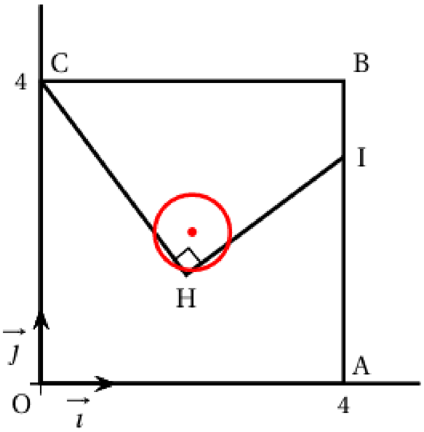
Exos type bac première générale spé maths

Ex 1

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère OABC est un carré de côté 4 ;
- On a A(4 ; 0), B(4 ; 4), C(0 ; 4), I(4 ; 3) ;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathscr{E}$ le cercle de centre D(2 ; 2) et de rayon 0,5.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC}$.

b. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$.

2. **a.** Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI.

b. Calculer la longueur OI.

c. En déduire que OH = 2,4.

3. **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH).

b. Justifier qu'une équation du cercle $\mathscr{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7{,}75 = 0.$$

c. Le point M(1,5 ; 2) appartient-il à l'intersection du cercle $\mathscr{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

Aide au calcul :
$0{,}5^2 = 0{,}25$
$1{,}5^2 = 2{,}25$
$2{,}5^2 = 6{,}25$
$5 \times 2{,}4 = 12$

Ex 2

On se place dans un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = x^2 - 5x + 4.$$

On note $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction g.

a. Étudier le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b. On considère un entier naturel n quelconque.
On note A_n le point de la courbe $\mathscr{P}$ d'abscisse n.
On note a_n le coefficient directeur de la droite (A_nA_{n+1}).
Justifier que pour tout entier naturel n, on a $a_n = 2n - 4$.

c. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

2. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0,5 ; 8]$ par

$$f(x) = x - 5 + \frac{4}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

a. Vérifier que pour tout réel x, de l'intervalle $[0,5 ; 8]$ on a $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. À l'aide de la question 1. a, déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$.
Montrer que tout réel x de l'intervalle $[0,5 ; 8]$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

.

d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$.

e. Réaliser un schéma de l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ sur lequel apparaîtront les résultats des questions **2.b** et **2.d**.

Ex 3

En 2020, une ville comptait 10 000 habitants.
On modélise l'évolution du nombre d'habitants de cette ville par la suite (u_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}08u_n - 300 \quad , n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 10\,000 \end{cases} ;$$

où u_n représente le nombre d'habitants pour l'année 2020+n.

1. Indiquer ce que représente u_1 et calculer sa valeur.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3750$.

a. Déterminer v_0.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 1{,}08v_n$.

c. En déduire la nature de la suite (v_n).

d. Pour tout entier naturel n, exprimer, v_n en fonction de n.

e. En déduire que pour tout entier naturel n,on a $u_n = 6250 \times 1{,}08^n + 3750$.

3. Le tableau ci-contre, extrait d'une feuille automatisée de calcul, a été obtenue par recopie vers le bas après avoir saisie la formule suivante dans la cellule B2 :

$$\boxed{= 6250*1,08\text{\^{}}A2 + 3750}$$

La municipalité envisage d'ouvrir une nouvelle école maternelle dès que la population atteindra 19 000 habitants.

La construction d'un tel établissement nécessitant deux ans, déterminer l'année à partir de laquelle la construction de l'école doit commencer.

	A	B
1	n	Un
2	0	10000
3	1	10500
4	2	11040
5	3	11623,2
6	4	12253,056
7	5	12933,30048
8	6	13667,96452
9	7	14461,40168
10	8	15318,31381
11	9	16243,77892
12	10	17243,28123
13	11	18322,74373
14	12	19488,56323
15	13	20747,64829
16	14	22107,46015
17	15	23576,05696
18	16	25162,14152
19	17	26875,11284
20	18	28725,12187
21	19	30723,13162

Aide au calcul :

$10\,000 - 3\,750 = 6\,250$;

$1{,}08 \times 4\,050 = 4\,374$;

$\dfrac{4\,050}{1{,}08} = 3\,750$;

$3\,750 \times 1{,}08 = 4\,050$.

Ex 4

Un village propose aux participants de la fête du sport deux épreuves : une randonnée et un cross. Il n'est pas possible de s'inscrire aux deux épreuves à la fois.

On dispose des informations suivantes :

- $90\,\%$ des participants ont choisi la randonnée, parmi eux, $5\,\%$ sont licenciés dans un club.
- $10\,\%$ des participants ont choisi le cross, parmi eux, $40\,\%$ sont licenciés dans un club.

Un journaliste interroge un participant au hasard.

On considère les évènements suivants :

R : « Le participant a choisi la randonnée »

L : « Le participant est licencié dans un club ».

1. Par simple lecture de l'énoncé, indiquer :

   a. La probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi la randonnée.

   b. La probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi le cross.

En prenant connaissance de ces deux probabilités, le journaliste estime que s'il choisit un participant parmi ceux qui sont licenciés dans un club, la probabilité qu'il ait effectué le cross sera largement supérieure à $50\,\%$.

L'objectif des questions suivantes est de vérifier si cette intuition est correcte.

2. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
3. **a.** Déterminer $P(R \cap L)$ puis interpréter cette probabilité dans le contexte de l'exercice.
   b. Vérifier que la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club est égale à $0,085$.
4. Le journaliste interroge un participant licencié dans un club. Déterminer la probabilité que ce participant ait choisi le cross.
   L'intuition du journaliste est-elle correcte ?
5. Les événements R et L sont-ils indépendants ? Justifier.

Ex 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sin(2x)$.

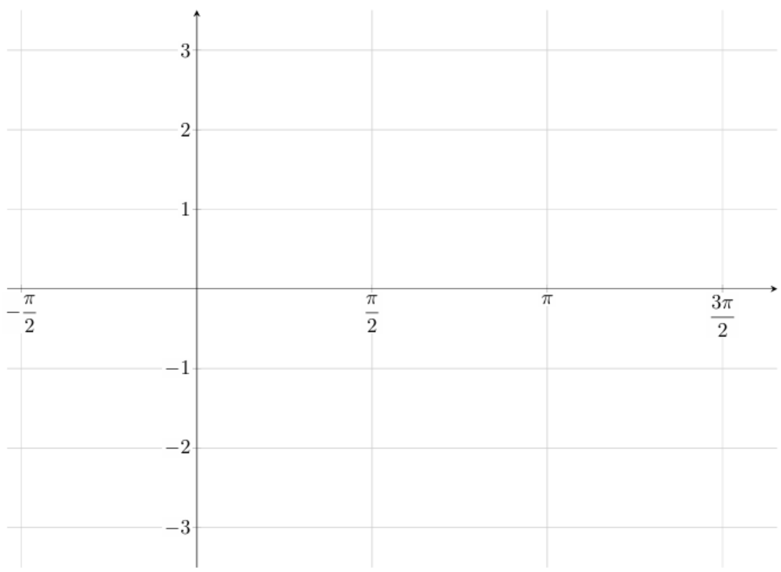
1. **a)** Montrer que la fonction f est impaire.
   b) Montrer que la fonction f est périodique de période π.

2. **a)** Justifier les valeurs exactes des images par f des nombres $0, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$.
   b) Remplir alors le tableau de valeurs suivant en arrondissant au dixième :

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$							

3. Expliquer comment peut-on obtenir la courbe de f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$ puis sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

4. Tracer la courbe de f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ dans le repère ci-dessous.

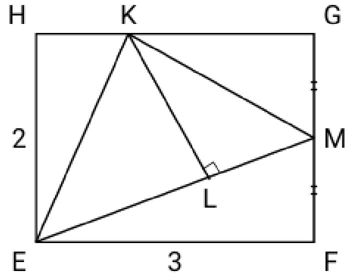


Ex 6

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

$EFGH$ est un rectangle avec $EH = 2$ et $EF = 3$. M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\vec{HK} = \frac{1}{3}\vec{HG}$.
L est le projeté orthogonal de K sur la droite (EM).



1. Montrer que $\vec{EK} \cdot \vec{EM} = 5$. On pourra s'aider de la relation de Chasles.
2. En écrivant le produit scalaire de $\vec{EK} \cdot \vec{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
   (a) La longueur EL.
   (b) Une mesure de l'angle $\widehat{KEM}$.

Partie B :

Soit x réel et $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé avec $A(x\,;-2)$, $B(x+4\,;x+3)$ deux points du plan.

1. Exprimer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ en fonction de x.
2. Déterminer pour quelles valeurs de x le triangle OAB est rectangle en O.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 6$.
   (a) Etudier ses variations sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire pour quelle valeur de x le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ est minimal.
   (c) Déterminer alors une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BOA}$.

Aide au calcul :

$$\cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{205}}\right) \approx 119^\circ$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right) \approx 30^\circ$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{65}}\right) \approx 150^\circ$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{205}}\right) \approx 61^\circ$$

Ex 7

Partie A : Modèle continu

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{3+x}{2x}$ et la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2$.

1. Montrer que trouver les abscisses des points d'intersection entre g et f revient à résoudre sur $\mathbb{R}^*$
$$\frac{-2x^2+5x+3}{2x} = 0$$
2. Donner les coordonnées de ces points d'intersection.
3. Dresser le tableau de signes de l'expression $\dfrac{-2x^2+5x+3}{2x}$.
4. En déduire les positions relatives de C_f et C_g, respectivement courbes représentatives de f et g.

Partie B : Modèle discret

On pose (u_n) suite définie sur $\mathbb{N}$ et (v_n) suite définie sur $\mathbb{N}^*$ respectivement par :

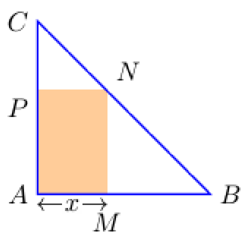
$$u_n = f(n) = n - 2 \qquad \text{et} \qquad v_n = g(n) = \frac{3+n}{2n}$$

1. Pour chacune de ces deux suites, réponde aux questions suivantes :
   (a) Calculer le terme d'indice 2 et le 4$^{\text{ème}}$ terme.
   (b) Donner l'expression réduite du terme d'indice $n+1$.
   (c) Etudier le sens de variation avec la méthode de votre choix.
2. On définit la suite (w_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = v_n - u_n$.

   Etudier le sens de variation de (w_n) à l'aide de la méthode de votre choix.

Ex 8

On considère un triangle ABC rectangle-isocèle en A tel que $AB = 10$.
Soit M un point du segment $[AB]$.
On note N le point de $[BC]$ et P le point de $[AC]$ tel que $AMNP$ soit un rectangle.
On pose $AM = x$ et on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle $AMNP$.



1. **a)** Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
b) Montrer que $\mathscr{A}(x) = -x^2 + 10x$.

2. **a)** Justifier le signe du trinôme $-x^2 + 10x - 9$ sur $\mathbb{R}$.
b) En déduire les positions du point M pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit supérieure ou égale à 9.

3. Déterminer les positions du point M pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit exactement égale à 10% de l'aire du triangle ABC.

4. Déterminer la forme canonique de la fonction $\mathscr{A}$. En déduire son tableau de variations.

5. Justifier la position du point M pour laquelle l'aire de $AMNP$ est maximale.

Exos type bac première générale spé maths

Ex 9

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à $0,0001$ près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont $1\,\%$ est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans $95\,\%$ des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans $85\,\%$ des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

- M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
- $\bar{M}$ l'évènement : « l'animal est sain » ;
- T l'évènement : « le test est positif » ;
- $\bar{T}$ l'évènement : « le test est négatif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,158$.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   On note X la variable aléatoire qui correspond au coût engagé pour un animal subissant le test.

   (a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (b) Déterminer $P(X = 100)$. Interpréter le résultat.
   (c) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   (d) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat.
   (e) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

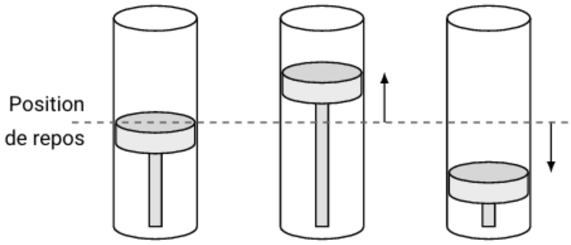
Ex 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{12x+5}}{x^3}$.

a) Montrer qu'une expression de la dérivée de f est : $f'(x) = \dfrac{(12x-3)e^{12x+5}}{x^4}$.
b) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$ (justifier).
c) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$. Donner les valeurs exactes des extremums le cas échéant.
d) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

Ex 11

Un piston dans un moteur oscille de haut en bas à partir d'une position de repos comme indiqué.



Le mouvement de ce piston peut être modélisé par la fonction h définie sur $\left[0\,;\,\frac{2\pi}{13}\right]$ par :

$h(t) = 0,05\cos(13t)$ où t est le temps en s, et $h(t)$ le déplacement, en m, de la tête de piston par rapport à la position de repos.

La vitesse de la tête du piston en fonction du temps est $v(t) = -0,65\sin(13t)$.

1. Déterminer les vitesses maximum et minimum du piston. Indiquer les instants où elles sont atteintes.
2. À quels instants la vitesse est-elle nulle ? Donner les positions du piston correspondantes.

Ex 12

1. Al Kashi

a. **Calculer un angle**
Soit MNP un triangle, avec $MN = 5$, $MP = 3$ et $PN = 7$.
Déterminer les mesures des trois angles du triangle (arrondir au degré).

b. **Calculer une longueur**
Soit EFG un triangle tel que $\widehat{G} = 35°$, $GE = 7$ et $GF = 10$.
Calculer la longueur EF (arrondir au dixième).

2. Equations de droites

Dans un repère orthonormé, la droite D a pour équation : $2x - 3y + 1 = 0$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de D et d'un vecteur normal $\vec{n}$ de D.
2. Déterminer une équation de la droite d parallèle à D et passant par le point $A(-2\,;\,1)$.
3. Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à D et passant par le point $B(2\,;\,0)$.

3. Cercles

Le repère est orthonormé.

1. Soit C le cercle de centre $E(-2\,;\,5)$ et de rayon 8.
   a. Donner l'équation du cercle C.
   b. Le point $F(5\,;\,1)$ est-il sur le cercle C ?
2. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 2 = 0$$

Ex 13

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie A

On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[-5\,;3]$ par :

$$P(x) = 2x^2 + x - 10.$$

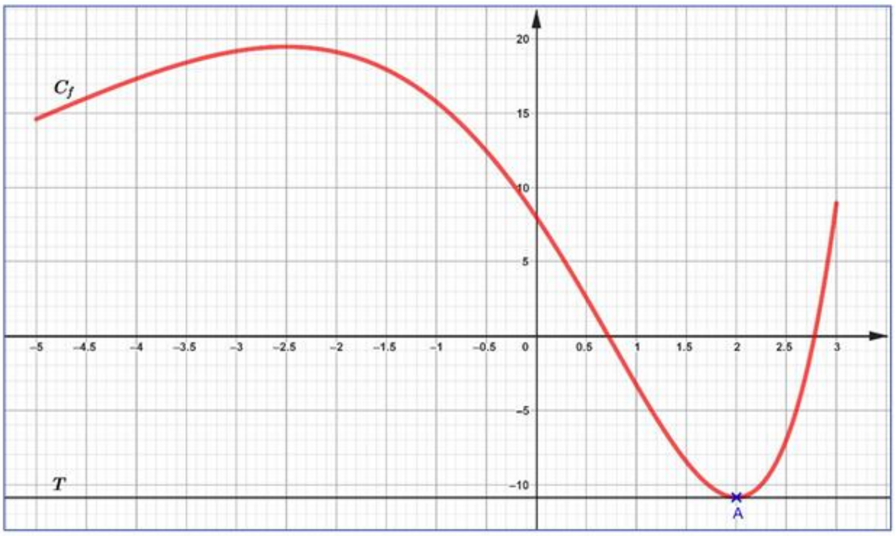
1. a. Déterminer les racines de P.

b. En déduire l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = P(x)$.

2. Etablir le tableau de signe de la fonction P sur l'intervalle $[-5\,;3]$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 3]$ dont on donne ci-dessous la courbe représentative C_f.



La tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 2 est horizontale.

1. Donner la valeur du nombre dérivé $f'(2)$.

2. Résoudre, avec la précision permise par le graphique, l'inéquation $f'(x) < 0$.

3. On sait que la fonction f a pour expression sur l'intervalle $[-5; 3]$

$$f(x) = (4x^2 - 14x + 8)\mathrm{e}^{0,5x}.$$

Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5; 3]$, on a

$$f'(x) = P(x)\mathrm{e}^{0,5x}.$$

4. En utilisant les résultats de la **partie A**, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-5; 3]$. (*Il n'est pas demandé de calculer les images*).

Ex 14

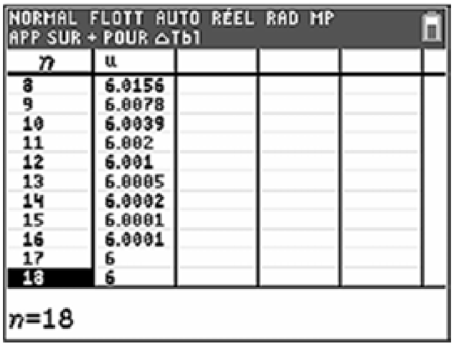
Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$.

1- Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2- Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 6$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = 6 + 4 \times 0{,}5^n$$

3- Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4- On donne ci-contre les valeurs de termes de la suite (u_n) affichées par une calculatrice.
Conjecturer le comportement des termes u_n lorsque n tend vers $+\infty$.


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

n	u
8	6.0156
9	6.0078
10	6.0039
11	6.002
12	6.001
13	6.0005
14	6.0002
15	6.0001
16	6.0001
17	6
18	6

n=18

Ex 15

Un jeu de 32 cartes est composé :

- 12 « figures » qui valent 5 points chacune ;
- 4 neuf, 4 huit et 4 sept qui valent 0 point chacune ;
- 4 dix et 4 as qui valent 10 points chacune.

1. On choisi une carte au hasard dans le jeu. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.

   (a) Compléter le tableau suivant (loi de probabilité de X).

Valeur k de X	0	5	10
$P(X = k)$			

   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable X.

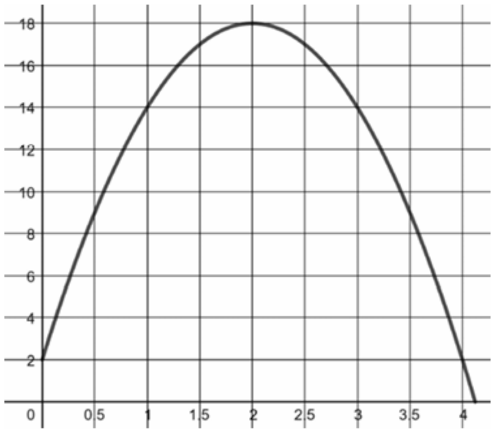
2. Gaspard choisit une carte au hasard, la remet dans le puis en reprend une autre au hasard. On note Y la somme des points obtenues.
   (a) Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre.
   (b) Quelles sont les valeurs prises par Y.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de Y.
3. Si la somme obtenue par Gaspard est supérieur ou égale à 15, Carla lui verse 3 euros. Sinon c'est Carla qui verse une somme, notée s, à Gaspard. Quelle doit être la valeur de la somme s pour que ce jeu soit équitable.

Ex 16

On lance une balle en l'air et on étudie la hauteur h de la balle en fonction du temps. On admet que tant que la balle est en l'air, sa hauteur en mètres est donnée par $h(t) = -4t^2 + 16t + 2$ où le temps t est exprimé en secondes.

L'expérience commence à $t = 0$.

1- On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction h.



Déterminer avec la précision permise par le graphique :
a) La hauteur initiale h_0 à partir de laquelle la balle est lancée ;
b) La hauteur maximale h_m atteinte par la balle ;
c) Le temps t_m au bout duquel la hauteur maximale est atteinte ;
d) Le temps t_1 au bout duquel la balle touche le sol.

2- On se propose de retrouver par le calcul les résultats de la première question.
a) Calculer la hauteur initiale h_0 à partir de laquelle la balle est lancée.

b) Calculer le temps au bout duquel la hauteur maximale t_m est atteinte.
En déduire la hauteur maximale h_m atteinte par la balle.

c) Calculer avec la précision permise par l'aide au calcul ci-contre, le temps t_1 au bout duquel la balle touche le sol.

Aide au calcul : $16^2 = 256$; $\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$ et $1{,}5\sqrt{2} \simeq 2{,}12$