

Feuille d'exercices 15

Polynômes

— **Exercice 1** ●○○ — **Equations sur des polynômes** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
2. $(P')^2 = 4P$.
3. $(X^2 + 1)P'' = 6P$

Idée : commencez par considérer le degré d'une solution P pour les deux premières, et le coefficient dominant pour le troisième.

— **Exercice 2** ●○○ — **Interpolation et contraintes** Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que

$$P(2) = 5, \quad P'(2) = 6, \quad P''(2) = -8, \quad P^{(3)}(2) = -18, \quad \text{et} \quad P(3) = 4.$$

Idée : On connaît P , ainsi que ses dérivées, au point 2. Quelle formule fait intervenir ces quantités ?

— **Exercice 3** ●●○ — **Une équation de polynôme** Soit $n \in \mathbb{N}$, existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P - P' = X^n$. Si oui, les déterminer.

— **Exercice 4** ●●○ — **Factorisation(s)**

Factoriser $(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Idée : Dans $\mathbb{C}$, vous savez factoriser $a^2 + b^2$.

— **Exercice 5** ●●○ — **Divisions euclidiennes**

Effectuer les divisions de A par B dans les cas suivants :

1. a. $A = -8X^5 - 10X^4 + 5X^2 - 4X + 8$ et $B = X^3 + 2X^2 - X + 1$.
b. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X + 1 - i$.
2. Donner le reste, et le quotient sous forme d'une somme :
a. $A = X^n$ et $B = X^2 - 1$ (avec $n \geq 2$).
b. $A = X^n$ et $B = (X - 1)^2$ (avec $n \geq 2$). On pourra utiliser le binôme ou bien une formule de Taylor-Young.
c. $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X - 1)^2$ (avec $n \geq 3$). On pourra utiliser la formule de Taylor.

— **Exercice 6** ●●○ — **Critère de divisibilité**

Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une CNS sur a et b pour que $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Idée : On peut calculer le reste dans la division euclidienne par $(X - 1)^2$.

— **Exercice 7** ●●● — **Encore un critère de divisibilité**

Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Idée : On peut penser au complexe j , qui vérifie $j^3 = 1$ (entre autre).

— **Exercice 8** ●●○ — **Polynômes interpolateurs de Lagrange**

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n + 1$ -uplet de nombres deux à deux distincts. On définit pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$L_i = \frac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

1. Déterminer, pour chaque $(i, i_0) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, ce que vaut $L_i(a_{i_0})$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

On pourra comparer ces deux polynômes sur les $n + 1$ points $(a_0, \dots, a_n)$.

— Exercice 9 ●●○ — Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer qu'il existe un unique polynôme P_n qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos nx = P_n(\cos x),$$

et l'étudier.

- Proposer trois polynômes P_0 , P_1 et P_2 , solutions du problème pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit R_n un autre polynôme solution.

a. Montrer que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad P_n(t) = R_n(t).$$

On pourra écrire $t = \cos(\arccos t)$.

b. En déduire que si P_n existe, il est unique.

Remarque : Ces deux questions ont des solutions très courtes. Vous avez pour contrainte de proposer une réponse courte (ou de passer votre tour).

- Pour $n \geq 1$, développer $\cos((n+1)x)$ et $\cos((n-1)x)$. En déduire une relation entre $\cos((n-1)x)$, $\cos nx$ et $\cos((n+1)x)$.
- Montrer par une récurrence forte que P_n existe et vérifie

$$\forall n \geq 1, \quad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

- En déduire le degré de P_n et son coefficient dominant.
- En étudiant l'équation $\cos(nx) = 0$, d'inconnue $x \in [0, \pi]$, donner l'ensemble des racines de P_n et le factoriser. Est-il scindé ?

— Exercice 10 ●●○ — Un polynôme déjà vu

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}.$$

Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Idée : Que dire de P'_n ?

— Exercice 11 ●○○ — Lever une indétermination

Soit la fonction polynomiale $P(x) = 2x^5 - 15x^4 + 28x^3 - 14x^2 - 6x + 5$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2}$.

— Exercice 12 ●●○ — Décomposition

Décomposer les polynômes suivants en produits de facteurs irréductibles :

- $X^5 - X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- $\sum_{k=0}^7 X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- $X^5 - 8X^4 + 9X^3 + 58X^2 - 164X + 120$ dans $\mathbb{R}[X]$ (calculer $P(2)$, $P'(2)$, voire...).
- $X^5 + 2X^4 - X^3 - 8X^2 - 10X - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

— Exercice 13 ●○○ — Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, et

$$P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

- Montrer que 1 est racine de P et préciser l'ordre de cette racine.
- Donner un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que P est divisible par $(X-1)^m$ mais pas par $(X-1)^{m+1}$.

— Exercice 14 ●●○ — Encore un critère de divisibilité

Soient a, b et c trois réels, et

$$P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 15$$

- Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P .
- Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P , et que P n'admette pas de racine réelle.

— Exercice 15 ●●● — Polynômes et racines de l'unité

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = (1+X)^n - (1-X)^n$.

- Calculer P_n pour $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
- Déterminer le coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré).
- P_n est-il divisible par X ?
- a. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si

$$\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^n = 1.$$

- résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$ (discuter selon la parité de n).
- Décomposer P_n dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

— Exercice 16 ●●○ — Polynôme annulateur et puissances d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. Déterminer, pour $n \geq 3$, le reste de la division euclidienne de X^n par P . On écrira le résultat sous la forme $a_n X + b_n$, avec a_n et b_n à expliciter.
3. Calculer A^n en utilisant la division euclidienne.

— Exercice 17 ●●○ — Décomposition en éléments simples

Décomposez en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. **a.** $F(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$. **b.** $F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.
2. Même question, sur $\mathbb{C}$:
a. $F(X) = \frac{2X}{X^2+1}$. **b.** $F(X) = \frac{1}{X^2+X+1}$.
3. $F(X) = \frac{X-2}{X^2(X-1)^2}$ (à chercher sous la forme $\frac{a_2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X+1}$).
4. $F(X) = \frac{1}{X^3+1}$ sur $\mathbb{R}$ (à chercher sous la forme $\frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$).
5. $F(X) = \frac{1}{X^4+X^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ (factoriser le dénominateur et s'inspirer de ce qui précède).