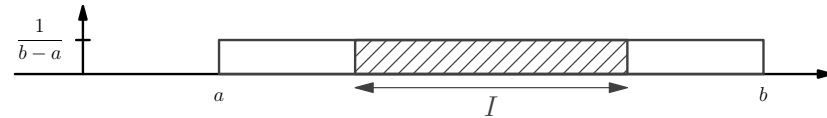


## Lois de probabilités continues : L'essentiel du cours

### a) Loi uniforme sur $[a; b]$

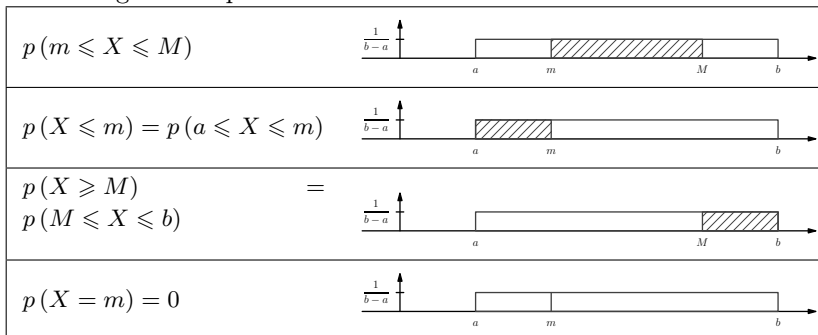
On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la **loi uniforme** sur un intervalle  $[a; b]$  lorsque pour tout intervalle  $I$ , inclus dans  $[a; b]$ , la probabilité de l'événement «  $X$  appartient à  $I$  » est égale à l'aire du rectangle de base  $I$  et de hauteur  $\frac{1}{b-a}$ .



#### ► Remarques :

- On utilise cette loi quand l'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un nombre réel  $X$  dans un intervalle  $[a; b]$  (avec donc une infinité de possibilités).
- L'aire du rectangle de hauteur  $\frac{1}{b-a}$  et allant de  $a$  à  $b$  en abscisse est égale à 1.
- On doit considérer que la probabilité que  $X$  soit égale à un nombre précis dans l'intervalle  $[a; b]$  est nulle, même si c'est contraire à l'intuition, afin d'éviter toute contradiction avec le fait qu'il y ait une infinité de possibilités.

Si une variable aléatoire  $X$  suit la **loi uniforme** sur  $[a; b]$  alors pour tous réels  $m$  et  $M$  inclus dans  $[a; b]$ , les probabilités suivantes sont égales à l'aire du rectangle correspondant :



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

Si une variable aléatoire  $X$  suit la **loi uniforme** sur  $[a; b]$  alors :

l'**espérance** de  $X$  est égale à  $\frac{a+b}{2}$  ; la **variance** est égale à  $\frac{(b-a)^2}{12}$ .

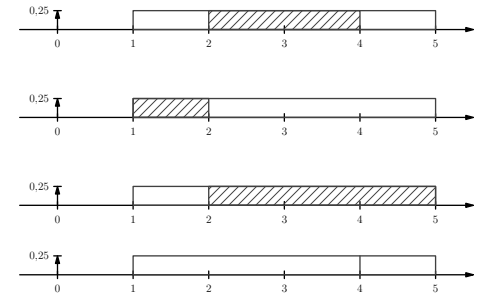
► *Exemple* : On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un réel  $X$  au hasard dans l'intervalle  $[1; 5]$  ( $X$  suit alors la loi uniforme sur  $[1; 5]$ )  
Le premier réflexe à avoir est de raisonner avec un rectangle allant de 1 à 5 en abscisse et de hauteur égale à  $\frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} = 0,25$  (afin que son aire totale soit égale à 1). Pour calculer ensuite les probabilités il suffit de regarder l'aire de la zone dans le rectangle qui correspond à l'événement.

$$\cdot p(2 \leq X \leq 4) = 2 \times 0,25 = 0,5$$

$$\cdot p(X \leq 2) = p(1 \leq X \leq 2) = 1 \times 0,25 = 0,25$$

$$\cdot p(X \geq 2) = p(2 \leq X \leq 5) = 3 \times 0,25 = 0,75$$

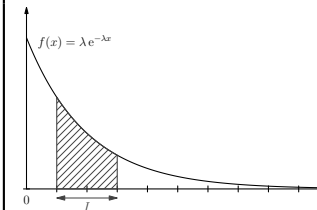
$$\cdot p(X = 4) = 0$$



La valeur moyenne que prend  $X$  si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience aléatoire est égale à l'espérance de  $X$  qui vaut  $\frac{1+5}{2} = 3$  (ce qui correspond au milieu de l'intervalle).

### b) Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la **loi exponentielle de paramètre  $\lambda$**  sur  $[0; +\infty[$  lorsque pour tout intervalle  $I$ , inclus dans  $[0; +\infty[$ , la probabilité de l'événement «  $X$  appartient à  $I$  » est égale à l'aire sous la courbe sur  $I$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

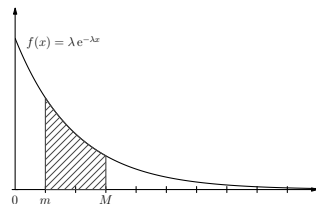


► **Remarques :**

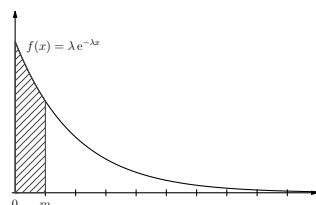
- L'aire totale sous la courbe de 0 à  $+\infty$  est égale à 1
- On doit aussi considérer avec la loi exponentielle que la probabilité que  $X$  soit égale à un nombre précis est nulle.

Si une variable aléatoire  $X$  suit la **loi exponentielle de paramètre  $\lambda$**  sur  $[0; +\infty[$  alors pour tous réels  $m$  et  $M$  dans  $[0; +\infty[$ , on a :

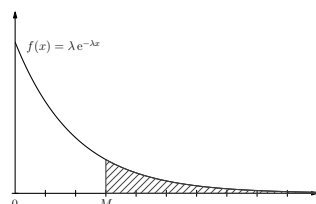
$$\begin{aligned} \cdot p(m \leq X \leq M) &= \int_m^M \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[ -e^{-\lambda x} \right]_m^M \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cdot p(X \leq m) &= p(0 \leq X \leq m) \\ &= \int_0^m \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[ -e^{-\lambda x} \right]_0^m \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cdot p(X \geq M) &= 1 - p(0 \leq X \leq M) \\ &= 1 - \int_0^M \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - \left[ -e^{-\lambda x} \right]_0^M \end{aligned}$$



(on passe par l'événement contraire car on ne se sait pas calculer directement en terminale une intégrale de borne  $+\infty$ )

(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

Si une variable aléatoire  $X$  suit la **loi exponentielle de paramètre  $\lambda$**  sur  $[0; +\infty[$  alors **l'espérance** de  $X$  est égale à  $\frac{1}{\lambda}$ .

La loi exponentielle est dite « sans mémoire », parce que pour tous réels positifs  $M$  et  $h$  :  $p_{X \geq M}(X \geq M + h) = p(X \geq h)$

► **Exemples :**

1. La durée de vie  $X$  (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0006$  sur  $[0; +\infty[$ .

• Calcul de  $p(X < 100)$  :

$$\begin{aligned} p(X < 100) &= p(0 < X < 100) = \int_0^{100} 0,0006 e^{-0,0006x} dx \\ &= \left[ -e^{-0,0006x} \right]_0^{100} = -e^{-0,06} + 1 \approx 0,0582 \end{aligned}$$

• Calcul de  $p(X \geq 400)$  :  $p(X \geq 400) = 1 - p(0 \leq X \leq 400)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \int_0^{400} 0,0006 e^{-0,0006x} dx = 1 - \left[ -e^{-0,0006x} \right]_0^{400} = 1 - (-e^{-0,24} + 1) = e^{-0,24} \approx 0,7866 \end{aligned}$$

2. Une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  sur  $[0; +\infty[$ . Détermination de la valeur de  $\lambda$  sachant que  $p(X < 70) = 0,05$  :

$$\begin{aligned} p(X < 70) = 0,05 &\Leftrightarrow \int_0^{70} \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,05 \Leftrightarrow \left[ -e^{-\lambda x} \right]_0^{70} = 0,05 \\ \Leftrightarrow -e^{-70\lambda} + 1 = 0,05 &\Leftrightarrow e^{-70\lambda} = 0,95 \Leftrightarrow -70\lambda = \ln(0,95) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,95)}{-70} \end{aligned}$$

c) **Généralités sur les lois continues à densité**

Étant donné  $f$  une fonction définie, continue et positive sur un intervalle  $I$  telle

que : si  $I = [a, b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt = 1$  et si  $I = [a, +\infty[$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = 1$

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la **loi de probabilité continue de densité  $f$  sur  $I$**  si pour tout intervalle inclus dans  $I$  la probabilité que  $X$  appartienne à cet intervalle est égale à l'aire « sous la courbe de la densité  $f$  » correspondante.

On appelle alors fonction de répartition de  $X$  la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = p(X \leq x)$ .

► **Remarques :**

© La fonction de densité de la loi uniforme sur  $[a; b]$  est définie sur  $[a; b]$  par  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ .

La fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

Pascal Brachet - www.xmath.net - Licence CC BY NC SA - Utilisation commerciale interdite

## Lois de probabilités continues

### ► Exercice n°1

Deux bus passent à 8h15 et à 8h30 à un certain arrêt. Un usager se présente à cet arrêt entre 8 heures et 8 heures 30 et on note  $X$  la durée en minutes entre 8 heures et l'heure d'arrivée de cet usager à l'arrêt.  $X$  suit donc la loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 30]$ .

1. Calculer la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le premier bus.
2. Calculer la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le deuxième bus.
3. En déduire la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes un bus.

### ► Exercice n°2

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur  $[3; a]$ . Déterminer la valeur de  $a$  sachant que  $p(X < 7) = 0,8$ .

### ► Exercice n°3

Lorsqu'un téléphone portable devient défectueux et qu'il est encore sous garantie, le client peut le déposer dans un point de vente agréé pour réparation ou échange contre un appareil neuf.

On s'intéresse au temps d'attente, exprimé en jours, avant le retour de l'appareil, réparé ou échangé et on suppose que ce temps peut être modélisé par une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,025$ .

1. Quel est le temps moyen d'attente avant le retour de l'appareil ?
2. Quelles est la probabilité qu'un client doive attendre plus de 20 jours avant de récupérer son téléphone portable.

### ► Exercice n°4

La durée de vie (en années) d'un composant électronique est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Suite à un contrôle de qualité, on estime que la durée de vie de ce composant ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1. Calculer la valeur du paramètre  $\lambda$  arrondie à 0,001 près.
2. Calculer la probabilité qu'un composant de ce type dure moins de 8 ans.
3. Calculer la probabilité qu'un composant de ce type dure plus de 10 ans.

### ► Exercice n°5

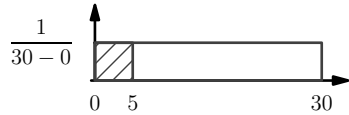
La durée de vie d'un noyau radioactif est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et la demi-vie de cet élément radioactif est la durée  $T$  telle que  $p(X \leq T) = 0,5$ .

1. Exprimer  $T$  en fonction de  $\lambda$ .
2. La durée de vie moyenne  $\tau$  de l'élément radioactif est égale à l'espérance de la variable aléatoire  $X$ . Exprimer  $\tau$  en fonction de la demi-vie  $T$ .

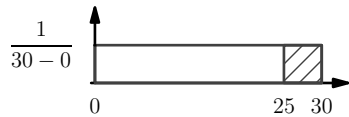
## Lois de probabilités continues

### ► Exercice n°1

1. Cela revient à calculer  $p(0 \leq X \leq 5) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$



2. Cela revient à calculer  $p(25 \leq X \leq 30) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$



3. Cela revient à calculer  $p(0 \leq X \leq 5) + p(25 \leq X \leq 30) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

### ► Exercice n°2

$$p(X < 7) = 4 \times \frac{1}{a-3}$$

(largeur du rectangle de 3 à 7 = 4 et hauteur du rectangle =  $\frac{1}{a-3}$ )

$$p(X < 7) = 0,8 \Leftrightarrow \frac{4}{a-3} = 0,8 \Leftrightarrow 4 = 0,8a - 2,4 \Leftrightarrow 6,4 = 0,8a \Leftrightarrow a = 8.$$

### ► Exercice n°3

1. Cela correspond à  $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 40$  jours.

$$2. p(X > 20) = 1 - p(0 < X < 20) = 1 - \int_0^{20} 0,025 e^{-0,025x} dx$$

$$= 1 - [-e^{-0,025x}]_0^{20} = 1 - (-e^{-0,5} + 1) = e^{-0,5} \approx 0,607$$

### ► Exercice n°4

$$1. p(X < 5) = 0,675 \Leftrightarrow \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,675 \Leftrightarrow [-e^{-\lambda x}]_0^5 = 0,675$$

$$\Leftrightarrow -e^{-5\lambda} + 1 = 0,675 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,325 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0,325)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,325)}{-5} \approx 0,225$$

$$2. p(X < 8) = p(0 < X < 8) = \int_0^8 0,225 e^{-0,225x} dx = [-e^{-0,225x}]_0^8$$

$$= -e^{-1,8} + 1 \approx 0,835$$

$$3. p(X > 10) = 1 - p(0 < X < 10) = 1 - \int_0^{10} 0,225 e^{-0,225x} dx$$

$$= 1 - [-e^{-0,225x}]_0^{10} = 1 - (-e^{-2,25} + 1) = e^{-2,25} \approx 0,105$$

### ► Exercice n°5

$$1. p(X \leq T) = 0,5 \Leftrightarrow \int_0^T \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,5 \Leftrightarrow [-e^{-\lambda x}]_0^T = 0,5$$

$$\Leftrightarrow -e^{-\lambda T} + 1 = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda T} = 0,5 \Leftrightarrow -\lambda T = \ln(0,5)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\ln(0,5)}{-\lambda} = \frac{-\ln 2}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$2. \tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}$$