

Objectifs du chapitre

- Calculer un taux de variation entre deux points
- Déterminer le nombre dérivé d'une fonction en un point et l'interpréter graphiquement
- Connaître les dérivées des fonctions affines, de la fonction carré et de la fonction inverse
- Utiliser les règles de dérivation (somme, produit par un scalaire)
- Étudier le sens de variation d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée
- Dresser un tableau de variations
- Étudier la fonction inverse : dérivée, variations, représentation graphique
- Résoudre des problèmes d'optimisation

1. Taux de variation**Situation professionnelle — Artisan menuisier**

Un artisan menuisier fabrique des étagères sur mesure. Le coût total de production (en euros) pour x étagères est modélisé par la fonction $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 150$. Il souhaite savoir comment évolue le coût lorsqu'il passe de 10 à 15 étagères.

Définition Taux de variation :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a et b deux nombres de I avec $a \neq b$.
Le **taux de variation** de f entre a et b est le quotient :

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ce nombre représente la **pente de la droite** passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

Exemple : Reprenons la situation du menuisier avec $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 150$.

Calculons le taux de variation entre $x = 10$ et $x = 15$:

- $C(10) = 0,5 \times 100 + 200 + 150 = 400$ €
- $C(15) = 0,5 \times 225 + 300 + 150 = 562,5$ €

$$\tau = \frac{C(15) - C(10)}{15 - 10} = \frac{562,5 - 400}{5} = \frac{162,5}{5} = 32,5 \text{ €/étagère}$$

En moyenne, entre la 10^e et la 15^e étagère, chaque étagère supplémentaire coûte 32,50 €.

Attention Le taux de variation donne une information **moyenne** entre deux points. Il ne décrit pas ce qui se passe en un point précis. Pour cela, on a besoin du **nombre dérivé**.

2. Nombre dérivé en un point

Définition Nombre dérivé :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre de I .

Le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$, est la limite du taux de variation lorsque h tend vers 0 :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque cette limite existe, on dit que f est **dérivable** en a .

Propriété — Interprétation graphique

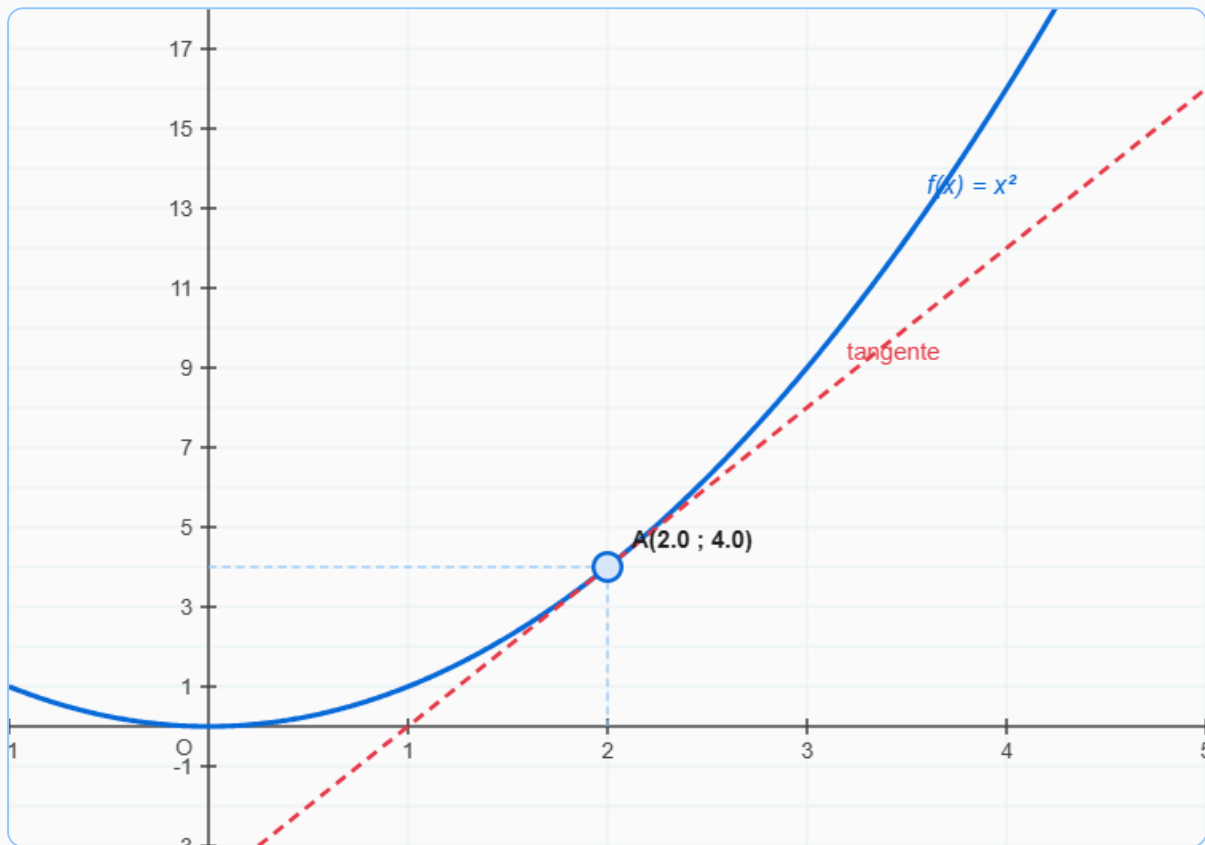
Le nombre dérivé $f'(a)$ est la **pente de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a

L'équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Tangente à la courbe de $f(x) = x^2$

Déplacez le point sur la courbe pour voir la tangente et la pente $f'(a)$.



$$a = 2,00 \rightarrow f'(a) = 2a = 4,00 \text{ (pente de la tangente)}$$

Exemple : Soit $f(x) = x^2$. Calculons $f'(3)$.

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

Quand $h \rightarrow 0$, on obtient $f'(3) = 6$.

La tangente à la courbe au point $A(3; 9)$ a pour équation :

$$y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$$

Méthode — Calculer un nombre dérivé

1. Écrire le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
2. Développer et simplifier le numérateur
3. Simplifier par h
4. Faire tendre h vers 0 pour obtenir $f'(a)$

3. Fonction dérivée

Définition Fonction dérivée :

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I , la fonction qui à chaque x de I associe $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f , notée f' .

4. Dérivées des fonctions usuelles

Tableau des dérivées usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
k (constante)	0	\mathbb{R}
$ax + b$	a	\mathbb{R}
x^2	$2x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*

Hors programme — pour aller plus loin Le programme de Première se limite aux dérivées des fonctions affines, de la fonction carré et de la fonction inverse. Pour la poursuite d'études, on peut retenir les formules suivantes, qui seront utilisées en Terminale (polynômes de degré 3) puis en BTS :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
x^3	$3x^2$
x^n (n entier, $n \geq 1$)	nx^{n-1}
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples :

- Si $f(x) = 5$, alors $f'(x) = 0$.
- Si $f(x) = 3x + 7$, alors $f'(x) = 3$.
- Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

APPLICATION

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$ b) $g(x) = -3x^2 + 5$ c) $h(x) = -2x + 9$

5. Règles de dérivation

Propriété — Somme et produit par un scalaire

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Opération	Fonction	Dérivée
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit par un réel	$k \times u$	$k \times u'$

Méthode — Dériver une fonction

Pour dériver $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$:

1. On dérive chaque terme séparément :

- $3x^2 \rightarrow$ dérivée : $3 \times 2x = 6x$
- $-5x \rightarrow$ dérivée : -5
- $2 \rightarrow$ dérivée : 0

2. On additionne : $f'(x) = 6x - 5$

Exemples de dérivation :

1. $f(x) = 4x^2 + 2x - 7$

$$f'(x) = 8x + 2$$

2. $g(x) = -2x^2 + 8x$

$$g'(x) = -4x + 8$$

3. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 10$

$$h'(x) = x - 3$$

6. Signe de la dérivée et sens de variation

Théorème fondamental

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est **strictement décroissante** sur I .
- Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est **constante** sur I .

Propriété — Extremum local

Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a , alors f admet un **extremum local** en a :

- f' passe du positif au négatif $\rightarrow f(a)$ est un **maximum local**
- f' passe du négatif au positif $\rightarrow f(a)$ est un **minimum local**

Méthode — Étudier les variations d'une fonction

1. **Dériver** la fonction f
2. **Résoudre** $f'(x) = 0$ pour trouver les valeurs critiques
3. **Étudier le signe** de $f'(x)$ sur chaque intervalle
4. **Dresser le tableau de variations**
5. **Conclure** : sens de variation et extremums

Exemple complet : Étudier les variations de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur \mathbb{R} .

Étape 1 : $f'(x) = 2x - 6$

Étape 2 : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Étape 3 : Signe de $f'(x) = 2x - 6$:

- Si $x < 3$: $f'(x) < 0 \rightarrow f$ décroissante
- Si $x > 3$: $f'(x) > 0 \rightarrow f$ croissante

Étape 4 : $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0	+	
Variations de f		\searrow	-4 (min)	\nearrow	

Conclusion : f est décroissante sur $] -\infty ; 3]$ et croissante sur $[3 ; +\infty[$.
 f admet un **minimum** égal à -4 en $x = 3$.

APPLICATION

Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Calculer $f'(x)$, résoudre $f'(x) = 0$, et dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

7. La fonction inverse

Définition

Fonction inverse

La **fonction inverse** est la fonction f définie pour tout $x \neq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Elle est définie sur $] -\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$: elle n'est **pas définie en 0**.

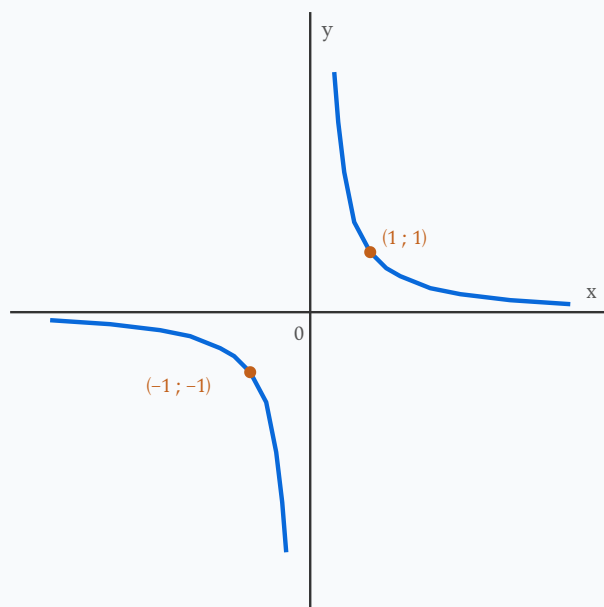
Propriété — Dérivée et variations

La fonction inverse est dérivable pour tout $x \neq 0$ et :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$, on a $f'(x) < 0$: la fonction inverse est **décroissante sur** $] -\infty ; 0[$ **et décroissante sur** $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$		↘		↘	



Courbe de la fonction inverse : une hyperbole en deux branches

Attention

Décroissante sur chaque intervalle, pas sur \mathbb{R}^*

On ne dit pas que la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}^* tout entier : par exemple $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, donc $f(-1) < f(1)$. La décroissance est valable **sur chacun des deux intervalles séparément**.

APPLICATION

Un chauffagiste doit parcourir 120 km pour rejoindre un chantier. On note $t(v) = \frac{120}{v}$ la durée du trajet (en heures) en fonction de la vitesse moyenne v (en km/h), pour $v \in [60; 110]$.

1. Calculer $t(80)$ et $t(100)$.
2. Justifier, à l'aide du sens de variation de la fonction inverse, que la durée diminue quand la vitesse augmente.

8. Applications : problèmes d'optimisation

Situation professionnelle — Coût marginal

Un atelier de charpente fabrique des poutres en lamellé-collé. Le coût total de production (en euros) pour x poutres est modélisé par :

$$C(x) = 0,2x^2 + 30x + 500 \quad \text{pour } x \in [1; 50]$$

Le **coût marginal** est la dérivée $C'(x)$. Il représente le coût approximatif de la prochaine poutre produite.

Définition Coût marginal :

Si $C(x)$ est le coût total de production de x unités, alors le **coût marginal** est $C'(x)$. Il approxime le coût de fabrication d'une unité supplémentaire.

Exemple : Avec $C(x) = 0,2x^2 + 30x + 500$:

$$C'(x) = 0,4x + 30$$

Pour $x = 20$ poutres : $C'(20) = 0,4 \times 20 + 30 = 38$ €.

La 21^e poutre coûte environ 38 € à produire.

Situation professionnelle — Optimisation d'une surface

Un menuisier agenceur doit fabriquer un cadre rectangulaire avec 120 cm de baguette. Il souhaite que l'aire intérieure du cadre soit **maximale**. Quelles dimensions doit-il choisir ?

Résolution :

Notons x la largeur du cadre. Le périmètre vaut $2x + 2y = 120$, donc $y = 60 - x$.

L'aire est : $A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$ avec $x \in]0 ; 60[$.

Dérivation : $A'(x) = 60 - 2x$

Résolution de $A'(x) = 0$: $60 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 30$

Signe de $A'(x)$:

- Si $x < 30$: $A'(x) > 0 \rightarrow A$ croissante
- Si $x > 30$: $A'(x) < 0 \rightarrow A$ décroissante

L'aire est maximale pour $x = 30$ cm, soit $y = 30$ cm (un carré !).

Aire maximale : $A(30) = 30 \times 30 = 900 \text{ cm}^2$.

9. Mini-exercices

Exercice 1 : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$

2. $g(x) = -x^2 + 4x - 2$

3. $h(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Exercice 2 : Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 1$.

Exercice 3 : Étudier les variations de $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$ sur \mathbb{R} . Dresser le tableau de variations et déterminer l'extremum.

Exercice 4 : Un technicien chauffagiste modélise le rendement $R(x)$ d'une chaudière (en %) en fonction du débit d'eau x (en L/min) par :

$$R(x) = -0,5x^2 + 10x + 20 \quad \text{pour } x \in [0; 20]$$

Déterminer le débit qui maximise le rendement.

Exercice 5 : Le bénéfice (en euros) d'un artisan fabricant de meubles est modélisé par :

$$B(x) = -x^2 + 40x - 300 \quad \text{pour } x \in [0; 40]$$

où x est le nombre de meubles vendus.

1. Déterminer le nombre de meubles à vendre pour maximiser le bénéfice.
2. Quel est ce bénéfice maximal ?
3. Pour quelles valeurs de x le bénéfice est-il positif ?

L'essentiel à retenir

- Le **taux de variation** mesure l'évolution moyenne : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- Le **nombre dérivé** $f'(a)$ est la pente de la tangente au point d'abscisse a .
- Les dérivées usuelles : $(k)' = 0$, $(ax + b)' = a$, $(x^2)' = 2x$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
- Règles : $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$.
- $f'(x) > 0 \rightarrow f$ croissante ; $f'(x) < 0 \rightarrow f$ décroissante.
- Pour optimiser : dériver, résoudre $f'(x) = 0$, étudier le signe de f' .

10. Erreurs fréquentes

✘ Confondre taux de variation et dérivée

Le taux de variation $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est une pente *moyenne* entre deux points. La dérivée $f'(a)$ est la pente *instantanée* (tangente) en un seul point.

Conseil : le taux de variation s'écrit avec deux points distincts ; la dérivée est la limite quand ces deux points se rapprochent.

✘ Se tromper dans la dérivée de kx^2

Exemples d'erreurs : $(3x^2)' = 3x^2$ (faux : on n'a rien dérivé) ou $(3x^2)' = 6x^2$ (faux : l'exposant doit diminuer).

Conseil : on garde le coefficient et on dérive x^2 : $(3x^2)' = 3 \times 2x = 6x$.

✘ Oublier que $f'(x) = 0$ ne suffit pas pour conclure sur le maximum ou minimum

Un point où $f'(x) = 0$ est un candidat pour un extremum, mais il faut étudier le signe de f' avant et après pour confirmer.

Conseil : dresser toujours un tableau de signe de f' pour identifier si c'est un maximum, un minimum ou un point d'inflexion.

✘ Confondre f croissante et f' positive

Ces deux propriétés sont équivalentes mais bien distinctes. $f'(x) > 0$ signifie que f est croissante sur cet intervalle, pas que f est positive.

Conseil : f' est la dérivée de f ; son signe renseigne sur le sens de variation de f , pas sur le signe de f .

Simulation interactive

[Fonction dérivée et tangente](#)

Fonction dérivée et étude des variations

1ère Bac Pro | Algèbre – Analyse | Mathématiques

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir

 Objectifs du chapitre[cliquer pour développer](#)

Rappels essentiels

- Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ est : $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$
- Le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$, est la limite du taux de variation quand h tend vers 0.
- Dérivées usuelles : si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$; si $f(x) = ax + b$ alors $f'(x) = a$;
si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, f est **croissante** ; si $f'(x) < 0$, f est **décroissante**.
- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation :
 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exercices guidés pas à pas

EXERCICE 1 Taux de variation – calcul direct SOCLE

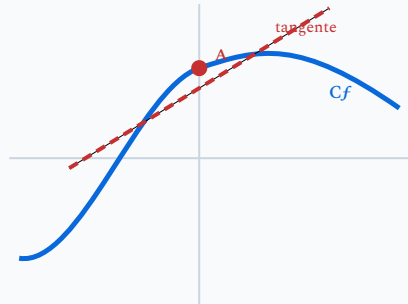
Soit $f(x) = x^2$.

1. Calculer le taux de variation de f entre $x = 1$ et $x = 3$.
2. Calculer le taux de variation de f entre $x = 2$ et $x = 2,5$.
3. Calculer le taux de variation de f entre $x = 2$ et $x = 2 + h$. Simplifier.

Mes calculs :

EXERCICE 2 Nombre dérivé par le calcul

SOCLE



Tangente à la courbe au point A

Soit $f(x) = x^2$.

1. En utilisant le résultat de l'exercice 1 (question 3), déterminer le nombre dérivé de f en 2.
2. De même, calculer $f'(5)$ en passant par le taux de variation $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$.

Mes calculs :

EXERCICE 3 Dérivées de fonctions simples

SOCLE

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x + 7$

2. $g(x) = x^2$

3. $h(x) = 5x^2$

4. $k(x) = 8$

5. $m(x) = -2x + 4$

6. $p(x) = -3x^2$

Mes calculs :

EXERCICE 4 Dérivées de sommes

SOCLE

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 3x - 1$

2. $g(x) = 2x^2 - 5x + 8$

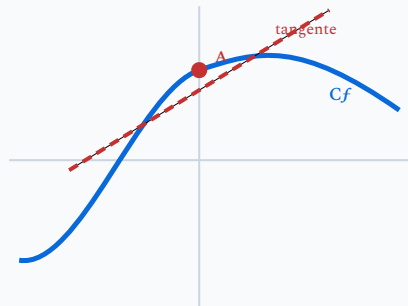
3. $h(x) = -x^2 + 6x + 2$

4. $k(x) = 3x^2 - 4x + 7$

Mes calculs :

EXERCICE 5 Signe de la dérivée et sens de variation (guidé)

SOCLE



Tangente à la courbe au point A

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

1. Étape 1 — Calculer la dérivée.

Rappel : la dérivée de ax^2 est $2ax$, la dérivée de bx est b , la dérivée d'une constante est 0.

Compléter : $f'(x) = \dots$

2. Étape 2 — Résoudre $f'(x) = 0$.

Résoudre l'équation du premier degré obtenue.

3. Étape 3 — Signe de $f'(x)$.

Tester une valeur à gauche et une valeur à droite de la solution trouvée. En déduire les intervalles où $f'(x) > 0$ (croissante) et $f'(x) < 0$ (décroissante).

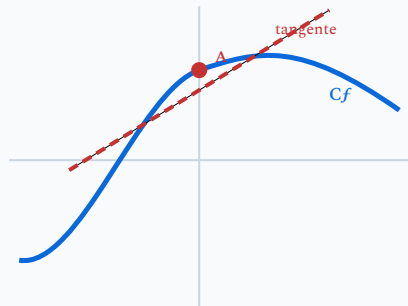
4. Étape 4 — Tableau de variations.

Dresser le tableau de variations. Calculer la valeur de f au sommet.

Mes calculs :

EXERCICE 6 Équation de la tangente (guidé)

SOCLE



Tangente à la courbe au point A

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Étape 1 — Dériver.

Calculer $f'(x)$.

2. Étape 2 — Valeurs en $x = 1$.

Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

Rappel : $f(1)$ = on remplace x par 1 dans $f(x)$; $f'(1)$ = on remplace x par 1 dans $f'(x)$.

3. Étape 3 — Tangente en $x = 1$.

Formule : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Remplacer a par 1, puis simplifier.

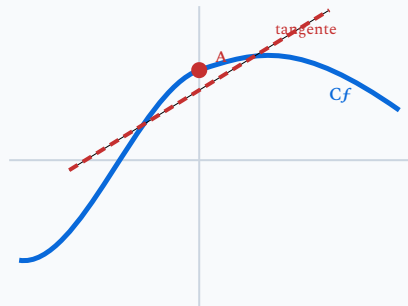
4. Étape 4 — Tangente en $x = 3$.

Même méthode : calculer $f(3)$, $f'(3)$, puis écrire l'équation de la tangente.

Mes calculs :

EXERCICE 7 Étude complète d'une fonction polynôme (guidé)

SOCLE



Tangente à la courbe au point A

Soit $f(x) = -x^2 + 8x - 12$.

1. Étape 1 — Dériver.

Calculer $f'(x)$. *Rappel* : la dérivée de $-x^2$ est $-2x$.

2. Étape 2 — Annuler la dérivée.

Résoudre $f'(x) = 0$.

3. Étape 3 — Signe de la dérivée et tableau de variations.

Compléter : si $x < \dots$, $f'(x) > 0$ (croissante) ; si $x > \dots$, $f'(x) < 0$ (décroissante).

Calculer les valeurs aux bornes : $f(0)$, $f(\dots)$ (sommet), $f(8)$.

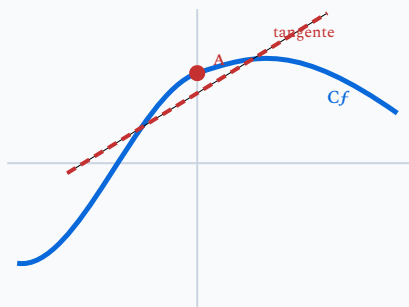
4. Étape 4 — Conclusion.

Indiquer le maximum de f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

Mes calculs :

EXERCICE 8 Lecture graphique de la dérivée (guidé)

SOCLE



Tangente à la courbe au point A

On donne le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On sait que $f(-1) = 5$ et $f(2) = -4$.

1. Étape 1 — Sens de variation.

Rappel : $f' > 0 \Rightarrow f$ croissante ; $f' < 0 \Rightarrow f$ décroissante.

Compléter : f est croissante sur $] -\infty ; \dots]$, décroissante sur $[\dots ; \dots]$, croissante sur $[\dots ; +\infty [$.

2. Étape 2 — Extremums.

Un maximum local est un point où f passe de croissante à décroissante. Un minimum local est l'inverse. Identifier les extremums.

3. Étape 3 — Solutions de $f(x) = 0$.

Le maximum vaut $5 > 0$ et le minimum vaut $-4 < 0$. Que peut-on en déduire ?

Mes calculs :

Exercices d'application

EXERCICE 9 Calcul de dérivées et applications

STANDARD

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, puis déterminer $f'(2)$ dans chaque cas.

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

2. $g(x) = -x^2 + 6x - 4$

3. $h(x) = 2x^2 - 7x + 3$

Mes calculs :

EXERCICE 10 Étude des variations d'une fonction

STANDARD

Soit $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ et étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 8]$. Calculer $f(0)$, $f(3)$ et $f(8)$.
4. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 1$.

Mes calculs :

EXERCICE 11 Optimisation du rendement — Installateur thermique

STANDARD

Un installateur thermique règle le débit d'eau x (en litres par minute) d'un plancher chauffant. La puissance thermique P (en watts) transmise au sol est modélisée par :

$$P(x) = -5x^2 + 80x + 100 \quad \text{pour } x \in [0 ; 20]$$

1. Calculer $P'(x)$.
2. Résoudre $P'(x) = 0$ et étudier le signe de $P'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de P sur $[0 ; 20]$. En déduire le débit optimal et la puissance maximale.
4. Le client souhaite une puissance d'au moins 400 W. Résoudre $P(x) \geq 400$ et indiquer la plage de débits acceptables.

Mes calculs :

Exercices d'approfondissement

Note : les exercices d'approfondissement mobilisent des polynômes de degré 3 et leur dérivée, en anticipation du programme de Terminale (hors programme de Première).

EXERCICE 12 Optimisation – Aire maximale**APPROFONDISSEMENT**

Un menuisier dispose d'une planche rectangulaire de 60 cm de longueur. Il souhaite découper un rectangle de périmètre 60 cm d'aire maximale.

1. On note x la largeur du rectangle (en cm). Exprimer la longueur en fonction de x .
2. Exprimer l'aire $A(x)$ en fonction de x .
3. Calculer $A'(x)$ et déterminer la valeur de x qui rend l'aire maximale.
4. Quelle est la forme du rectangle d'aire maximale ? Calculer cette aire.

Mes calculs :

EXERCICE 13 Optimisation – Coût de production**APPROFONDISSEMENT**

Un artisan fabrique des étagères sur mesure. Le coût total de production pour x étagères est modélisé par :

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 50 \quad (\text{en euros, pour } 0 \leq x \leq 10)$$

1. Calculer le coût moyen $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$ pour $x \geq 1$.
2. Le coût moyen pour $x = 5$ étagères est-il supérieur ou inférieur à celui pour $x = 3$?
3. Calculer $C'(x)$.
4. Étudier le sens de variation de C sur $[0 ; 10]$. Que peut-on en conclure ?

Mes calculs :

EXERCICE 14 Optimisation – Volume d'une boîte

APPROFONDISSEMENT

Un charpentier réalise une boîte ouverte en découpant des carrés de côté x (en cm) aux quatre coins d'une plaque rectangulaire de 30 cm sur 20 cm, puis en repliant les bords.

1. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x .
2. Préciser l'ensemble de définition de V .
3. Développer $V(x)$ et calculer $V'(x)$.
4. Résoudre $V'(x) = 0$ et en déduire la valeur de x qui donne le volume maximal.
Calculer ce volume.

Mes calculs :

EXERCICE 15 Problème de synthèse – Bénéfice d'un artisan

APPROFONDISSEMENT

Un technicien en agencement vend des meubles de rangement. Pour x meubles vendus par mois ($1 \leq x \leq 15$), le bénéfice (en euros) est modélisé par :

$$B(x) = -2x^2 + 40x - 50$$

1. Calculer $B(1)$ et $B(15)$. L'artisan est-il rentable pour ces deux valeurs ?
2. Calculer $B'(x)$ et étudier le sens de variation de B .
3. Pour quel nombre de meubles vendus le bénéfice est-il maximal ? Calculer ce bénéfice.
4. Résoudre $B(x) \geq 0$. Pour quelles quantités l'artisan est-il rentable ?

Mes calculs :

Fonction dérivée et étude des variations

Fonction dérivée et étude des variations | 1ère Bac Pro

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir

 Objectifs du chapitre[cliquer pour développer](#) **Durée** : 1 heure  **Calculatrice** : autorisée  **Barème** : 20 points **Documents** : non autorisés

APP - S'Approprier

ANA - Analyser

REA - Réaliser

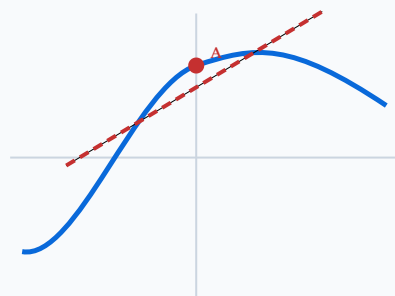
VAL - Valider

COM - Communiquer

SOCLE

Exercice 1 – Dériver des fonctions simples

10 points



Tangente en A

Rappel : Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors $f'(x) = 2ax + b$.Si $f(x) = k$ (constante), alors $f'(x) = 0$.**Étape 1** : **REA** Calculer la dérivée de $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$. (2 pts)**Aide** : $f'(x) = 2 \times 3 \times x + (-4) = \dots$

Étape 2 : **REA** Calculer $f'(0)$ et $f'(2)$. (2 pts)

Étape 3 : **ANA** Résoudre $f'(x) = 0$. Cette valeur correspond au sommet de la parabole. (2 pts)

Aide : $6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dots$

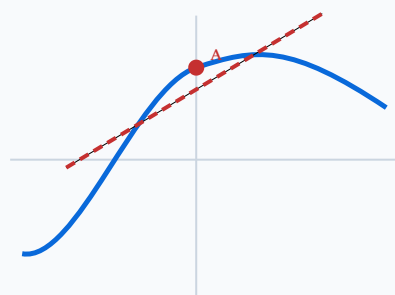
Étape 4 : **ANA** Compléter le tableau de signes de $f'(x)$: (2 pts)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		0	
Variations de f		

Étape 5 : **VAL** Calculer $f\left(\frac{2}{3}\right)$ pour trouver le minimum. (2 pts)

Exercice 2 – Lecture graphique de la dérivée

10 points



Tangente en A

Le graphique ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-1 ; 5]$. On lit que :

- f est croissante sur $[-1 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 5]$
- Le maximum est $f(2) = 6$
- $f(-1) = 1$ et $f(5) = -3$

Étape 1 : **APP** Quel est le signe de $f'(x)$ sur $[-1 ; 2]$? sur $[2 ; 5]$? (2 pts)

Aide : croissante $\rightarrow f' > 0$; décroissante $\rightarrow f' < 0$.

Étape 2 : **ANA** Que vaut $f'(2)$? Pourquoi ? (2 pts)

Étape 3 : **REA** Dresser le tableau de variations de f . (3 pts)

Étape 4 : **COM** La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est horizontale. Expliquer pourquoi. (1,5 pt)

Étape 5 : **VAL** Le nombre dérivé $f'(0)$ est-il positif, négatif ou nul ? Justifier. (1,5 pt)

STANDARD

Exercice 1 – Calcul de dérivées

8 points

1. **APP** Soit $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Calculer $f'(x)$. (2 pts)

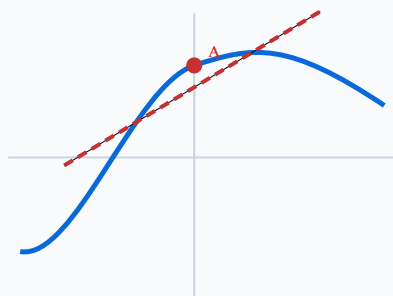
2. **REA** Soit $g(x) = -x^2 + 4x$. Calculer $g'(x)$. (2 pts)

3. **REA** Soit $h(x) = 2x^2 + 5$. Calculer $h'(x)$. (2 pts)

4. **VAL** Pour la fonction $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, calculer $f'(1)$ et interpréter le résultat. (2 pts)

Exercice 2 – Étude complète d'une fonction

12 points



Tangente en A

Contexte professionnel : Un atelier de menuiserie fabrique des étagères sur mesure. Le coût de production (en euros) pour x étagères fabriquées par jour est modélisé par :

$$C(x) = x^2 - 6x + 14 \quad \text{pour } x \in [0; 6]$$

L'objectif est de déterminer pour quelle quantité le coût est minimal.

1. **REA** Calculer $C'(x)$. (2 pts)

2. **ANA** Résoudre l'équation $C'(x) = 0$. (2 pts)

3. **ANA** Étudier le signe de $C'(x)$ sur $[0; 6]$ et dresser le tableau de variations de C . (3 pts)

4. **VAL** En déduire les extrema locaux de C sur $[0; 6]$. Préciser la nature (minimum ou maximum) et les valeurs correspondantes. (2 pts)

5. **COM** Interpréter les résultats dans le contexte professionnel. Pour quelle production journalière le coût est-il le plus faible ? Quel est ce coût ? Rédiger une phrase de conclusion. (3 pts)

APPROFONDISSEMENT

Note : cette version mobilise des polynômes de degré 3 et leur dérivée, en **anticipation du programme de Terminale** (hors programme de Première).

Exercice 1 – Étude complète d'une fonction

8 points

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ définie sur $[0 ; 5]$.

1. **REA** Calculer $f'(x)$. (1,5 pt)

2. **REA** Résoudre $f'(x) = 0$. (2 pts)

3. **ANA** Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 5]$. (2,5 pts)

4. **VAL** Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[0 ; 5]$. (2 pts)

Exercice 2 – Optimisation d'un bénéfice

12 points

Un ébéniste fabrique des coffrets en bois. Pour x coffrets par jour ($0 \leq x \leq 20$) :

- Coût total : $C(x) = 0,1x^3 - 2x^2 + 15x + 50$ (en €)
- Recette : $R(x) = 20x$ (en €)

Le bénéfice est $B(x) = R(x) - C(x)$.

1. **REA** Exprimer $B(x)$ en fonction de x . (1,5 pt)

2. **REA** Calculer $B'(x)$. (2 pts)

3. **ANA** Résoudre $B'(x) = 0$ et déterminer le signe de $B'(x)$. (3 pts)

4. **ANA** En déduire le nombre de coffrets qui maximise le bénéfice et la valeur de ce bénéfice maximal. (2 pts)

5. **VAL** Déterminer pour quelles valeurs de x l'ébéniste est rentable ($B(x) > 0$). (2 pts)

6. **COM** Rédiger une recommandation chiffrée pour l'ébéniste. (1,5 pt)
