

Correction devoir surveillé n°2 type EML

Exercice 1. d'après EML 2020

On définit, pour tous réels a et b , $M(a, b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. (a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Tout d'abord :

$$\begin{aligned} E &= \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \{a \cdot M(1, 0) + b \cdot M(0, 1) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(M(1, 0), M(0, 1)) \end{aligned}$$

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

La famille $(M(1, 0), M(0, 1))$ est :

- génératrice de E d'après le point précédent,
- libre car uniquement constituée de deux vecteurs (de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$) non colinéaires.

On en déduit que $(M(1, 0), M(0, 1))$ est une base de E .

$$\dim(E) = \text{Card}((M(1, 0), M(0, 1))) = 2 \quad \boxed{\dim(E) = 2}$$

- (b) On remarque :

$$M(1, 0) \times M(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $M(1, 0) \in E$ et $M(0, 1) \in E$,

$$M(1, 0) \times M(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin E.$$

L'ensemble E n'est donc pas stable par produit.

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**

La matrice $M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale. On en déduit que $M(0, 0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**

Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a, 0)$.

(a) Calculons A^2 .

On remarque tout d'abord : $A = a \cdot M(1,0)$. Ainsi :

$$A^2 = (a \cdot M(1,0)) \times (a \cdot M(1,0)) = a^2 \cdot (M(1,0))^2$$

Or :

$$(M(1,0))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(1,0)$$

Finalement : $A^2 = a \cdot A$.

On en déduit : $A^2 - a \cdot A = O_4$. Ainsi, le polynôme $Q(x) = x^2 - ax$ est un polynôme annulateur de A.

(b) D'après la question précédente, $Q(x) = x^2 - ax = x(x - a)$ est un polynôme annulateur de A. D'où : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, a\}$. Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{0, a\}$ et 0 et a sont les deux valeurs propres possibles de A.

La matrice A possède une ligne de 0 donc A n'est pas inversible.

On en déduit que 0 est bien une valeur propre de A.

Déterminons $E_0(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

Soit $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$X \in E_0(A) \iff AX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \iff a \cdot M(1,0)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \iff M(1,0)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \quad (\text{car } a \neq 0) \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + t = 0 \\ x + t = 0 \\ x + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{ x = -t \}$$

On en déduit que 0 est bien valeur propre de A et que : $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

La famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est : génératrice de $E_0(A)$ (d'après ce qui précède).

Démontrons que la famille $\mathcal{F}_0$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Supposons : } \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*). \quad (*) \iff \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}_0$ est libre.

Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_0(A)$.

Déterminons $E_a(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre éventuelle a.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_a(A) \iff (A - a \cdot I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x & - & y & & + & t & = & 0 \\ x & & & & + & t & = & 0 \\ x & & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & - & t & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = z \\ t = 0 \end{cases}$$

On en déduit : $E_a(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ En particulier, $E_a(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\}$ donc $a \in \text{Sp}(A)$.

Comme il n'y avait pas d'autre valeur propre possible, on peut conclure ici que $\text{Sp}(A) = \{0, a\}$.

La famille $\mathcal{F}_a = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est : génératrice de $E_a(A)$ (d'après ce qui précède). et libre car constituée unique-

ment d'un vecteur non nul.

Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_a(A)$.

- (c) D'après la question précédente, la concaténation des bases des sous-espaces propres forme une famille libre de quatre vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On en déduit que A est diagonalisable.

Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Plus précisément : la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A, la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, on a donc : $A = PDP^{-1}$.

4. Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.

Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0, b)$.

- (a) Déterminons le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4. Tout d'abord :

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{car } b \neq 0)$$

la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre donc finalement : $\text{rg}(B) = 1$.

$$\text{Ensuite : } \text{rg}(B - b \cdot I_4) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \\ b \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(car $b \neq 0$)

= 3 (car la famille précédente est libre)

$$\text{rg}(B - b \cdot I_4) = 3$$

- (b) D'après la question précédente, $\text{rg}(B) = 1 < 4$.

Ainsi, B est non inversible et donc $0 \in \text{Sp}(B)$.

De plus, d'après le théorème du rang : $\dim(E_0(B)) + \text{rg}(B) = \dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})) = 4$

On en conclut que 0 est valeur propre de B et : $\dim(E_0(B)) = 3$.

D'après la question précédente, $\text{rg}(B - b \cdot I_4) = 3 < 4$.

Ainsi, $B - b \cdot I_4$ est non inversible et donc $b \in \text{Sp}(B)$.

De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim(E_b(B)) + \text{rg}(B - b \cdot I_4) = \dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})) = 4 \quad \text{On en conclut que } b \text{ est valeur propre de B et : } \dim(E_b(B)) = 1.$$

On peut aussi remarquer que la matrice B est triangulaire (inférieure). Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Cela permet de conclure directement :

$$\text{Sp}(B) = \{0, b\}$$

- (c) D'après la question précédente la concaténation des bases des sous-espaces propres forme une famille libre de 4 vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On en déduit que B est diagonalisable.

5. **Étude du cas** $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a, b)$.

On pose :

$$v_1 = (1, 1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminons $\ker(f)$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On note : $U = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$u \in \ker(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \iff M(a, b)U = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} ax + at = 0 \\ ax + at = 0 \\ ax + at = 0 \\ bx + by + bz + bt = 0 \end{cases} \quad \text{On divise par } a \text{ et } b \text{ non nuls, le système est équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = -z \end{cases}$$

On en déduit :

$$\ker(f) = \text{Vect}((-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0))$$

Ainsi, la famille $((-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0))$ est génératrice de $\ker(f)$ (d'après ce qui précède). et libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, en posant $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ et $v_4 = (0, -1, 1, 0)$, on obtient quela famille (v_3, v_4) est une base de $\ker(f)$.

$$\text{Finalement : } \dim(\ker(f)) = \text{Card}((v_3, v_4)) = 2$$

On en déduit aussi que $\left(V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\ker(M(a, b))$. On en déduit que

$$0 \text{ est une valeur propre de } M(a, b) \text{ et que } E_0(M(a, b)) = \text{Vect}(V_3, V_4).$$

- (b) Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

On a $\text{Card}(\mathcal{B}') = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ donc il suffit de prouver que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

Supposons : $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$ (*). (*) $\iff \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 =$

$$0_{\mathbb{R}^4} \iff (\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0, 0) \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \}$ (par remontées successives)

Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

On en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Déterminons la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

Dans la suite, on note :

$$V_1 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_4 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On calcule } M(a, b) \times V_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 3b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot V_1 + 3b \cdot V_2$$

on en déduit : $f(v_1) = a \cdot v_1 + 3b \cdot v_2$.

$$\text{De même : } M(a, b) V_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot V_1 + b \cdot V_2 \text{ on en déduit : } f(v_2) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2.$$

D'après la question 5.a) : $v_3 \in \ker(f)$ et $v_4 \in \ker(f)$.

Ainsi, par définition : $f(v_3) = 0$. $f(v_4) = 0$

$$\text{On en conclut : } N = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

N et $M(a, b)$ représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes donc elles sont semblables.

(d) Soient λ un réel non nul

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On suppose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

En particulier, on a donc : $X \neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ d'où :

$$X \in E_{\lambda}(N) \iff (N - \lambda I_4)X = 0 \text{ (avec } X \neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}) \iff \begin{pmatrix} a-\lambda & a & 0 & 0 \\ 3b & b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + ay = 0 \\ 3bx + (b-\lambda)y = 0 \\ -\lambda z = 0 \\ -\lambda t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-\lambda)x + ay = 0 \\ 3bx + (b-\lambda)y = 0 \\ -z = 0 \\ -t = 0 \end{cases}$$

$$(\text{avec } \lambda \neq 0) \iff \begin{cases} (a-\lambda)x + ay = 0 \\ 3bx + (b-\lambda)y = 0 \\ z = t = 0 \end{cases}$$

D'autre part :

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda}(T) \iff (T - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \text{ (avec } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \iff \begin{pmatrix} a-\lambda & a \\ 3b & b-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + ay = 0 \\ 3bx + (b-\lambda)y = 0 \end{cases} \text{ On reconnaît les deux premières lignes du système précédent.}$$

Finalement :

X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre $\lambda \iff X \neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ et $X \in E_{\lambda}(N) \iff X \neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$

et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda}(T)$ et $z = t = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda}(T)$ et $z = t = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur

propre de T associé à la valeur propre λ et $z = t = 0$ On obtient bien la caractérisation souhaitée.

(e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.

Déterminons les valeurs propres de T . Par définition de T , lorsque $(a, b) = (1, 1)$, on a :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de $T \Leftrightarrow T - \lambda I_2$ est non inversible $\Leftrightarrow \det(T - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = \sqrt{3}$ ou $1 - \lambda = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda = 1 - \sqrt{3}$ ou $\lambda = 1 + \sqrt{3}$

On en déduit que T admet deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 1 - \sqrt{3}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ_1 .

Comme $\lambda_1 \neq 0$, alors, d'après la question 5.d), $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ_1 .

De même, en notant $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda_2 \neq 0$, on obtient d'après la question 5.d) que $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ_2 .

D'autre part, on a prouvé à la question 5a) que 0 est valeur propre de $M(a, b)$ et toujours d'après 5a) $E_0(M(a, b))$ a pour base V_3 et V_4 .

Or d'après 5c), $M(a, b)$ et N sont semblables donc elles ont mêmes valeurs propres.

On a trouvé trois valeurs propres pour N , mais la concaténation des bases des sous-espaces propres forme une famille libre de 4 vecteurs (X_1, X_2, V_3, V_4) de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4. Donc c'est une base et il ne peut y avoir d'autres valeurs propres de N . Et par conséquent N est diagonalisable.

La matrice $N = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est diagonalisable.

Or, M et N étant semblable, on en conclut alors que $M(1, 1) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable.

(f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.

Justifions que T n'admet aucune valeur propre. On raisonne comme pour la question précédente. Par définition de T , lorsque $(a, b) = (1, -1)$, on a :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de $T \Leftrightarrow T - \lambda I_2$ est non inversible $\Leftrightarrow \det(T - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 3 = 0 \Leftrightarrow -(1 - \lambda)(1 + \lambda) + 3 = 0 \Leftrightarrow -(1 - \lambda^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -2$

On en déduit que T n'admet pas de valeurs propres réelles.

On démontre alors que N n'admet pas de valeur propre non nulle.

Pour ce faire, on procède par l'absurde.

Supposons que N admette une valeur propre λ non nulle.

Il existe donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ vecteur propre de N associé à cette valeur propre.

D'après la question 5.d), $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est alors un vecteur propre de T associé à cette valeur propre λ . C'est impossible puisque T n'admet pas de valeur propre.

On en conclut que la matrice N n'admet pas de valeur propre non nulle.

On en déduit que 0 est l'unique valeur propre de N .

Si N était diagonalisable, il existerait alors P inversible et D diagonale avec $D = O_4$ telles que $N = PDP^{-1} = O_4$ ce qui est absurde. Donc N n'est pas diagonalisable. Comme

$N = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ n'est pas diagonalisable, De même comme N et $M(1, -1)$ sont semblables :

on en conclut alors que $M(1, -1) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 2. D'après EML 2000

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

I Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

Enfin on note l'événement « R_k avoir un roi rouge au k -ième tirage ».

1. Simulation informatique Python

(a) Simulation de la variable X .

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
    y=1
    T=2*n #nombre de cartes à retourner
    while rd.random()>2/T :
        T=T-1#une carte en moins
        y=y+1#une pioche de plus
    return y
```

(b) Fonction $freq(L)$ qui, prenant en argument une liste de valeurs L (dont les composantes sont des entiers entre 1 et ℓ), renvoie une liste dont les composantes sont les fréquences d'apparitions des valeurs de la liste L .

On commence par remplir la liste des effectifs et on divise ensuite pour la liste des fréquences.

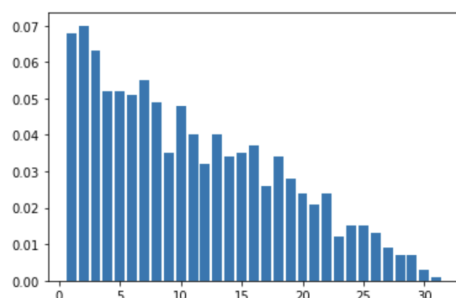
```
def freq(L) :
    l=max(L)
    eff=[0]*l
    for k in range(len(L)) :
        eff[L[k]-1]+=1
    return [eff[k]/len(L) for k in range(l)]
```

(c) On prend $n = 16$. On ajoute les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après

```
import matplotlib.pyplot as plt

n=16
sample=[simul_X(n) for k in range(1000)]
valeurs=[k for k in range(1, 2*n)]
frequences=freq(sample)

plt.bar(valeurs , frequences)
plt.show()
```



Une valeur approchée de l'espérance de X est donnée par la moyenne empirique de l'échantillon de X , donc par la commande `np.mean(sample)` (question mal posée dans l'énoncé car la question laissait croire que la commande était dans le sujet).

La fréquence d'apparition de la valeur 1 (resp. 2, 3) donne une valeur approchée de $P(X = 1)$ (resp. $P(X =$

2), $P(X = 3)$). On lit donc la hauteur du bâton correspondant sur la figure.

On a $P(X = 1) \approx 0.068$, $P(X = 2) \approx 0.07$, $P(X = 3) \approx 0.063$.

$P(X = 1) = 2/32 = 1/16$. (avoir un roi rouge dès la première carte)

2. X est la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge.

On peut piocher le premier roi rouge dès le premier coup mais on peut aussi, dans le cas extrême, piocher toutes les autres cartes (il y en a $2n - 2$) avant d'obtenir le premier roi rouge à la $(2n - 1)$ -ème pioche. Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on a donc :

$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ (ou $[[1, 2n - 1]]$).

On décompose l'événement : $(X = k)$.

$(X = k)$ signifie que le premier roi rouge apparaît au $k^{\text{ième}}$ tirage. Cela arrive au plus tard au $2n - 1^{\text{ème}}$ tirage car il ne reste alors que les deux rois rouges. On introduit l'événement « R_k avoir un roi rouge au k -ième tirage. »

Donc $(X = k) = \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_{k-1} \cap R_k$.

3. Alors d'après la formule des probabilités composées avec $p(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_{k-1}) \neq 0$, $\forall k \in X(\Omega)$:

$$\begin{aligned} p(X = k) &= p(\bar{R}_1) \cdot p(\bar{R}_2 / \bar{R}_1) \dots p(\bar{R}_{k-1} / \bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{k-2}) p(R_k / \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_{k-1}) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \dots \frac{2n-2-(k-2)}{2n-(k-2)} \cdot \frac{2}{2n-(k-1)} \end{aligned}$$

car, par exemple, quand on a tiré déjà $\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{k-2}$ il reste $2n - 2 - (k - 2)$ cartes qui ne sont pas des rois rouges parmi $2n - (k - 2)$ cartes équiprobables.

Or $(2n - 2)(2n - 3) \dots (2n - k) = (2n - 2)! / (2n - k - 1)!$

et $(2n)(2n - 1) \dots (2n - k + 1) = (2n)! / (2n - k)!$ donc

$$p(X = k) = \frac{2(2n - 2)!(2n - k)!}{(2n - k - 1)!(2n)!} = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}.$$

4. Le support de X étant fini, son espérance existe et est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} k p(X = k) = \sum_{k=1}^{2n-1} k \frac{2n - k}{n(2n - 1)} = \frac{1}{n(2n - 1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k(2n - k) \\ &= \frac{1}{n(2n - 1)} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} k \times 2n - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \right) = \frac{1}{n(2n - 1)} \left(2n \sum_{k=1}^{2n-1} k - \frac{(2n - 1)(2n + 1)(4n - 2 + 1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{n(2n - 1)} \left(2n \frac{(2n - 1)(2n)}{2} - \frac{(2n - 1)(2n)(4n - 2 + 1)}{6} \right) \\ &= \frac{2n(2n - 1)}{n(2n - 1)} \left(n - \frac{4n - 1}{6} \right) = 2 \left(\frac{6n}{6} - \frac{4n - 1}{6} \right) = \frac{2n + 1}{3}. \end{aligned}$$

5. (a) On a immédiatement d'après l'énoncé que : $G_1 = a - X$.

(b) On a donc $E(G_1) = a - E(X) = a - \frac{2n + 1}{3}$ par propriété de l'espérance.

II Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, $(G_2 = a - k)$ signifie que l'on a retourné un roi rouge au $k^{\text{ième}}$ tirage. Donc $(G_2 = a - k) = (X = k)$.

et $p(G_2 = a - k) = p(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}.$

2. ($G_2 = -n$) signifie que l'on a pas tiré de roi rouge jusqu'au $n^{ième}$ tirage.

Donc ($G_2 = -n$) = $\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_n$ et d'après la formule des probabilités composées avec $p(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_{n-1}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} p(G_2 = n) &= p(\bar{R}_1) \cdot p(\bar{R}_2/\bar{R}_1) \dots p(\bar{R}_n/\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_{n-1}) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \dots \frac{2n-2-(n-1)}{2n-(n-1)} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!} \cdot \frac{n!}{(2n)!} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \boxed{\frac{n-1}{2(2n-1)}}. \end{aligned}$$

III Comparaison des deux protocoles

On compare les gain moyens obtenus par les deux méthodes dans le cas où $n = 16$:

$$\begin{aligned} E(G_2) - E(G_1) &= \frac{3(3 \cdot 16 - 1)a - (7 \cdot 16^2 - 1)}{6(2 \cdot 16 - 1)} - a + \frac{2 \cdot 16 + 1}{3} \\ &= -\frac{15}{62}a + \frac{85}{62} \end{aligned}$$

donc si $a \leq 17/3$ alors la différence est positive et il vaut mieux choisir la méthode 2, sinon, la méthode 1 est préférable.

Exercice 3. D'après EML 2009

On note $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Pour tout $x \neq 0$: $e^x - 1 \neq 0$, donc f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Étude de la continuité en 0 :

$$\text{En } 0: e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \text{ et donc pour } x \neq 0: f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0).$$

D'où f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

- (b) Pour $x \neq 0$: $e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions C^1 et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \boxed{\frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}}$$

- (c) On a le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction exponentielle qui est donnée par :
 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)]}{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1)^2} \\ &= \frac{(\frac{1}{2} - 1)x^2 + o(x^2)}{(x + o(x))^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{(x^2 + o(x^2))} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$.

- (d) On a vu que f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et comme f est continue en 0 et que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$ alors f est C^1 en 0 et
 $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

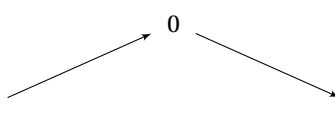
Conclusion : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. (a) $u(x) = (1-x)e^x - 1$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-x)e^x - e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

Donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	+	0	-
$u(x)$			
signe de u	-	0	-

On justifie le signe de u :

0 maximum de u (sa dérivée s'annule en changeant de signe en 0) donc $u(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

- (b) Comme pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$ alors f est du signe de $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$.

Et pour $x = 0$: $f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

- (c) En $-\infty$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

En $+\infty$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1 - 1/e^x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} o(e^x)$ par C.C

d'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-1/2	-
$f(x)$	$+\infty$	1	0

- (d) On a :

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{x}{e^x - 1} + x \\ &= \frac{xe^x}{e^x - 1} \end{aligned}$$

On pose $X = -x$ alors quand x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$.

Et on a $xe^x = -X/e^X \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ par C.C. De plus $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{-X} - 1} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} -1$.

D'où par produit : Donc $f(x) + x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Conclusion : la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

- (e)
- ```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

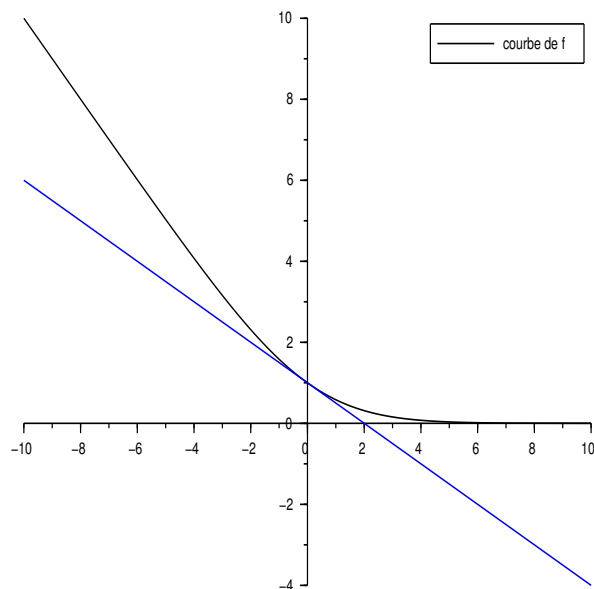
def f(x):
 if np.any(x==0) :
 y=1
 else :
 y=x/(np.exp(x)-1)
```

```

 return y

x=np.arange(-10,10,0.01)
plt.plot(x,f(x))
plt.plot(x,-1/2*x+1)
plt.show()

```



## Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction $f$

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 0 n'est pas point fixe puisque  $f(0) \neq 0$ .

$$\text{Pour } x \neq 0 : f(x) = x \iff \frac{x}{e^x - 1} = x \iff 1 = e^x - 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$$

Conclusion :  $f$  admet un point fixe et un seul,  $\alpha = \ln(2)$ .

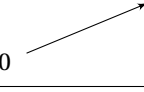
- (a) Soit  $g(x) = e^{2x} - 2x e^x - 1$ .  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^+$  et

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\
 &= 2e^x(e^x - 1 - x)
 \end{aligned}$$

Or on sait que pour tout réel positif, par convexité :  $e^x \geq 1 + x$  (car  $y = 1 + x$  est la tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0).

Ainsi,  $g'(x) \geq 0$  pour tout réel positif.

On a donc :

|                 |   |                                                                                   |
|-----------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $x$             | 0 | $+\infty$                                                                         |
| $g'(x)$         | 0 | +                                                                                 |
| $g(x)$          | 0 |  |
| signe de $g(x)$ | 0 | +                                                                                 |

Conclusion :  $\forall x \in [0; +\infty[, e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0$

(b) Pour tout  $x > 0$  :

$$\begin{aligned}
 f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - x e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2e^x - 2 - 2x e^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

(c) Comme  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$  par conséquent :  $-\frac{1}{2} \leq f'(x)$ .

Et pour  $x = 0$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{2}$ .

Enfin on a vu que  $f'(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ .

(d) On a vu que :

- $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$
- $|f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$
- On a  $\alpha = f(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ .
- $f(u_n) = u_{n+1}$

Il reste donc à voir pour pouvoir appliqué l'inégalité des accroissements finis appliqués à  $f, u_n, \alpha$  sur  $\mathbb{R}^+$  que pour tout  $n : u_n \in \mathbb{R}^+$ .

On montre alors, par récurrence, que pour tout  $n : u_n \in \mathbb{R}^+$ .

Initialisation :  $u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$ .

On suppose que pour un certain entier naturel  $n$  on a  $u_n \in \mathbb{R}^+$ .

Alors comme  $u_{n+1} = f(u_n)$  et que  $f > 0$  sur  $\mathbb{R}$  (d'après la question 2c)), on a  $f(u_n) > 0$  donc  $u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ .

L'hérédité est vérifiée.

Conclusion, pour tout entier  $n : u_n \in \mathbb{R}^+$ .

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliqués à  $f, u_n, \alpha$  :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

C'est à dire  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

3. On montre alors par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$ .

Pour  $n = 0 : |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2} |1 - \alpha| = \frac{1}{2} (1 - \alpha)$  car  $\alpha = \ln(2) \leq 1$ . Donc l'initialisation est vraie.

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$  alors d'après la question précédente puis par hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} (1 - \alpha).$$

L'hérédité est vérifiée.

Conclusion :  $\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha).$

4. Et comme  $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$  alors  $\frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et comme  $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$ , par théorème d'encadrement  $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  d'où

la conclusion :  $\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha = \ln(2).$

5. Programme Python pour déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$  :

```
import numpy as np
u=1
n=0
while np.abs(u-np.log(2)) >= 10**(-9) :
 n=n+1
 u=u/(np.exp(u)-1)

print(n)
```

on trouve  $n = 21$

### Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

1. Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle y admet une primitive  $F$  qui est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .  
On a alors  $G(x) = F(2x) - F(x)$  et donc  $G$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions  $C^1$ .  
et on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2 \frac{2x}{e^{2x} - 1} - \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } 2x \text{ et } x \neq 0 \\ &= \frac{4x - x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} \\ &= \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \\ G'(0) &= 2f(0) - f(0) = 1 \end{aligned}$$

Conclusion :  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. (a) Soit  $x \geq 0$ . On a alors  $x \leq 2x$  et pour tout  $x \leq t \leq 2x$  :  $0 \leq f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$  car  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Donc } 0 \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x - x)$$

Conclusion :  $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq G(x) \leq x f(x).$

Et comme  $x f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{1 - e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on conclut par théorème d'encadrement :

$$G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

- (b) Pour  $x \leq 0$  on a  $2x \leq x \leq 0$  et pour tout  $t \in [2x, x]$ , on a  $f(t) \geq f(x)$  car  $f$  est décroissante strictement sur  $\mathbb{R}$ .

D'où  $\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x - x)$  car les bornes sont en ordre décroissant.

Conclusion :  $\forall x \in ]-\infty; 0], G(x) \leq x f(x).$

Et comme  $x f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ , on a par théorème de comparaison, que  $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty.$

3. On rassemble tous les résultats obtenus dans le tableau suivant :

|         |                                                                                                                    |          |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                                                          | $\ln(3)$ | $+\infty$ |
| $G'(x)$ | $+$                                                                                                                | $0$      | $-$       |
| $G(x)$  | <div> <math>-\infty</math> <math>\nearrow</math> <math>G(\ln 3)</math> <math>\searrow</math> <math>0</math> </div> |          |           |

car

|            |           |     |     |     |          |     |           |
|------------|-----------|-----|-----|-----|----------|-----|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\ln(3)$ | $-$ | $+\infty$ |
| $e^{2x}-1$ |           | $-$ | $0$ | $+$ |          | $+$ |           |
| $3-e^x$    |           | $+$ |     | $+$ | $0$      | $-$ |           |
| $G'(x)$    |           | $+$ | $1$ | $+$ | $0$      | $-$ |           |