Limites de fonctions - L'essentiel du cours

1) Limites des fonctions de références

Propriété

- En $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

- En $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3}=0$

- En 0 :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^3}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^3}=-\infty$

2) Opérations sur les limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to l'}\to l+l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}\to+\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}\to-\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}\to+\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}\to-\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to l'}\to l\times l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}\to+\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}\to-\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}\to-\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}\to+\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}\to+\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}\to+\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}\to-\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to l\neq0}}\right)\to\frac{1}{l}$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to\pm\infty}}\right)\to0$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to0^+}}\right)\to+\infty$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to0^-}}\right)\to-\infty$

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\dfrac{(\ \ )}{(\ \ )}=(\ \ )\times\dfrac{1}{(\ \ )}$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}$; $\underbrace{(\ \ )}_{\to\pm\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to0}$

• Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:

- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur *(ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite).*

3) Asymptotes

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à C_f.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$ alors la droite d'équation $y=l$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.

Limites de fonctions

▶ Exercice n°1

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$)

1. $f(x) = x + \sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$

▶ Exercice n°2

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$)

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - x$
2. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{\frac{1}{x} - 2}$

▶ Exercice n°3

1. Déterminer la limite en 0 (pour $x < 0$ et pour $x > 0$) de la fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. La courbe de f admet-elle une asymptote verticale ?
2. Déterminer la limite en -2 (pour $x < -2$ et pour $x > -2$) de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$. La courbe de f admet-elle une asymptote verticale ?
3. Déterminer la limite en 1 (pour $x < 1$ et pour $x > 1$) de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x-3}{1-x^2}$. La courbe de f admet-elle une asymptote verticale ?

▶ Exercice n°4

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction polynôme f dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2x^2 - x + 1$
2. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$

▶ Exercice n°5

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction rationnelle f dans les cas suivants : *(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$ ou en $+\infty$)*

1. $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{-4x+1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{-2x^3}{x^3+5x^2-1}$

▶ Exercice n°6

Compléter les phrases suivantes par « $\lim\limits_{x\to\cdots} \cdots = \cdots$ », « $x = \cdots$ », « $y = \cdots$ », « verticale », « horizontale » ou « oblique ».

1. Si $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation .... est une asymptote .... à C_f .
2. Si .... alors la droite d'équation $y = 5$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

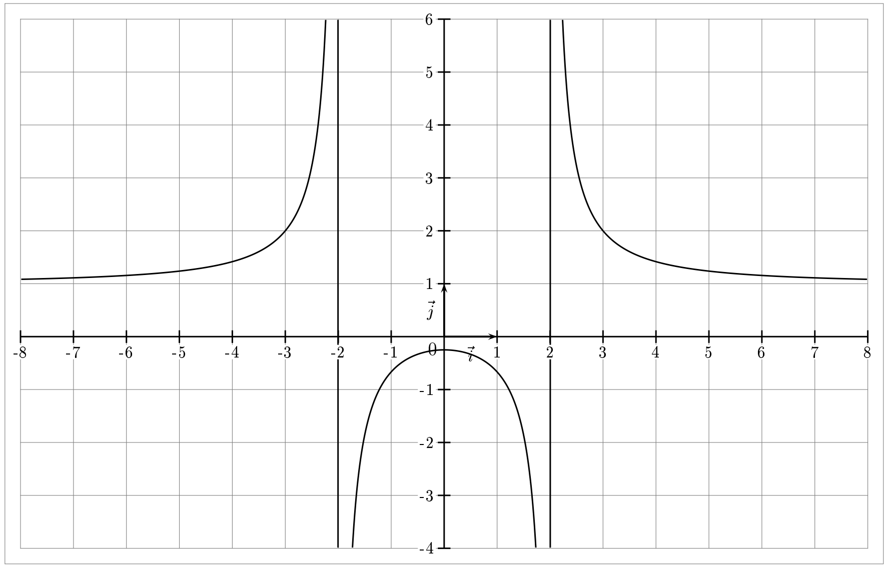
▶ Exercice n°7

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? *(justifier sa réponse)*
« Si f est une fonction strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ alors on a nécessairement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ »

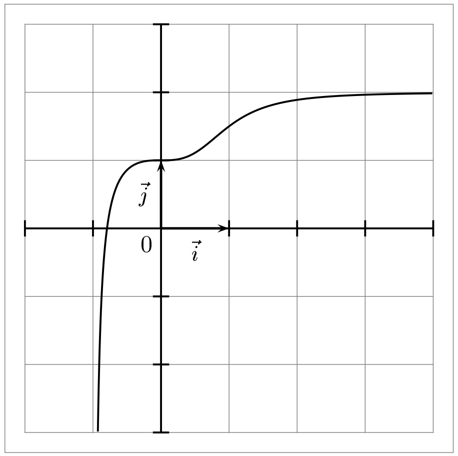
► Exercice n°8

Dans chacun des cas suivants, déterminer d'après la courbe les limites de la fonction f aux bornes et une équation de chacune des asymptotes.

a)



b)



► Exercice n°9

Lors d'une certaine réaction chimique, la vitesse initiale v de la réaction chimique (exprimée en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$) en fonction de la concentration x (exprimée en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$) d'un certain ion est donnée par $v(x) = \dfrac{0{,}0013 \times x}{0{,}000004 + x}$ pour $x \in [0\,;\,+\infty[$.

1. Quelle est la vitesse initiale de la réaction si la concentration de l'ion est nulle ?
2. Quelle est la vitesse initiale de la réaction si la concentration de l'ion est égale à 9×10^{-6} $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$?
3. Déterminer la limite de v quand x tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.
4. Donner la nature et l'équation de l'asymptote de la courbe représentative de la fonction v.

Limites de fonctions

► Exercice n°1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}=+\infty$
   Pas d'asymptote horizontale
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}=-\infty$
   Pas d'asymptote horizontale
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}+1=1$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}-2=-2$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$ en $+\infty$

► Exercice n°2

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}-x=+\infty$
   Pas d'asymptote horizontale
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+\dfrac{1}{x^2}=+\infty$
   Pas d'asymptote horizontale
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x+3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+3}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+3}-2=-2$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$ en $-\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-2=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}-2}=-\dfrac{1}{2}$.

   Et comme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\times\dfrac{1}{\frac{1}{x}-2}=+\infty$

   Pas d'asymptote horizontale

► Exercice n°3

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x+\dfrac{1}{x}=-\infty$

   $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+\dfrac{1}{x}=+\infty$
   La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$

   Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 3x-2=-8$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(3x-2)\times\dfrac{1}{x+2}=+\infty$

   $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$

   Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} 3x-2=-8$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(3x-2)\times\dfrac{1}{x+2}=-\infty$
   La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=-2$.
3. Signe du dénominateur :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 1-x^2=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{1-x^2}=+\infty$
   Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2+x-3=1^2+1-3=-1$, on en déduit que

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x^2+x-3\right)\times\dfrac{1}{1-x^2}=-\infty$

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 1-x^2=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{1-x^2}=-\infty$

   Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2+x-3=-1$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x^2+x-3\right)\times\dfrac{1}{1-x^2}=+\infty$
   La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

► Exercice n°4

La limite en $-\infty$ et en $+\infty$ d'une fonction polynôme est la même que son terme de plus haut degré.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2-x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3+2x-1=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3=-\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3+2x-1=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3=+\infty$

► Exercice n°5

La limite en $-\infty$ et en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est la même que le quotient du terme de plus haut degré du numérateur avec celui du dénominateur.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2}x = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$
   Pas d'asymptote horizontale.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -4 \times \dfrac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -4 \times \dfrac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{x^3+5x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2 = -2$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{x^3+5x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} -2 = -2$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

► Exercice n°6

1. Si $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à C_f .
2. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$ alors la droite d'équation $y = 5$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

► Exercice n°7

L'affirmation est fausse. Contre-exemple avec f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est bien strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ mais avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

► Exercice n°8

a)
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty$. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty$. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
b)
$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

► Exercice n°9

Lors d'une certaine réaction chimique, la vitesse initiale v de la réaction chimique (exprimée en $\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) en fonction de la concentration x (exprimée en $\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}$) d'un certain ion est donnée par $v(x) = \dfrac{0{,}0013 \times x}{0{,}000004 + x}$ pour $x \in [0\,;\,+\infty[$.

1. $v(0) = 0\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
2. $v\left(9\times10^{-6}\right) = 0{,}0009\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
3. C'est une fonction rationnelle.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{0{,}0013\times x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}0013 = 0{,}0013.$
   Quand la concentration de l'ion devient de plus en plus grande, la vitesse de réaction se stabilise autour de $0{,}0013\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
4. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0{,}0013$.