

Exponentielle matricielle

Feuille d'exercices #16

★ **Exercice 1** — On pose $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer A^3 et en déduire le polynôme minimal de A .
2. En déduire $\exp(A)$.

★ **Exercice 2** — Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de A et diagonaliser A .
2. Calculer $\exp(A)$ à l'aide d'une division euclidienne de X^n par π_A .

★★ **Exercice 3** — Soient $t \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $\exp(tA)$ pour :

$$A = \begin{bmatrix} c-a & -a & -a \\ b & c & b \\ a & a & c+a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

★★ **Exercice 4** — Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{sinon} \end{cases}$

1. Diagonaliser M et calculer $\exp(M)$.
2. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} e^{tM}$ lorsque $a \geq 0$, $b > 0$ et $a + (n-1)b = 1$.

★ **Exercice 5** — Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + I_{2n} = 0$.

Déterminer les solutions de l'équation $X'(t) = AX(t)$.

★ **Exercice 6** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$. Donner des exemples de telles matrices. Déterminer toutes celles qui sont symétriques. Calculer $\exp(A)$.

★★★ **Exercice 7** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(A) = I_n$ si et seulement si A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

★★ **Exercice 8** — Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $P(X+1) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$.

En déduire $\exp(A)$, où $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est définie par $a_{i+1,i} = i$ si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, 0 sinon.

★★ **Exercice 9** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $\binom{p}{k} \frac{1}{p^k} \leq \frac{1}{k!}$.
2. En déduire par permutation de limites que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p = \exp(A)$.

★★ **Exercice 10** — Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$$

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\varphi(t) = A \exp(tB)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

★★ **Exercice 11** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Montrer que $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$. L'application $\exp$ est-elle polynomiale?
2. On suppose que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est un polynôme en $\exp(A)$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $[A, B] = 0$ ssi $[\exp(A), \exp(B)] = 0$.

★★ **Exercice 12** — Surjectivité de l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$

On cherche à résoudre l'équation $\exp(A) = B$ où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est fixée.

1. Montrer que l'équation admet des solutions seulement si $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer qu'on peut alors se ramener au cas où $B = \lambda(I_n + N)$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente.

On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $C(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} t^k N^k$ et $D(t) = \exp(C(t))$.

3. a) Montrer que D est dérivable et calculer sa dérivée.
b) Calculer $(I_n + tN)D''(t)$ et en déduire que $\exp(C(1)) = I_n + N$.
4. En déduire que l'exponentielle est une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.
5. *Application 1* – Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = A^p$. Le résultat subsiste-t-il si $B \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$?
6. *Application 2* – Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

★★ **Exercice 13** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme minimal est $X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Montrer qu'il existe $u_0, u_1, u_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} = u_0(t)I_n + u_1(t)A + u_2(t)A^2$$

Sont-elles uniques?

2. Trouver un système différentiel satisfait par u_0, u_1 et u_2 .
Exprimer alors e^{tA} en fonction de t, I_n, A, A^2 .

★ **Exercice 14** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA) = \sum_{j=1}^p e^{\lambda_j t} \prod_{k \neq j} \frac{A - \lambda_k I_n}{\lambda_j - \lambda_k}$.

★★★ **Exercice 15** — On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathfrak{D}$ ssi il existe une famille libre $\mathcal{B} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{Vect}(\mathcal{B})$ est stable par $D : y \mapsto y'$. On pose $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(D)$.

1. Montrer que si M est semblable à N , alors M vérifie $\mathfrak{D}$ ssi N vérifie $\mathfrak{D}$.
2. Montrer que si M possède n valeurs propres distinctes, alors M vérifie $\mathfrak{D}$.
3. On suppose désormais que M vérifie $\mathfrak{D}$. Prouver l'existence de $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{xM^\top} \cdot Y_0 = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}$$

4. En déduire, à l'aide d'un produit scalaire, que $\mathbb{R}^n = \text{Vect}_{k \in \mathbb{N}} \left((M^\top)^k Y_0 \right)$.

★★★ **Exercice 16** — Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre :
 - a) pour tout $t \geq 0$, les coefficients de e^{tA} sont positifs;
 - b) pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, $a_{i,j}$ est positif.
2. On suppose ces conditions vérifiées et que les composantes des vecteurs X_0 et $B(t)$ sont positives, où $B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
Montrer qu'il en est de même de la solution du système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $X(0) = X_0$.

★★ **Exercice 17** — *Formule de Baker-Campbell-Hausdorff*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B commutent avec $[A, B] = AB - BA$.

1. Donner un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de matrices A, B vérifiant la propriété ci-dessus sans que $[A, B] = 0$.
2. Montrer, en dérivant, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $[\exp(-tA), B] \exp(tA) = t[B, A]$.
3. En dérivant $\exp(-tB) \exp(-tA) \exp(t(A+B))$, montrer que :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B) \exp([B, A]/2)$$