Division Euclidienne

dividende a, diviseur b, reste r, quotient q

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array} \iff a = b \times q + r$$

Sous forme d'égalité : $a = b \times q + r$

$a, b, q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$

Multiple et Diviseur

Multiple $\rightarrow a = b \times q \leftarrow$ Diviseurs

a, b et q sont des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Pour trouver Tous les Diviseurs d'un entier N il faut « tester » tous les entiers en partant de 1 jusqu'à $\sqrt{N}$.

PPCM : « Plus Petit Commun Multiple »

PGCD : « Plus Grand Commun Diviseur »

Rappel des critères de divisibilité :

- divisible par 2 : l'unité du nombre est 0, 2, 4, ou 8.
- divisible par 3 : la somme des chiffres du nombre est divisible par 3.
- divisible par 5 : l'unité du nombre est 0 ou 5.
- divisible par 10 : l'unité du nombre est 0.
- etc.

Un nombre divisible par 6 respecte les critères de 2 et 3, car : $6 = 2 \times 3$

Parité

entier pair : $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

entier impair : $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Nombres Premiers

« Un entier est premier s'il a uniquement 2 diviseurs : 1 et lui-même. »

Exemple : 7 est un nombre premier car la seule égalilté que l'on peut écrire est : $7 = 7 \times 1$.

Les 1ers nombres premiers sont : $2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Exercice 1 : Diviseurs et Nombres premiers

1. Donner la liste de tous les diviseurs de 18 (dans $\mathbb{N}$).
2. Le nombre 47 est-il premier ? Justifier votre démarche.
3. Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier votre réponse.
   a) 867
   b) 691
4. Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

$$150 \quad ; \quad 72 \quad ; \quad 400$$

Exercice 2 : Division euclidienne et calcul littéral

1. Effectuer la division euclidienne de 484 par 3.
2. On considère deux nombres a et b définis par $a = 8k$ et $b = 6k$, où k est un entier relatif.
   a) Justifier que a est pair.
   b) Justifier que b est un multiple de 3.
   c) La somme $a + b$ est-elle nécessairement un multiple de 7 ? Justifier.

Exercice 3 : Démonstrations de cours et propriétés

1. **Restitution de leçon :** Montrer que la somme de deux multiples de 11 est un multiple de 11.
2. Montrer que le produit de deux nombres pairs est un multiple de 4.

Exercice 4 : Vrai ou Faux (Contre-exemples)

Les propositions suivantes sont fausses. Justifiez-le en donnant un contre-exemple précis pour chacune d'elles.

1. « Le produit de deux entiers impairs consécutifs est pair. »
2. « Le produit d'un nombre décimal par 10 est un nombre entier. »

Exercice 5 : Problème (Approfondissement)

Un élève prétend : « Si $n \in \mathbb{N}$ et $n > 1$, alors le nombre $n^4 + 4$ n'est jamais un nombre premier. »

1. Vérifier cette hypothèse pour $n = 2$, $n = 3$ puis $n = 4$ en calculant la valeur de $n^4 + 4$ et en vérifiant si le résultat est premier.
2. Démontrer (en développant le membre de droite) que pour tout entier n :

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

3. À l'aide de la question précédente, expliquer pourquoi l'élève a raison.
4. Montrer que $1\,300$ n'est pas premier et donner deux de ses diviseurs, autres que 1 et lui-même.