text{Sp}(f)$
2. On suppose dans cette question que $f \in \text{GL}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\text{Sp}(f^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(f) \right\}.$$

3. On suppose dans cette question que E est de dimension finie. Montrer que 0 est valeur propre de f si, et seulement si, f n'est pas surjective.

L'équivalence est-elle encore vraie en dimension infinie ? Si oui, la démontrer, sinon, une implication est-elle vraie ?

Exercice 5 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul.
Montrer que λ est une valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, λ est valeur propre de $g \circ f$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que 0 est une valeur propre de $f \circ g$ si, et seulement si, 0 est valeur propre de $g \circ f$.
3. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si E n'est pas supposé de dimension finie.

Exercice 6 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \neq 0_E$, x est un vecteur propre de f . Montrer que f est une homothétie.

Exercice 7 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0$.

Montrer que 0 est valeur propre de A .

Exercice 8 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .
2. Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module inférieur à 1.

Exercice 9 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On considère P un polynôme annulateur de f . Montrer que toute valeur propre de f est une racine de P . Étudier la réciproque.

Éléments propres d'une matrice, d'un endomorphisme

Exercice 10 :

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'application φ qui à une fonction $f \in E$ associe son unique primitive qui s'annule en 0.

Déterminer le spectre de φ .

Exercice 11 :

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme D de E défini pour tout $f \in E$ par $D(f) = f''$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de D .

Exercice 12 :

Déterminer les éléments propres de $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 $A \mapsto A^\top$

Exercice 13 :

Soit $n \geq 2$.

1. Déterminer les éléments propres de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \alpha.J + \beta.I_n$.

Exercice 14 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme : $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $M \mapsto \text{tr}(A).M - \text{tr}(M).A$.

Polynôme caractéristique

Exercice 15 :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et M la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\chi_M = \chi_{A+B} \times \chi_{A-B}$.

Exercice 16 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que $\chi_A(A) = 0$.

Exercice 17 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé. Calculer $D_n(\theta) = \det(A + 2 \cos(\theta).I_n)$.
2. En déduire les valeurs propres de A .
3. Déterminer le sous-espaces propres de A .

Exercice 18 : démonstration du théorème de Cayley-Hamilton par les matrices compagnons

1. $P = a_0 + a_1 \times X + \dots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p \in \mathbb{K}[X]$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Montrer que $\chi_A = P$.

2. Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. L'objectif ici est de montrer que le polynôme caractéristique de f est annulateur de f . Autrement dit, $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit $u \in E$ quelconque. Montrons que : $(\chi_f(f))(u) = 0_E$.

- (a) Justifier que le résultat est clair lorsque $u = 0_E$.

Dans la suite, on suppose $u \neq 0_E$

- (b) Justifier l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.

- (c) Justifier l'existence de $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $a_0.u + a_1.f(u) + \dots + a_{p-1}.f^{p-1}(u) + f^p(u) = 0_E$.

Dans la suite, on note $P = a_0 + a_1 \times X + \dots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p$.

- (d) Montrer que P divise χ_f .

- (e) En déduire que $(\chi_f(f))(u) = 0_E$.

- (f) Conclure.

Exercice 19 :

Déterminer les sous-espaces stable de f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation (exercices pratiques)

Exercice 20 :

Diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 :

Diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 :

Diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 23 :

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 24 :

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 25 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A .
2. Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 26 :

Discuter selon les valeurs de $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{C}^6$ la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & d \\ 0 & 1 & c & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Exercice 27 :

Soient a, b et c trois réels non nuls. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ \frac{1}{a} & 0 & b \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a, b et c , la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 28 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 29 :

On note $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & (X^2 - 1) \times P'' + (2X + 1) \times P' \end{matrix}$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.

Diagonalisation (exercices théoriques)

Exercice 30 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A).A$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 31 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

Montrer que u est un projecteur si, et seulement si, $\text{tr}(u) = 1$.

Exercice 32 :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . On suppose que f possède n valeurs propres distinctes.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

Équations matricielles

Exercice 33 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -20 & -20 \\ 8 & -22 & -23 \\ -8 & 26 & 27 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Exercice 34 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 15 & 8 \\ -8 & 16 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$.

Exercice 35 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Applications de la réduction

Exercice 36 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les puissances de A .

Exercice 37 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 , v_0 et w_0 pour que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes.

Exercice 38 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} + 4u_{n+2} + 5u_{n+1} + 2u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A \times X_n$.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 , u_1 , u_2 et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 39 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A \times B = B \times A$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B .
2. Montrer que $B = P(A)$ où $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.