♦ Thème 3.4. Modèles démographiques

Dans ce thème, il s'agit de donner des modèles mathématiques permettant d'étudier l'évolution d'une population.

I. — Quelques rappels

Définition 1

Si une quantité évolue d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f, on définit :

1. la variation absolue de cette quantité par $V_f - V_i$;
2. la variation relative de cette quantité par $\dfrac{V_f - V_i}{V_i}$.

Exemple 2. Si la population d'un pays évolue de 2 millions à 2,2 millions alors la variation absolue est $2{,}2 - 2 = 0{,}2$ millions et la variation relative est $\dfrac{2{,}2 - 2}{2} = 0{,}1$.

Remarque 3. La variation absolue a la même unité que la quantité étudiée alors que la variation relative est sans unité.

Propriété 4

Dans un repère du plan, une droite $\mathcal{D}$ qui n'est pas parallèle à l'axe de ordonnées a une équation de la forme $y = ax + b$. On dit alors que le nombre a est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ et que le nombre b est l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$.

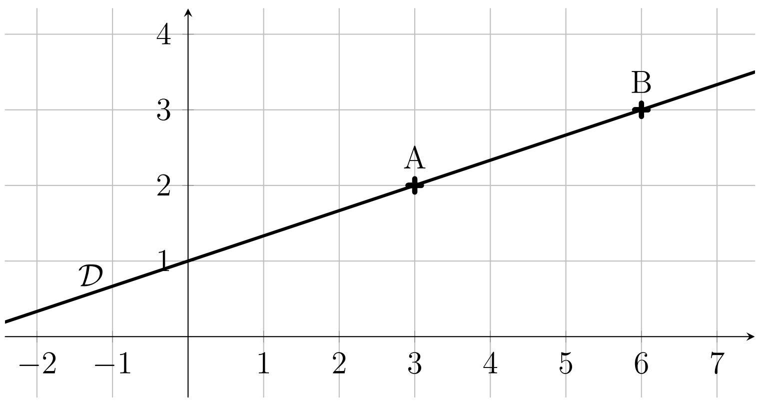
Méthode 5

Soit $\mathcal{D}$ une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

1. L'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$ est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des ordonnées.
2. Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$. Alors, le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est

$$a = \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}$$

Exemple 6. On considère la droite $\mathcal{D}$ représentée ci-dessous.



Alors, l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$ est $b = 1$ et, comme les points A $(3\,;2)$ et B $(6\,;3)$ appartiennent à $\mathcal{D}$, le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est $a = \dfrac{3-2}{6-3} = \dfrac{1}{3}$.

II. — Modèle linéaire

Exemple 7. On considère l'évolution d'une population d'une ville sur plusieurs années. Les valeurs données sont exprimées en milliers et arrondies à l'unité.

année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
population	49	51	53	55	57	59

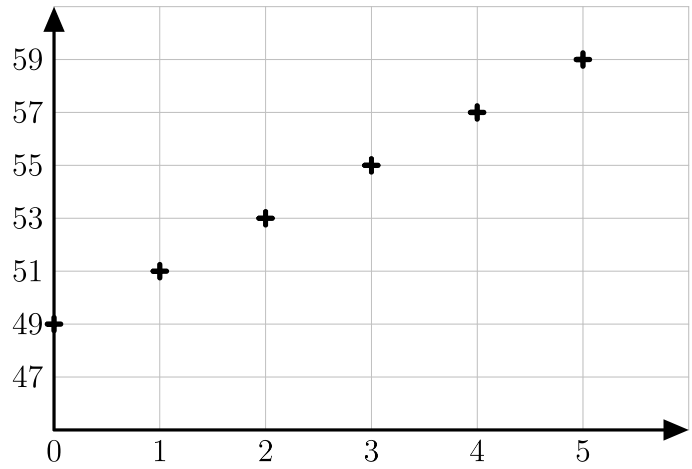
On considère 2015 comme l'année 0 et on note $u(n)$ la population à l'année n. Ainsi, $u(0) = 49$, $u(1) = 51$, $u(2) = 53$, $u(3) = 55$, $u(4) = 57$ et $u(5) = 59$.

Si on calcule les variations absolues d'une année sur l'autre, on trouve :

$$u(1) - u(0) = 2 \qquad u(2) - u(1) = 2 \qquad u(3) - u(2) = 2 \qquad u(4) - u(3) = 2 \qquad u(5) - u(4) = 2.$$

Ainsi, on constate que les variations absolues sont constantes égales à 2.

Si on représente dans un repère les points de coordonnées $(n, u(n))$, on obtient le nuage de points suivant :



On constate que ces points sont alignés sur une droite dont le coefficient directeur est 2 et dont l'ordonnée à l'origine est 49. Ainsi, l'équation réduite de cette droite est $y = 2x + 49$.

Si la population continue à évoluer de la même façon, on peut estimer qu'en 2030, la ville aura une population de $2 \times 15 + 49 = 79$ milliers d'habitants (car $2030 - 2015 = 15$ donc 2030 correspond à l'année $n = 15$).

Définition 8

On dit qu'une quantité u dépendant d'un entier naturel n a une variation linéaire si sa variation absolue $u(n + 1) - u(n)$ a une valeur constante a (c'est-à-dire une valeur a qui ne dépend pas de n).

La suite des valeurs $u(n)$ est alors appelée une suite arithmétique de raison a.

Propriété 9

Si une suite de valeurs $u(n)$ est une suite arithmétique de raison a alors

1. les points de coordonnées $(n\,; u(n))$ sont alignés sur une droite dont le coefficient directeur est a ;
2. Pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + na$.

En fait, dans la réalité, les variations absolues ne sont jamais constantes. On considère cependant que le modèle linéaire est adapté si les variations absolues varient peu. Cela se traduira par le fait que les points de coordonnées $(n, u(n))$ ne sont pas parfaitement alignés mais approximativement alignés. Dans ce cas, on peut rechercher une droite qui représenterait au mieux cette alignement approximatif. Cette droite est appelée la droite d'ajustement linéaire du nuage de points.

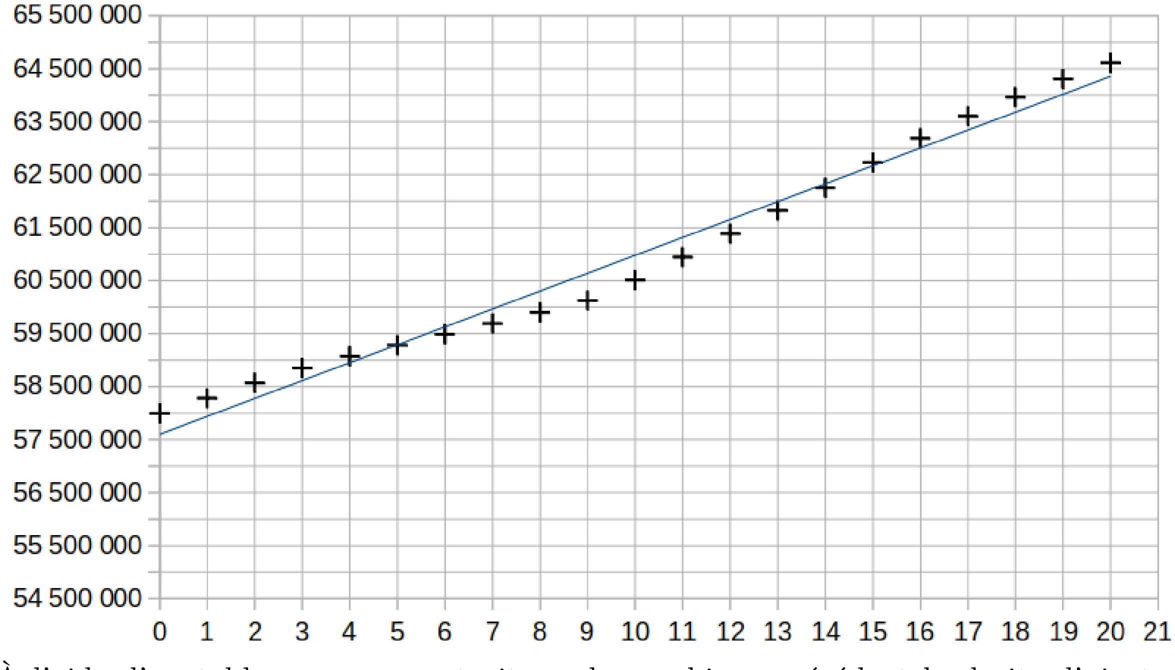
Exemple 10. Sur le site de l'INSEE [(1)], on trouve les statistiques de la population française. On a ressemblé dans le tableau suivant le nombre total d'habitants en France entre 1990 et 2010.

année	population
1990	57 996 401
1991	58 280 135
1992	58 571 237
1993	58 852 002
1994	59 070 077
1995	59 487 413
1996	59 280 577

année	population
1997	59 691 177
1998	59 899 347
1999	60 122 665
2000	60 508 150
2001	60 941 410
2002	61 385 070
2003	61 824 030

année	population
2004	62 251 062
2005	62 730 537
2006	63 186 117
2007	63 600 690
2008	63 961 859
2009	64 304 500
2010	64 612 939

Si on représente le nuage de points associé en prenant comme année 0 l'année 1990, on obtient le graphique suivant.



À l'aide d'un tableur, on a construit sur le graphique précédent la droite d'ajustement linéaire de ce nuage de points. Cette droite passe par les points de coordonnées $(10\,;61\,000\,000)$ et $(13\,;62\,000\,000)$. On peut donc estimer son coefficient directeur à

$$a = \frac{62\,000\,000 - 61\,000\,000}{13 - 10} \approx 333\,000.$$

De plus, l'ordonnée à l'origine de cette droite vaut approximativement $57\,500\,000$ donc la droite d'ajustement linéaire a une équation proche de $y = 333\,000x + 57\,500\,000$.

Selon ce modèle, on peut estimer la population en France en 2020 à $333\,000 \times 30 + 57\,500\,000 \approx 67\,500\,000$ d'habitants. (Les prévisions de l'INSEE pour 2020 sont en fait de 67 063 703.)

(1). https ://www.insee.fr/fr/statistiques/1892117 ?sommaire=1912926

III. — Modèle exponentiel

Le modèle linéaire ne s'applique qu'à des populations dont l'évolution absolue est relativement constante. Certaines populations ont une évolution beaucoup plus rapide. C'est le cas, par exemple, de la population mondiale. Le tableau suivant rassemble des estimations de celle-ci en milliard d'habitants (2).

année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
population	2,54	2,77	3,03	3,34	3,7	4,08	4,46	4,87	5,33

Si on calcule les variations absolues, on obtient :

$$0{,}23 \qquad 0{,}26 \qquad 0{,}31 \qquad 0{,}36 \qquad 0{,}38 \qquad 0{,}38 \qquad 0{,}41 \qquad 0{,}46$$

donc ces variations absolues ne sont pas constantes puisqu'elles varient du simple au double.

En revanche, si on calcule les variations relatives, on obtient :

$$0{,}09 \qquad 0{,}09 \qquad 0{,}1 \qquad 0{,}11 \qquad 0{,}1 \qquad 0{,}09 \qquad 0{,}09 \qquad 0{,}09$$

donc ces variations relatives sont relativement constantes.

Ici, le modèle linéaire ne s'applique pas. On constate un autre type d'évolution dans lequel ce ne sont pas les variations absolues mais les variations relatives qui sont (approximativement) constantes. Dans ce cas, on parle d'évolution exponentielle.

Définition 11

On dit qu'une quantité u dépendant d'un entier naturel n a une variation exponentielle si sa variation relative $\dfrac{u(n+1)-u(n)}{u(n)}$ a une valeur constante t (c'est-à-dire une valeur t qui ne dépend pas de n).

Le nombre t est alors appelé le taux de variation de u.

Dans ce cas, la variation absolue $u(n+1)-u(n)$ est proportionnelle à $u(n)$.

La suite des valeurs $u(n)$ est alors appelée une suite géométrique de raison $q = 1+t$.

Propriété 12

Si une suite de valeurs $u(n)$ est une suite géométrique de raison q alors, pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) \times q^n$.

Exemple 13. Reprenons l'exemple précédent de la population mondiale. Notons u la population mondiale en prenant 5 années comme unité de temps et $n = 0$ pour l'année 1950. Alors, le taux de variation de u est $t \approx 0{,}1$ donc la raison de u est $q \approx 1{,}1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u(n) \approx 2{,}54 \times 1{,}1^n$.

Dans ce modèle, la population en 2020 est estimée à $u(14) \approx 2{,}54 \times 1{,}1^{14} \approx 9{,}64$ milliards de personnes car $2020 = 1950 + 5 \times 14$ donc 2020 correspond à l'année $n = 14$. Dans le document cité précédemment, l'ONU évalue la population mondiale en 2020 à 7,79 milliards d'individus donc l'estimation est plus élevée que la réalité.

À ce rythme, la population mondiale en 2050 serait $u(20) \approx 2{,}54 \times 1{,}1^{20} \approx 17$ milliards d'individus. Cependant, pour diverses raisons (le manque de ressources notamment) la progression sera moindre et l'ONU estime que la population mondiale en 2050 sera de l'ordre de 10 milliards d'individus (3).

(2). Source : https ://population.un.org/wpp/Download/Standard/Population/

(3). Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Population_mondiale.

IV. — Le modèle de Malthus

1) Le texte de Malthus

En 1798, l'économiste anglais Robert Thomas Malthus publie son *Essai sur le principe de population* dans lequel il compare l'évolution de la population humaine et celles des ressources naturelles. Ainsi, au chapitre 1, il écrit :

« Selon la table d'Euler, si l'on se base sur une mortalité de 1 sur 36 et si naissances et morts sont dans le rapport de 3 à 1, le chiffre de la population doublera en 12 années et 4/5. Ce n'est point là une simple supposition : c'est une réalité qui s'est produite plusieurs fois, et à de courts intervalles. Cependant, pour ne pas être taxé d'exagérations, nous nous baserons sur l'accroissement le moins rapide, qui est garanti par la concordance de tous les témoignages. Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans, et croît ainsi de période en période selon une progression géométrique.

Il est moins facile de mesurer l'accroissement des produits de la terre. Cependant, nous sommes sûrs que leur accroissement se fait à un rythme tout à fait différent de celui qui gouverne l'accroissement de la population. [...]

Examinons dans quelle mesure la production de notre île pourrait être accrue, dans des circonstances idéales. Supposons que grâce à une excellente administration, sachant donner de puissants encouragements aux cultivateurs, la production des terres double dans les vingt-cinq premières années (il est d'ailleurs probable que cette supposition excède la vraisemblance !) Dans les vingt-cinq années suivantes, il est impossible d'espérer que la production puisse continuer à s'accroître au même rythme, et qu'au bout de cette seconde période la production de départ aura quadruplé : ce serait heurter toutes les notions acquises sur la fécondité du sol. L'amélioration des terres stériles ne peut résulter que du travail et du temps ; à mesure que la culture s'étend, les accroissements annuels diminuent régulièrement.

Comparons maintenant l'accroissement de la population à celui de la nourriture. Supposons d'abord (ce qui est inexact) que le coefficient d'accroissement annuel ne diminue pas, mais reste constant. Que se passe-t-il ? Chaque période de vingt-cinq ans ajoute à la production annuelle de la Grande-Bretagne une quantité égale à sa production actuelle. Appliquons cette supposition à toute la terre : ainsi, à la fin de chaque période de vingt-cinq ans, une quantité de nourriture égale à celle que fournit actuellement à l'homme la surface du globe viendra s'ajouter à celle qu'elle fournissait au commencement de la même période.

Nous sommes donc en état d'affirmer, en partant de l'état actuel de la terre habitable, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables à la production, ne peuvent jamais augmenter à un rythme plus rapide que celui qui résulte d'une progression arithmétique.

Comparons ces deux lois d'accroissement : le résultat est frappant. Comptons pour onze millions la population de la Grande-Bretagne, et supposons que le produit actuel de son soi suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de vingt-deux millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à quarante-quatre millions : mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que trente-trois millions d'habitants. Dans la période suivante, la population - arrivée à quatre-vingt-huit millions - ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. À la fin du premier siècle, la population sera de cent soixante-seize millions, tandis que les moyens de subsistance ne pourront suffire qu'à cinquante-cinq millions seulement.

Cent vingt et un millions d'hommes seront ainsi condamnés à mourir de faim !

Considérons maintenant la surface de la terre, en posant comme condition qu'il ne sera plus possible d'avoir recours à l'émigration pour éviter la famine. Comptons pour mille millions le nombre des habitants actuels de la Terre. La race humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Au bout de deux siècles, population et moyens de subsistance seront dans le rapport de 256 à 9 ; au bout de trois siècles, 4 096 à 13 ; après deux mille ans, la différence sera immense et incalculable. » [(4)]

(4). Source : http ://classiques.uqac.ca/classiques/maltus_thomas_robert/essais_population/essais_population.html

2) Explications et liens avec les modèles linéaire et exponentiel

Commençons par expliquer les résultats du premier paragraphe. Malthus se base sur un taux de mortalité de $t_m = \frac{1}{36}$ et sur un nombre de naissances égal au triple du nombre de décès c'est-à-dire un taux de natalité de $t_n = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$. Dans ce cas, le taux de variation de la population est $t = t_n - t_m = \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$. De plus, il fait l'hypothèse d'une croissance exponentielle de la population donc la raison de la suite géométrique associée est $1 + t = \frac{19}{18}$. Ainsi, chaque année la population est multipliée par $\frac{19}{18}$ et on cherche un temps au bout duquel la population a été multipliée par 2. En admettant que ce qui a été vu pour les entiers peut s'étendre à des puissances réelles quelconques, on cherche donc un réel x tel que $(\frac{19}{18})^x = 2$. À l'aide d'une table de calcul (la table d'Euler), Malthus conclut que $x = 12 + \frac{4}{5} = 12{,}8$ années. Avec une calculatrice, on peut en effet vérifier que $(\frac{19}{18})^{12{,}8} \approx 1{,}998$ donc une valeur très proche de 2.

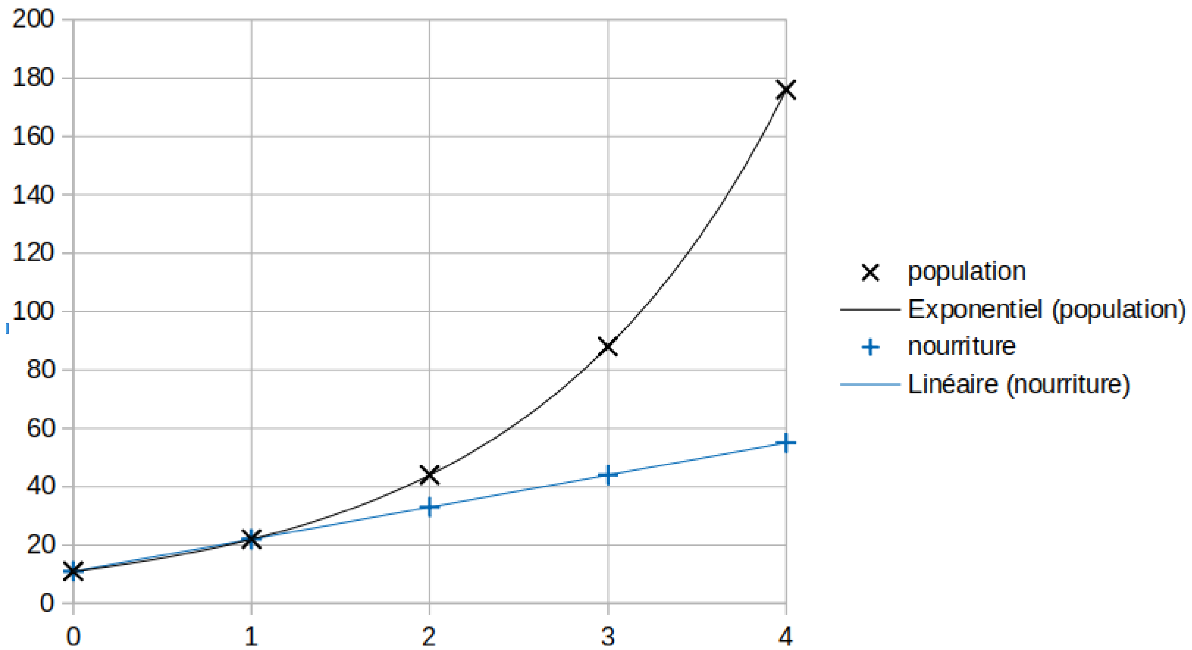
Pour ne pas être accuser d'exagérer, il décide de prendre une estimation basse en partant du fait que la population double tous les 25 ans. Il prend alors cette période comme unité de temps et estime que, si la population humaine a une évolution exponentielle, la production de nourriture a une évolution linéaire, celle-ci augmentant d'une unité tous les 25 ans.

En prenant l'exemple de la Grande-Bretagne du début du XIXe siècle, il s'intéresse alors à deux suites : la suite de valeurs $u(n)$ de la population et la suite de valeurs $v(n)$ des ressources alimentaires où n désigne une unité de temps c'est-à-dire une période de 25 ans. Dans son modèle, u est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u(0) = 11$ (en millions) et v est une suite arithmétique de raison 11. Il ne précise pas le premier terme de v mais suppose que $v(0)$ est la quantité de ressources nécessaire et suffisante pour nourrir les 11 millions de la population. Fixons $v(0) = 11$ dans une unité fictive. On a alors, pour tout entier naturel n, $u(n) = 11 \times 2^n$ et $v(n) = 11 + 11n$. Ses calculs le conduisent alors aux résultats suivants :

année	1800	1825	1850	1875	1900
n	0	1	2	3	4
$u(n)$	11	22	44	88	176
$v(n)$	11	22	33	44	55
$u(n) - v(n)$	0	0	11	44	121

La dernière ligne du tableau représente les nombres de personnes ne pouvant être nourries. Ainsi, Malthus conclut qu'en un siècle, 121 millions des personnes seront condamnées à la famine.

On peut visualiser les deux évolutions à l'aide du graphique suivant.



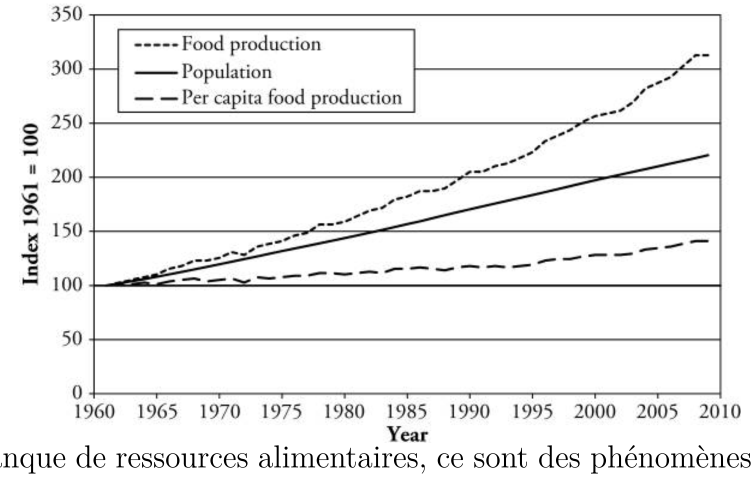
3) Limites et critiques du modèle de Malthus

Le modèle exponentiel pour l'accroissement de la population peut s'avérer en adéquation avec la réalité mais seulement sur des temps relativement courts. Ainsi, on a vu précédemment que la croissance exponentielle de la population mondiale enregistrée ces 30 dernières années ne sera plus valable dans les années 30 ans à venir. On voit d'ailleurs que la prédiction de Malthus sur l'évolution de la population mondiale ne s'est pas réalisée car si celle-ci était bien d'environ 1 milliards d'individus en 1800, elle était d'environ 1,6 milliards en 1900 [(5)] et non pas de 16 milliards comme le prévoyait son modèle.

Malthus lui-même reconnaît dans son ouvrage que des obstacles vont empêcher une croissance indéfinie de la population. Il classe ces obstacles en deux catégories : d'un côté, les obstables « répressifs » qui sont tous les facteurs externes à l'espèce humaine qui engendre une surmortalité comme la famine, la guerre, les épidémies ; d'un autre côté, les obstacles « préventifs » qui regroupent les comportements humains visant à diminuer la natalité comme la contraception, les politiques natalistes, le célibat.

Par ailleurs, le principe de progression arithmétique des ressources alimentaires est mise en doute dès 1848 par le logicien et économique John Stuart Mill qui met en avant le fait que Malthus ne donne aucun argument pour étayer cette hypothèse de croissance linaire [(6)]. De plus, l'absence de liens entre population et capacité de production sous-jacente dans le modèle Malthus a été l'objet de nombreuses critiques notamment par l'économiste danoise Ester Boserup dans son ouvrage *Évolution agraire et pression démographique*, paru en 1965. Pour elle, « la juxtaposition des croissances arithmétique des ressources et géométrique de la population n'a pas de raison d'être puisque la première est déterminée par la seconde. L'innovation, et donc la propension à produire davantage, est une fonction directe de l'effectif de la population. Ester Boserup donne à ce propos une correspondance entre des systèmes de culture (cueillette, agriculture itinérante, jachère de savane...) et des fourchettes de densité de population observées à travers de multiples exemples historiques. Si ces relations ne sont pas systématiques dans leur déroulement chronologique en termes d'effectifs de population, en revanche leur sens l'est. C'est ainsi que l'on a pu observer, notamment dans certaines régions d'Amérique latine, une régression des techniques agricoles à la suite d'une baisse des effectifs de la population. » [(7)]

Ceci s'est confirmé dans les faits comme le montre le graphique suivant mettant en regard la production alimentaire et la population mondiales entre 1960 et 2010. [(8)].



De plus, on observe un phénomène de transition démographique lorsque la population d'un pays s'enrichit. Les familles ont alors de moins en moins d'enfants, certains pays comme le Japon ou l'Allemagne connaissant même aujourd'hui une dénatalité (c'est-à-dire un nombre de naissance ne permettant pas le renouvellement de la population). [(9)]

Ainsi, plus qu'un problème lié au manque de ressources alimentaires, ce sont des phénomènes sociaux-culturels (enrichissement de la population, développement et accès généralisé à la contraception) qui freinent la natalité - au moins dans les pays industrialisés.

(5). Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Population_mondiale.

(6). John Stuart Mill, Principes d'économie politique, II, XI, 6.

(7). Frédéric Sandron, *Croissance économique et croissance démographique : théories, situations, politiques*, in : Charbit Y. (dir.) Le monde en développement : démographie et enjeux socio-économiques, 2002, Paris : La Documentation Française, 15-41. Disponible ici : https ://horizon.documentation.ird.fr/exl-doc/pleins_textes/divers17-09/010029446.pdf

(8). David Lam, How the World Survived the Population Bomb : Lessons From 50 Years of Extraordinary Demographic History, Demography. 2011 Nov ; 48(4) : 1231-1262. Disponible ici : https ://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3777609/

(9). Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus

Le modèle linéaire

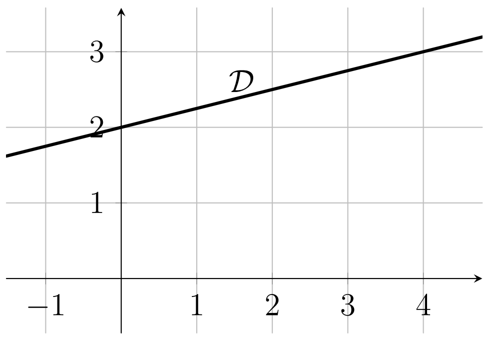
Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, calculer la variation absolue et la variation relative d'une quantité évoluant de la valeur V_i à la valeur V_f.

a) $V_i = 1$ et $V_f = 3$ b) $V_i = 4$ et $V_f = 2$ c) $V_i = 10$ et $V_f = 100$.

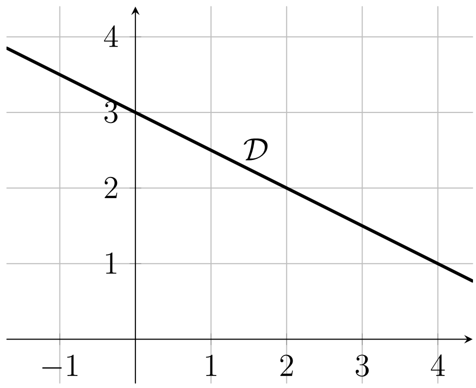
Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$.

1. a) $\mathcal{D} : y = 3x + 1$ b) $\mathcal{D} : y = x - 3$ c) $\mathcal{D} : y = 2 - 3x$

2. a)



b)



Exercice 3. Dans chaque cas, indiquer si les nombres de la liste peuvent ou non être les premiers termes d'une suite arithmétique.

a) 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 b) 2 ; 7 ; 12 ; 17 ; 27 ; 32 c) 8 ; 4 ; 0 ; −4 ; −8

Exercice 4. Soit u une suite arithmétique de premier terme $u(0) = 3$ et de raison 5.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, $u(n)$ en fonction de n.

2. Calculer $u(5)$ et $u(10)$.

Exercice 5. Une population a une évolution linéaire. Cette population est de 352 000 individus en 2010 et de 356 000 individus en 2014. Quelle est la population en 2021 ?

Exercice 6. La population des Hauts-de-France a augmenté d'environ 9400 par an entre 1990 et 1999. En 1990, la population était de 5 770 671.

1. Justifier qu'on est dans une situation où le modèle linéaire est adapté.

2. On prend l'année 1990 comme année 0 et on considère la suite u telle que $u(n)$ modélise la population des Hauts-de-France à l'année n.

a. Déterminer l'expression de $u(n)$ en fonction de n pour tout entier naturel n.

b. Calculer la population des Hauts-de-France en 1999.

c. En 2008, la population des Hauts-de-France est 5 931 091. L'évolution de la population semble-t-elle suivre le même modèle au-delà de 1999 ?

Exercice 7. Le tableau suivant donne la population européenne, exprimée en millions d'habitants, entre 1980 et 1988 (les valeurs ont été arrondies au dixième près) [1].

année	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
population	693,6	696,5	699,3	702,1	704,8	707,6	710,4	713,3	716,1

1. Justifier que le modèle linéaire est adapté à l'évolution de cette population. Dans la suite, on se place dans ce modèle.

2. On note $u(n)$ la population européenne à l'année $1980 + n$ (c'est-à-dire on prend 1980 comme année 0).

a. Quelle est la nature de la suite u ?

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, $u(n)$ en fonction de n.

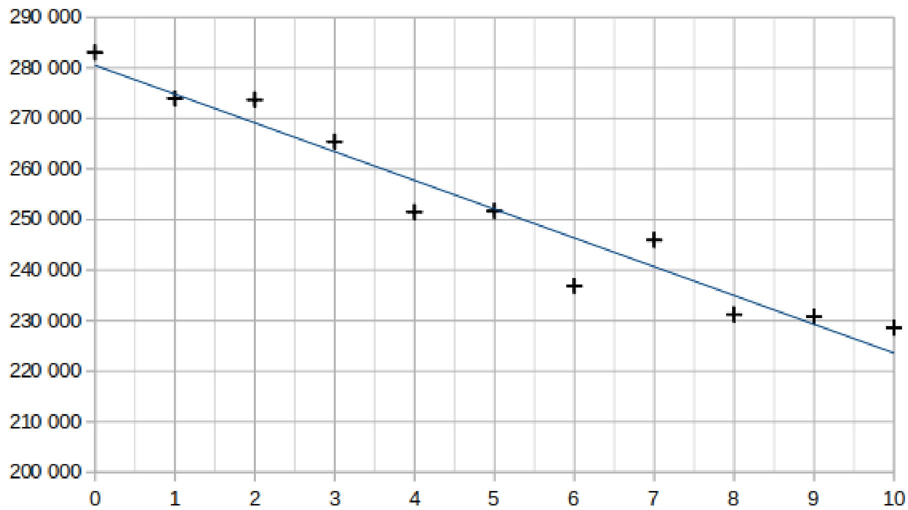
c. Dans ce modèle, quelle serait la population européenne en 2000 ?

d. La population européenne en 2000 était en fait d'environ 725,6 millions d'individus. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8. Le tableau suivant donne les nombres de mariages entre personnes de sexes différents en France entre 2005 et 2015 [2].

année	2005	2006	2007	2008	2009	2010
population	283 036	273 914	273 669	265 404	251 478	252 654
année	2011	2012	2013	2014	2015	
population	236 826	245 930	231 225	230 770	228 565	

On a représenté sur le graphique suivant le nombre de mariages entre personnes de sexes différents entre 2005 et 2015, en prenant 2005 comme année 0. On souhaite modéliser cette évolution par un modèle linéaire. Pour cela, on a également tracé sur le graphique la droite d'ajustement linéaire.



1. Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine de cette droite.

2. Déterminer le coefficient directeur de cette droite.

3. Estimer le nombre de mariages entre personnes de sexes différents en France 2018.

4. L'INSEE estime le nombre de mariages entre personnes de sexes différents à 228 349 en 2019. Que peut-on en déduire ?

1. Source : https ://population.un.org/wpp/Download/Standard/Population/
2. Source : https ://www.insee.fr/fr/statistiques/2381498#tableau-figure1

Le modèle linéaire – Corrigés

Exercice 1.

a) La variation absolue est $V_f - V_i = 3 - 1 = 2$ et la variation relative est $\dfrac{V_f - V_i}{V_i} = \dfrac{2}{1} = 2$.

b) La variation absolue est $V_f - V_i = 2 - 4 = -2$ et la variation relative est $\dfrac{V_f - V_i}{V_i} = \dfrac{-2}{4} = -0{,}5$.

c) La variation absolue est $V_f - V_i = 100 - 10 = 90$ et la variation relative est $\dfrac{V_f - V_i}{V_i} = \dfrac{90}{10} = 9$.

Exercice 2.

1. a) Le coefficient directeur est $a = 3$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 1$.
   b) Le coefficient directeur est $a = 1$ et l'ordonnée à l'origine est $b = -3$.
   c) Le coefficient directeur est $a = -3$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 2$.
2. a) L'ordonnée à l'origine est $b = 2$. De plus, la droite passe par les points $\mathrm{A}(0\,;2)$ et $\mathrm{B}(4\,;3)$ donc le coefficient directeur est $a = \dfrac{3-2}{4-0} = \dfrac{1}{4} = 0{,}75$.
   b) L'ordonnée à l'origine est $b = 3$. De plus, la droite passe par les points $\mathrm{A}(0\,;3)$ et $\mathrm{B}(2\,;2)$ donc le coefficient directeur est $a = \dfrac{2-3}{2-0} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$.

Exercice 3.

a) Les variations absolues sont constantes : $4 - 1 = 3$, $7 - 4 = 3$, $10 - 7 = 3$, $13 - 10 = 3$ et $16 - 13 = 3$ donc les nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3.

b) Les variations absolues ne sont pas constantes : $17 - 12 = 5$ mais $27 - 17 = 10$ donc les nombres ne sont pas les premiers termes d'une suite arithmétique.

c) Les variations absolues sont constantes : $4 - 8 = -4$, $0 - 4 = -4$, $-4 - 0 = -4$ et $-8 - (-4) = -4$ donc les nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison -4.

Exercice 4.

1. Pour tout entier naturel n, $u(n) = 3 + 5n$.
2. Ainsi, $u(5) = 3 + 5 \times 5 = 28$ et $u(10) = 3 + 5 \times 10 = 53$.

Exercice 5. Notons $u(n)$ la population à l'année n en prenant 2010 comme année 0. Alors, u est une suite arithmétique donc, en notant a la raison de cette suite, pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + na = 352\,000$. De plus, comme la population en 2014 est $356\,000$ et comme 2014 correspond à l'année $2014 - 2010 = 4$, on a $u(4) = 356\,000$ c'est-à-dire $352\,000 + 4a = 356\,000$. On en déduit que $4a = 356\,000 - 352\,000 = 4000$ donc $a = \dfrac{4000}{4} = 1000$. Comme $2021 - 2010 = 11$, on en déduit que la population en 2021 est $u(11) = 352\,000 + 11 \times 1000 = 363\,000$.

Exercice 6.

1. D'après l'énoncé, la variation absolue de la population est approximativement constante donc le modèle linéaire est adapté.
2. **a.** Pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + 9400n$ avec $u(0) = 5\,770\,671$ donc $u(n) = 5\,770\,671 + 9400n$.
   b. Comme $1999 - 1990 = 9$, la population des Hauts-de-France en 1999 était de (environ) $u(9) = 5\,770\,671 + 9400 \times 9 = 5\,855\,271$ habitants.

c. Si le modèle reste valable au-delà de 1999, comme $2008 - 1990 = 18$, la population en 2008 doit être proche de $u(18) = 5\,770\,671 + 9400 \times 18 = 5\,939\,871$. Cette population étant en réalité $5\,931\,091$, ce qui est très proche de $u(18)$ (l'erreur est de l'ordre de $\dfrac{5\,939\,871 - 5\,931\,091}{5\,931\,091} \approx 0{,}15\%$), on peut penser que l'évolution de la population a continué à suivre le même modèle au-delà de 1999.

Exercice 7.

1. Calculons les variations absolues :

$696{,}5 - 693{,}6 = 2{,}9$ $\quad 699{,}3 - 696{,}5 = 2{,}8$ $\quad 702{,}1 - 699{,}3 = 2{,}8$ $\quad 704{,}8 - 702{,}1 = 2{,}7$

$707{,}6 - 704{,}8 = 2{,}8$ $\quad 710{,}4 - 707{,}6 = 2{,}8$ $\quad 713{,}3 - 710{,}4 = 2{,}9$ $\quad 716{,}1 - 713{,}3 = 2{,}8$.

On constate que ce évolutions ne sont pas tout à fait constantes mais qu'elles varient peu. Ainsi, le modèle linéaire est adapté à l'évolution de cette population. On approchera les différentes variations absolues par la moyenne de celles-ci :

$$\frac{2{,}9 + 2{,}8 + 2{,}8 + 2{,}7 + 2{,}8 + 2{,}8 + 2{,}9 + 2{,}8}{8} \approx 2{,}8$$

2. **a.** La suite u est une suite arithmétique de raison 2,8.

b. Pour tout entier naturel n, $u(n) = 693{,}6 + 2{,}8n$.

c. Comme $2000 - 1980 = 20$, dans ce modèle, la population européenne en 2000 est estimée à $u(20) = 693{,}6 + 2{,}8 \times 20 = 749{,}6$ millions d'habitants.

d. L'estimation obtenue est assez proche de la valeur réelle (l'erreur commise est $\dfrac{749{,}6 - 725{,}6}{725{,}6} \approx 3{,}3\%$) donc on peut considérer que la population européenne à continuer à avoir une évolution relativement constante au-delà de 1988.

Exercice 8.

1. L'ordonnée à l'origine de cette droite est (approximativement) 280 000.

2. La droite passe (approximativement) par les points $\mathrm{A}(0\,;280\,000)$ et $\mathrm{B}(5\,;253000)$ (qui correspond à l'année 2010) donc le coefficient directeur est

$$a \approx \frac{253000 - 280000}{5 - 0} \approx -5400.$$

3. L'équation de la droite est donc (approximativement) $y = -5400x + 280\,000$ donc, comme $2018 - 2005 = 13$, on peut estimer le nombre de mariages entre personnes de sexes différents en France en 2018 à environ $-5400 \times 13 + 280\,000 \approx 210\,000$.

4. Comme $2019 - 2005 = 14$, on peut estimer le nombre de mariages entre personnes de sexes différents en France en 2019 à environ $-5400 \times 14 + 280\,000 \approx 204\,000$. On observe un écart assez important entre l'estimation et la valeur réelle (le pourcentage d'erreur est de l'ordre de $\dfrac{228\,349 - 204\,000}{228\,349} \approx 11\%$) donc on peut en déduire que l'évolution n'a pas continué à suivre un modèle linéaire au-delà de l'année 2015. On constate d'ailleurs que les trois dernières valeurs sont quasiment égales, ce qui laisse penser à un ralentissement de la diminution du nombre de mariages.

Le modèle exponentiel

Exercice 1. Dans chaque cas, indiquer si les nombres de la liste peuvent ou non être les premiers termes d'une suite géométrique. Si c'est le cas, déterminer la raison de cette suite.

a) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 b) 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125 c) 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

Exercice 2. Soit u une suite géométrique de premier terme $u(0) = 2$ et de raison 3.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, $u(n)$ en fonction de n.

2. Calculer $u(3)$ et $u(5)$.

Exercice 3. Une population a une évolution exponentielle. Cette population est de 25 600 individus en 2010 et de 30 976 individus en 2012. On note $u(n)$ la population de cette ville à l'année $2010 + n$.

1. Donner la nature de la suite u et déterminer sa raison.

2. Quel est le taux de variation annuel de cette population ?

3. Donner une estimation de la population en 2020.

Exercice 4. La population de la région Occitanie a été multipliée par 1,0071 chaque année entre 1990 et 1999. En 1990, la population de la région était de 4 546 249.

1. Justifier que l'on est dans une situation où le modèle exponentiel est adapté.

2. On prend l'année 1990 comme année 0 et on considère la suite u telle que $u(n)$ modélise la population de l'Occitanie à l'année n.

a. Déterminer l'expression de $u(n)$ en fonction de n pour tout entier naturel n.

b. Calculer la population de l'Occitanie en 1999.

c. En 2008, la population de l'Occitanie est 5 419 946. L'évolution de la population semble-t-elle suivre le même modèle au-delà de 1999 ?

Exercice 5. La perruche à collier est une espèce originaire d'Afrique centrale et occidentale, d'Asie, d'Inde et du Pakistan. Elle a été importée en Europe comme oiseau domestique mais certains individus de cette espèce se sont échappés des conteneurs de transport et ont commencé à nicher près des zones aéroportuaires. Ainsi, on commence à en signaler en Île-de-France à partir de 1990. Différents comptages[1] ont permis d'obtenir les résultats suivants :

année	2006	2008	2012	2014
population	500	1 050	2 700	5 000

Dans « Dynamique de population de la perruche à collier *Psittacula krameri* introduite en Île-de-France »[2], les auteurs écrivent : « on observe une tendance de type exponentielle ».

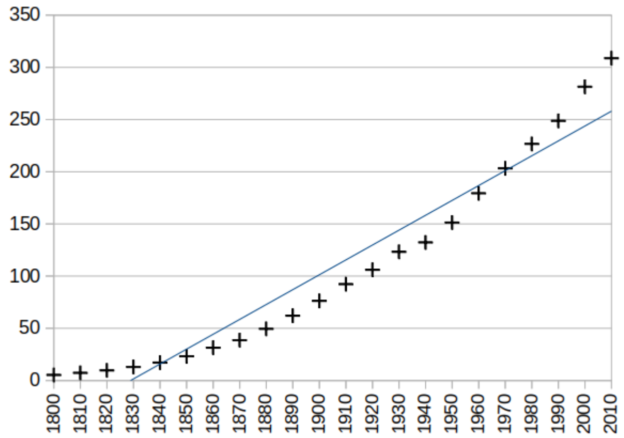
Déterminer si cette affirmation est justifiée ou non.

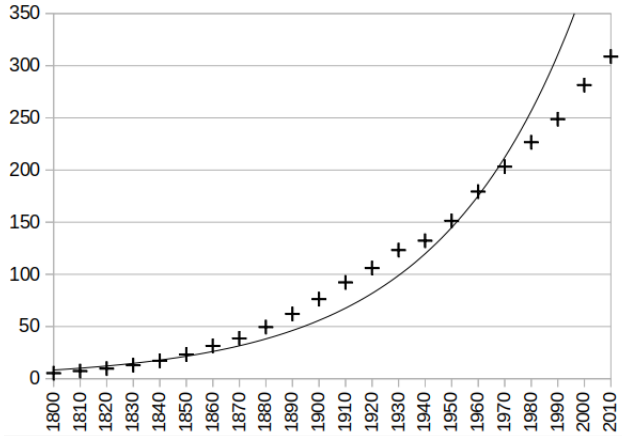
1. Source : http ://perruche-a-collier.fr/images/PDF/ALauda2015perruches-IDF.pdf
2. Source : http ://perruche-a-collier.fr/images/PDF/ALauda2015perruches-IDF.pdf, p. 169

Exercice 6. Le tableau suivant donne la population des États-Unis exprimée en millions d'habitants entre 1800 et 2010 arrondie au dixième près [3].

année	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900
population	5,2	7,2	9,6	12,9	17,1	23,2	31,4	38,6	49,4	62	76,2
année	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
population	92,2	106	123,2	132,2	151,3	179,3	203,2	226,6	248,7	281,4	308,7

Sur les graphiques suivants, on a représenté les données précédentes. Sur le graphique de gauche, on a tracé la droite d'ajustement linéaire et sur celui de droite la courbe d'ajustement exponentiel.





1. Au vu des graphiques précédents, le modèle linéaire ou le modèle exponentiel semble-t-il adapté pour décrire l'évolution de la population des États-Unis entre 1800 et 2010.

2. On s'intéresse à la période 1800-1860.

- **a.** Calculer sur cette période les variations absolues et les variations relatives.
- **b.** Quel modèle (linéaire ou exponentiel) semble le plus adapté pour décrire l'évolution de la population entre 1800 et 1860 ?
- **c.** Pour ce modèle, déterminer la nature de la suite associée et la raison de cette suite. (On arrondira à 10^{-2} près.)
- **d.** Si l'évolution avait continué de façon similaire à cette période, quelle aurait été la population des États-Unis en 2000 ?

3. On s'intéresse à la période 1950-1990.

- **a.** Calculer sur cette période les variations absolues et les variations relatives.
- **b.** Quel modèle (linéaire ou exponentiel) semble le plus adapté pour décrire l'évolution de la population entre 1950 et 1990 ?
- **c.** Pour ce modèle, déterminer la nature de la suite associée et la raison de cette suite. (On arrondira à l'entier le plus proche.)
- **d.** En utilisant ce modèle, estimer la population des États-Unis en 2020
- **e.** Rechercher la valeur exacte de la population des États-Unis en 2020 et comparer avec l'estimation précédente.

3. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9mographie_des_%C3%89tats-Unis

Le modèle exponentiel – Corrigés

Exercice 1.

a) Les nombres sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 (chaque nombre est le double du précédent).

b) Les nombres sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (chaque nombre est la moitié du précédent).

c) Les nombres ne sont pas les premiers termes d'une suite géométrique car $2 = 2 \times 1$ mais $3 \neq 2 \times 2$.

Exercice 2. Soit u une suite géométrique de premier terme $u(0) = 2$ et de raison 3.

1. Pou tout entier naturel n, $u(n) = 2 \times 3^n$.
2. $u(3) = 2 \times 3^3 = 54$ et $u(5) = 2 \times 3^5 = 486$.

Exercice 3.

1. La suite u est une suite géométrique. Notons q sa raison. Alors, $u(2) = q^2 u(0)$ avec, d'après l'énoncé, $u(0) = 25\,600$ et $u(2) = 30\,976$ donc $30\,976 = q^2 \times 25\,600$. Ainsi, $q^2 = \frac{30\,976}{25\,600} = 1{,}21$. Comme $q > 0$, on en déduit que $q = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$.
2. Par propriété, le taux de variation annuel t vérifie $q = 1 + t$ donc $t = q - 1 = 0{,}1$.
3. Comme $2020 = 2010 + 10$, on peut estimer la population en 2020 à $u(10) = u(0) \times q^{10} = 25\,600 \times 1{,}1^{10} \approx 66\,400$ individus.

Exercice 4.

1. La population est multipliée par le même nombre chaque année : on est donc dans une situation où le modèle exponentiel est adapté.
2. On prend l'année 1990 comme année 0 et on considère la suite u telle que $u(n)$ modélise la population de l'Occitanie à l'année n.
   - **a.** La suite u est une suite géométrique de raison $q = 1{,}0071$ et de premier terme $u(0) = 4\,546\,249$ donc, pour tout entier naturel n, $u(n) = 4\,546\,249 \times 1{,}0071^n$.
   - **b.** Comme $1999 = 1990 + 9$, la population de l'Occitanie en 1999 est d'environ $u(9) \approx 4\,845\,143$ habitants.
   - **c.** On a $2008 = 1990 + 18$ donc, si le modèle perdure, on peut estimer la population de l'Occitanie en 2008 a environ $u(18) \approx 5\,163\,687$ habitants. Or, la valeur de population en 2008 est de $5\,419\,946$ habitants ce qui fait un écart de $\frac{5419946 - 5163687}{5419946} \approx 5\%$. On est à la limite d'une marge d'erreur acceptable. Il est difficile de trancher ici avec seulement ces informations.

Exercice 5. Ici, il faut prendre garde au fait que les intervalles de temps ne sont pas constants (2 ans puis 4 ans puis 2 ans). On ne peut donc pas calculer les taux de variation.

Si on prend comme unité de temps 2 années, l'évolution est exponentielle si la population est multipliée par le même nombre q tous les deux ans. On doit donc avoir $q = \frac{1050}{500} = 2{,}1$, $q^2 = \frac{2700}{1050} = \frac{18}{7}$ donc $q \approx 1{,}6$ et $q = \frac{5000}{2700} = \frac{50}{27} \approx 1{,}8$.

Avec aussi peu de valeurs, il est difficile de dire si ces valeurs sont relativement constantes ou pas. Si on en prend la moyenne arithmétique, on trouve $\frac{2{,}1+1{,}6+1{,}8}{3} = 1{,}8$.

Si on considère la suite géométrique u de premier terme $u(0) = 500$ et de raison $q = 1{,}8$, on a, pour tout entier n, $u(n) = 500 \times 1{,}8^n$.

Pour $n = 0$ (année 2006), on trouve évidemment $u(0) = 500$, pour $n = 2$ (année 2008), on trouve $u(1) = 900$, pour $n = 3$ (année 2012), on trouve $u(3) \approx 2900$ et, pour $n = 4$ (année 2014), on trouve $u(4) \approx 5250$.

On n'obtient donc pas exactement les valeurs du tableau mais tout de même des nombres du même ordre de grandeur. L'affirmation selon laquelle on observe une tendance de type exponentielle est justifiée.

Remarque. L'utilisation de la moyenne arithmétique ci-dessus n'est mathématiquement pas correcte. Pour trouver un coefficient multiplicateur moyen équivalent à trois coefficients multiplicateurs successifs, il faut utiliser une autre moyenne appelée la moyenne géométrique. En l'occurrence, on cherche q tel que $q^3 = 2{,}1 \times 1{,}6 \times 1{,}8$ donc $q = \sqrt[3]{2{,}1 \times 1{,}6 \times 1{,}8} \approx 1{,}8$. On voit qu'on trouve un résultat proche de celui de la moyenne arithmétique donc le calcul ci-dessus, même s'il n'est pas fondé mathématiquement, donne un résultat correct. Cela n'est pas dû au hasard, on peut montrer que pour des coefficients assez proches de 1, les moyennes arithmétiques et géométriques sont relativement proches.

Exercice 6.

1. Au vu des graphiques, aucun des deux modèles ne semble adapté pour décrire l'évolution de la population des États-Unis sur l'ensemble de la période entre 1800 et 2010.

2. On s'intéresse à la période 1800-1860.

- **a.** Sur la période 1800-1860, les variations absolues sont 2, 2,4, 3,3, 4,2, 5,9 et 8,2 et les variations relatives sont (environ) 0,38, 0,33, 0,34, 0,33, 0,36 et 0,35.
- **b.** Les variations absolues ne sont pas du constantes (elles varient du simple au quadruple) alors que les variations relatives sont relativement constantes. Ainsi, le modèle exponentiel est plus adapté pour décrire l'évolution de la population entre 1800 et 1860.
- **c.** La suite associée est une suite géométrique. Le taux de variation est relativement constant autour de 0,35 donc on peut prendre pour la raison $q = 1{,}35$.
- **d.** Puisque $2000 = 1800 + 20 \times 10$, si l'évolution avait continué de façon similaire à cette période, la population des États-Unis en 2000 aurait été de $u(20) = 5{,}2 \times 1{,}35^{20} \approx 2100$ millions d'individus soit plus de 2 milliards de personnes.

3.

- **a.** Sur la période 1950-1990, les variations absolues sont 28, 23,9, 23,4 et 22,1 et les variations relatives sont (environ) 0,19, 0,13, 0,12 et 0,10.
- **b.** Les variations relatives ne sont pas du constantes (elles varient du simple au double) alors que les variations absolues sont plus stables. Ainsi, le modèle linéaire est plus adapté pour décrire l'évolution de la population entre 1950 et 1990.
- **c.** La suite associée est une suite arithmétique. La variation relative moyenne est 24,35 donc on peut prendre pour la raison $q = 24$.
- **d.** Comme $2020 = 1950 + 7 \times 10$, dans ce modèle, la population des États-Unis en 2020 est estimée à $u(7) = 151{,}3 + 24 \times 7 \approx 320$ millions d'habitants.
- **e.** D'après Wikipédia [1], la population des États-Unis en 2020 est d'environ 330 millions d'habitants. L'estimation précédente est donc assez bonne avec une erreur de $\frac{330-320}{330} \approx 3\%$.

1. https ://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9mographie_des_%C3%89tats-Unis

Le modèle de Malthus

Sauf mention du contraire, toutes les données utilisées dans la suite sont issues du site de l'INED : https ://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/chiffres/. Lorsque ce n'est pas précisé, elles correspondent à des estimations pour l'année 2021.

Exercice 1.

1. La population en France métropolitaine en 2006 était de 61,4 millions et la population en France métropolitaine en 2013 était de 63,7 millions.

a. Quel est le taux de variation de la population entre 2006 et 2013 ?

b. En se plaçant dans le modèle de Malthus, évaluer la population française en 2020.

2. La population française vivant dans les départements d'Outre-Mer (DOM) était de 1,787 millions en 2006 et elle a augmenté de 4,2% en 7 ans.

a. Déterminer la population des DOM en 2013.

b. En se plaçant dans le modèle de Mathus, évaluer la population des DOM en 2020.

c. Cette population était en réalité de 2,172 millions d'habitants. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2.

1. En Argentine, la population totale est de 45,6 millions d'habitants. Dans cette population, on estime que le taux de natalité est de 16,5‰ et que le taux de mortalité est de 7,6‰.

a. Calculer le taux de variation de la population argentine.

b. En suivant le modèle de Malthus, à combien peut-on évaluer la population argentine en 2030.

2. Au Japon, le taux de variation de la population est de −3,5‰ pour une population totale de 126 millions d'habitants.

En suivant le modèle de Malthus, estimer la population japonaise en 2030.

Exercice 3. Au Canada, le taux de natalité est estimé à 10,2‰ et le taux de mortalité à 7,9‰.

1. Calculer le taux de variation de la population en suivant la méthode de Malthus.

2. Le taux de variation de la population canadienne est estimé à 8,5‰.

a. Comparer cette valeur au résultat du calcul précédent. Que constate-t-on ?

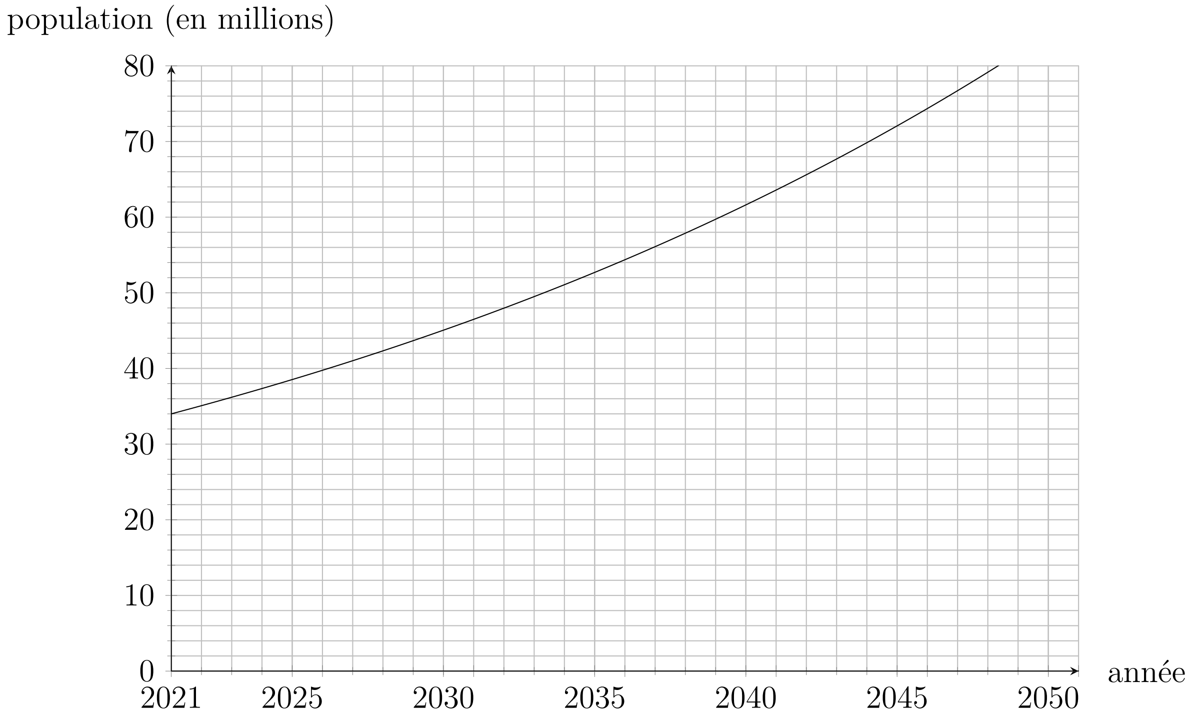
b. Proposer une explication.

Exercice 4. Dans son texte *Essai sur le principe de population*, Malthus estime le temps doublement d'une population qui a un taux de mortalité de 1 sur 36 et un taux de natalité de 1 sur 12 à 12 années et 4/5. Pour déterminer ce nombre d'années, il fait appel à la table d'Euler.

Dans l'exercice qui suit, nous allons voir plusieurs méthodes pour estimer le temps de doublement (arrondi à l'année près) d'une population à partir de son taux de variation.

1. Méthode graphique

La population de l'Angola compte environ 34 millions d'individus et a un taux de variation de 31,8‰. On a représenté ci-dessous l'évolution de cette population en sa plaçant dans le modèle de Malthus.



Déterminer graphiquement le temps de doublement (en années entières) de la population angolaise.

2. **À l'aide d'un tableur**

   Le tableau suivant représente une simulation sur tableur de l'évolution de la population de la Guinée Équatoriale, exprimée en millions d'habitants, en supposant qu'elle satisfait le modèle de Malthus.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	année	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035	
2	population	1,45	1,5	1,55	1,6	1,65	1,7	1,75	1,81	1,87	1,93	1,99	2,06	2,12	2,19	2,26	
3	année	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049	2050	
4	population	2,34	2,41	2,49	2,57	2,65	2,74	2,83	2,92	3,01	3,11	3,21	3,31	3,42	3,53	3,65	
5																	

   a. Déterminer la population de la Guinée Équatoriale en 2021.

   b. Déterminer le taux de variation annuelle de cette population.

   c. Déterminer le temps de doublement (en années entières) de la population guinéenne.

3. **À l'aide de la calculatrice**

   La population de Mongolie a un taux de variation de 15‰.

   En tâtonnant à l'aide de la calculatrice, déterminer le temps de doublement (en années entières) de la population mongole.

4. **Par le calcul** (uniquement pour élèves suivant le spécialité mathématiques ou l'option mathématiques complémentaires)

   La population de la Corée du Sud a un taux de variation de 0,6‰.

   On note n le nombre d'années entières nécessaires au doublement de la population sud-coréenne. Écrire une équation vérifiée par n puis résoudre cette équation et conclure.

Exercice 5. Dans *Le Capital*, K. Marx écrit : « Une loi de population abstraite et immuable n'existe que pour la plante et l'animal, et encore seulement tant qu'ils ne subissent pas l'influence de l'homme » [1].

En quoi cette affirmation s'oppose au modèle de Malthus ?

1. Karl Marx, Le Capital, ch. XXV, III, traduction de J. Roy, 1872, Paris, disponible sur https ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k1232830/f1n351.pdf (p. 279)

Le modèle de Malthus – Corrigés

Exercice 1.

1. La population en France métropolitaine en 2006 était de 61,4 millions et la population en France métropolitaine en 2013 était de 63,7 millions.
   - **a.** Le taux de variation de la population entre 2006 et 2013 est $\frac{63{,}7-61{,}4}{61{,}4} \approx 0{,}037$ donc environ 3,7%.
   - **b.** En se plaçant dans le modèle de Malthus, la population a une évolution exponentielle donc le taux de variation est constant. Il est donc de 3,7‰tous les 7 ans. Ainsi, on peut estimer la population française en 2020 à $(1 + 0{,}037) \times 63{,}7 \approx 66{,}1$ millions d'habitants.
2. - **a.** La population des DOM en 2013 est $1{,}787 \times (1 + 0{,}042) \approx 1{,}862$ millions d'habitants.
   - **b.** En se plaçant dans le modèle de Mathus, la population des DOM augmente encore de 4,2% en 7 ans donc la population des DOM en 2020 est $1{,}862 \times (1 + 0{,}042) \approx 1{,}919$ millions d'habitants.
   - **c.** On a un écart relatif entre la valeur estimée et la valeur réelle de $\frac{2{,}172-1{,}919}{2{,}172} \approx 11{,}6\%$ ce qui représente une différence significative. On peut donc conclure que le modèle de Malthus n'est pas adapté ici.

Exercice 2.

1. En Argentine, la population totale est de 45,6 millions d'habitants. Dans cette population, on estime que le taux de natalité est de 16,5‰ et que le taux de mortalité est de 7,6‰.
   - **a.** Le taux de variation de la population argentine est $t = 16{,}5‰ - 7{,}6‰ = 8{,}9‰$.
   - **b.** Il s'écoule 9 années entre 2021 et 2030 donc, en suivant le modèle de Malthus, on peut évaluer la population argentine en 2030 à $45{,}6 \times \left(1 + \frac{8{,}9}{1000}\right)^9 \approx 49{,}4$ millions d'habitants.
2. De même, on peut estimer la population japonaise en 2030 à $126 \times \left(1 - \frac{3{,}5}{1000}\right)^9 \approx 122$ millions d'habitants.

Exercice 3.

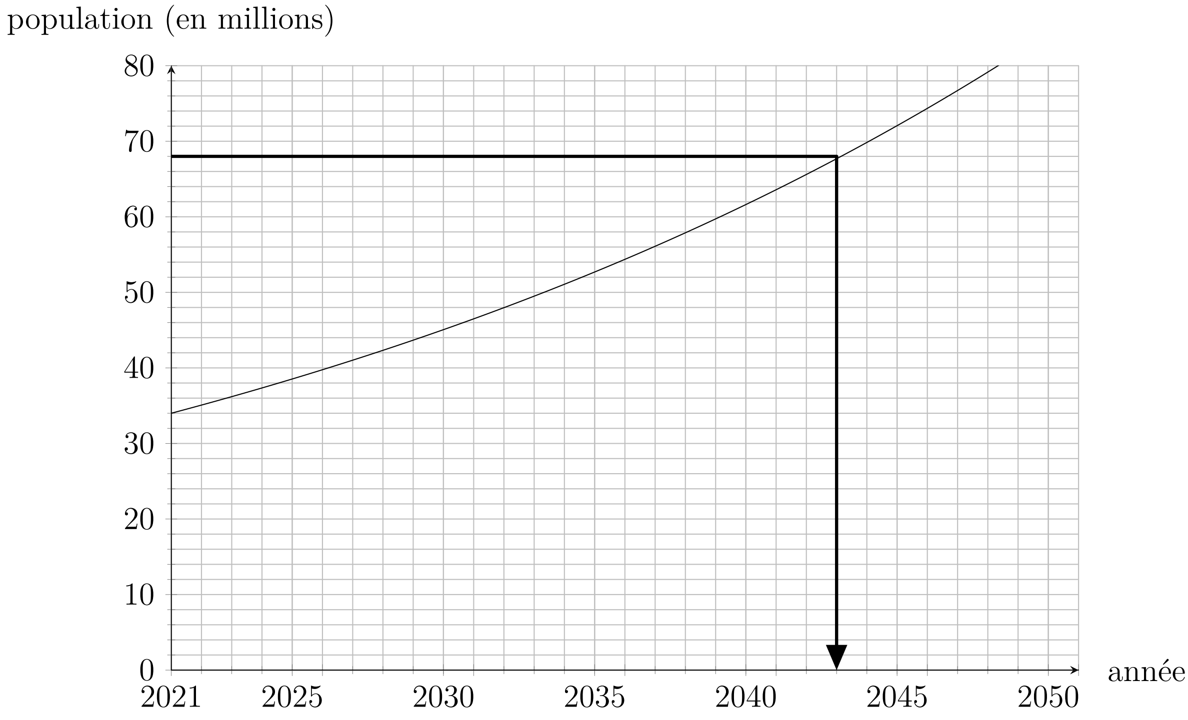
1. Le taux de variation de la population canadienne est $t = 10{,}2‰ - 7{,}9‰ = 2{,}3‰$.
2. - **a.** On constate que la valeur calculée en question **1.** est très inférieure à la réalité.
   - **b.** Cela s'explique par une forte émigration vers le Canada.

Exercice 4.

1. **Méthode graphique**

   La population en 2021 est de 34 millions donc elle aura doublé quand elle atteindra 68 millions.

   Graphiquement, on voit que ce sera la cas en 2043 environ. On peut donc estimer le temps de doublement de la population à environ $2043 - 2021 = 22$ années.



2. À l'aide d'un tableur

a. La population de la Guinée Équatoriale en 2021 est d'environ 1,45 millions d'habitants.

b. Le taux de variation annuel est environ $\frac{1{,}5-1{,}45}{1{,}45} \approx 3{,}4\%$.

c. La population aura doublé quand elle atteindra environ 2,9 millions d'habitants. Cela se produit en 2043 donc le temps de doublement est environ $2043 - 2021 = 22$ années.

3. À l'aide de la calculatrice

Le taux de variation de 15‰donc la population est multipliée par $\left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1{,}015$ tous les ans. Ainsi, en n années, elle est multipliée par $1{,}015^n$. On cherche donc un entier n tel que $1{,}015^n = 2$. En tâtonnant à l'aide de la calculatrice, on trouve que le premier entier n tel que $1{,}015^n$ dépasse 2 est $n = 47$. Ainsi, le temps de doublement de la population mongole est environ 47 ans.

4. Par le calcul (uniquement pour élèves suivant le spécialité mathématiques ou l'option mathématiques complémentaires)

Le taux de variation est de 0,6‰don la population sud-coréenne est multipliée par $1 + \frac{0{,}6}{100} = 1{,}006$ tout les ans. On cherche n tel que $1{,}006^n = 2$. Or,

$$1{,}006^n = 2 \Leftrightarrow \ln(1{,}006^n) = \ln(2) \Leftrightarrow n \ln(1{,}006) = \ln(2) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}006)}$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, on en déduit que le temps de doublement est environ 116 années.

Exercice 5. L'affirmation de Marx met en avant qu'une population humaine ne peut pas suivre une loi d'évolution théorique et figée et que cela n'est envisageable que pour une population animale ou végétale et, encore, à condition que celle-ci ne subisse pas l'action de l'Homme. Ainsi, il affirme que du moment que l'Homme intervient, il va influer par ses actions sur l'évolution d'une population. Cela s'oppose au modèle de Malthus qui considère que l'évolution de la population, d'une part, et l'évolution de ressources alimentaires, d'autre part, sont régies par des lois déterminées. La phrase de Marx est en revanche en accord avec la thèse d'Esther Boserup puisque les travaux de cette dernière confirment que l'évolution de la population humaine a des conséquences sur la production alimentaire et donc sur l'évolution de populations de végétaux.

Exercices de révision sur le thème 3.4

Exercice 1. Le tableau ci-dessous présente les effectifs de la population du Mali entre 2010 et 2017.

année	2010	2011	2012	2013
population	15 049 353	15 514 591	15 979 499	16 449 864
année	2014	2015	2016	2017
population	16 934 220	17 438 778	17 965 429	18 512 394

1. Calculer les taux de variation annuels de la population entre 2010 et 2017. On donnera les résultés en pourcents arrondis à l'unité près.
2. Justifier que l'on peut parler de croissance exponentielle pour la population malienne.
3. On modélise les effectifs de la population par une suite u. Pour tout entier naturel n, son terme général $u(n)$ est égal au nombre d'habitants du Mali à l'année $2010 + n$.
   - **a.** Quelle est la nature de la suite u et quelle est sa raison ?
   - **b.** Donner l'expression de $u(n)$ en fonction de l'entier n.
   - **c.** Calculer $u(7)$ et comparer avec les données du tableau.
   - **d.** À l'aide ce modèle, prévoir le nombre d'habitants au Mali en 2025.

Exercice 2. En 2019, la ville de Mumbaï est peuplée par près de 13 millions d'habitants. C'est la deuxième ville la plus peuplée de l'Inde après New Delhi.

Avec près de 24,4 millions d'habitants, son agglomération concentre 1,8% de la population indienne et 25% de la production industrielle du pays. C'est une des zones urbaines les plus peuplées du globe.

Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'agglomération de Mumbaï sur la période allant de 1901 à 1941, exprimée en millions d'habitants.

année	1901	1911	1921	1931	1941
population	0,83	1,04	1,28	1,31	1,74

1. Étude de la population de Mumbaï en 2019
   - **a.** Déterminer, pour l'année 2019, le pourcentage de la population de la ville de Mumbaï, par rapport à celle de son agglomération.
   - **b.** Déterminer le nombre d'habitants en Inde en 2019, puis le pourcentage que représente la ville de Mumbaï dans la population indienne.
2. On souhaite modéliser la croissance de la population de l'agglomération de Mumbaï avant l'indépendance de l'Inde, qui a eu lieu en 1947.
   - **a.** Dans un repère bien choisi, en prenant l'année 1900 comme année 0, représenter le nuage de points associé au tableau précédent.

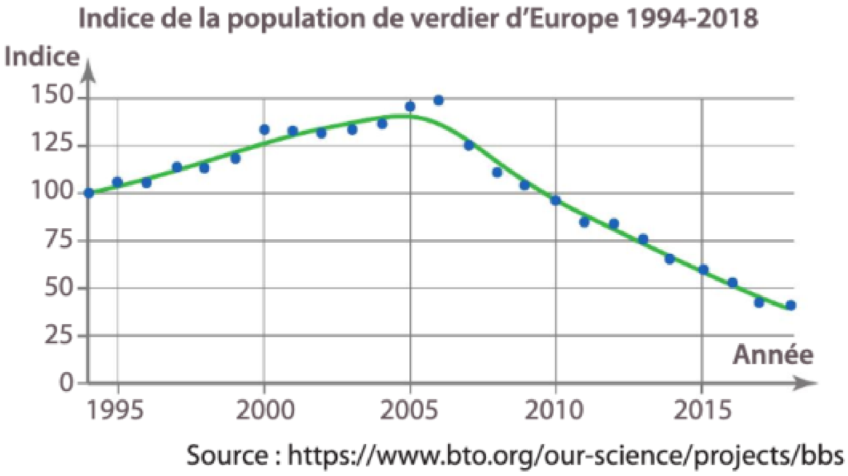
b. Justifier que l'on peut envisager un modèle linéaire.

c. On considère la droite d'équation $y = 0{,}02x + 0{,}8$.
Tracer cette droite sur le graphique précédent et vérifier qu'elle fournit une bonne approximation linéaire du nuage de points.

d. En déduire une estimation de la population de l'agglomération de Mumbaï au moment de l'indépendance de l'Inde.

3. Est-il raisonnable de penser que ce modèle affine est resté valable après 1947 ? Justifier.

Exercice 3. On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution de la population du verdier d'Europe en Grande-Bretagne. Une étude sur cet oiseau a démarré en 1994 et est résumée sur le graphique suivant.



On souhaite estimer l'indice (qui démarre à 100 en 1994) de la population en 2020, à l'aide du schéma.

1. Faut-il utiliser tous les points pour réaliser l'estimation souhaitée ?

2. Proposer un modèle à étudier afin d'estimer l'indice en 2020.

3. Dans ce modèle, estimer l'indice en 2020.

Exercice 4. Le tableau suivant donne la population algérienne (en millions d'habitants) sur la période s'étalant de 1970 à 2010.

année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
population	14,3	16,4	18,9	22,1	25,4	28,5	30,8	32,9	35,7

1. Calculer les variations absolues et les variations relatives par période de 5 années sur la période 1970-1990.
Ces résultats incitent-ils plutôt à utiliser un modèle exponentiel ou un modèle linéaire ?

2. On décide de modéliser l'évolution de cette population par une suite géométrique u de raison 1,15 telle que le terme général $u(n)$ de cette suite représente le population à l'année $1970 + 5n$ pour tout entier naturel n. Justifier ce choix.

3. Estimer dans ce modèle la population algérienne en 2020.

4. La population algérienne en 2020 était d'environ 43,4 millions d'habitants. Est-ce cohérent avec le résultat précédent ?

5. **a.** Sur la période 1995-2010, justifier qu'un modèle linéaire est relativement bien adapté.

b. Dans ce modèle, à combien peut-on estimer la population algérienne en 2020 ?

Corrigés des exercices de révision

Exercice 1.

1. Les taux d'accroissement annuels sont

$$\frac{15\,514\,591 - 15\,049\,353}{15\,049\,353} \approx 3\% \qquad \frac{15\,979\,499 - 15\,514\,591}{15\,514\,591} \approx 3\%$$

$$\frac{16\,449\,864 - 15\,979\,499}{15\,979\,499} \approx 3\% \qquad \frac{16\,934\,220 - 16\,449\,864}{16\,449\,864} \approx 3\%$$

$$\frac{17\,438\,778 - 16\,934\,220}{16\,934\,220} \approx 3\% \qquad \frac{17\,965\,429 - 17\,438\,778}{17\,438\,778} \approx 3\%$$

$$\frac{18\,512\,394 - 17\,965\,429}{17\,965\,429} \approx 3\%$$

2. Les taux d'accroissement sont quasiment constants donc on peut parler de croissance exponentielle pour la population malienne.

3. **a.** Comme les taux d'accroissement sont quasiment constants égaux à 3%, la suite u est une suite géométrique de raison $q = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$.

   b. Pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) \times q^n = 15\,049\,353 \times 1{,}03^n$.

   c. On a $u(7) = 15\,049\,353 \times 10{,}03^7 \approx 18\,508\,806$. Cette valeur est très proche de la population malienne en 2017 (l'erreur est de l'ordre de $\frac{18\,512\,394 - 18\,508\,806}{18\,508\,806} \approx 0{,}02\%$.)

   d. Comme $2025 - 2010 = 15$, on peut estimer la population malienne en 2025 par $u(15) \approx 23\,446\,402$. Ainsi, dans ce modèle, on estime la population malienne à environ 23 450 000 habitants en 2025.

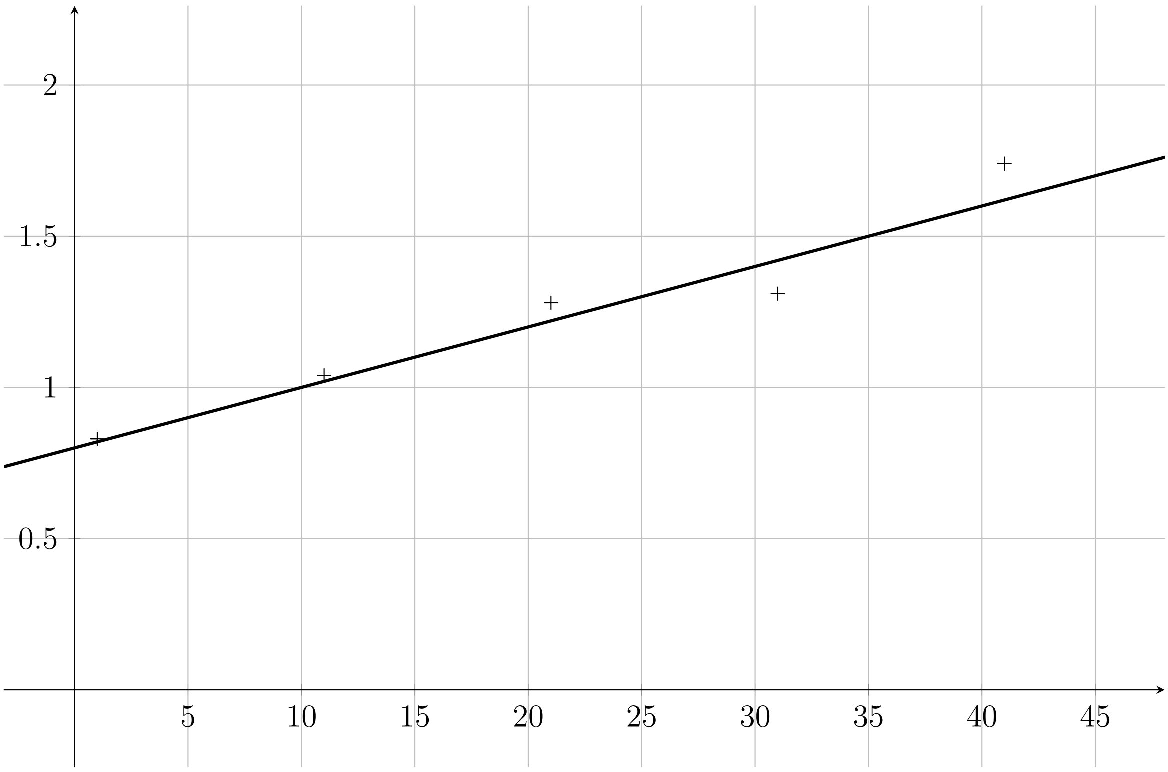
Exercice 2.

1. Étude de la population de Mumbaï en 2019

   a. En 2019, la population de la ville de Mumbaï représente $\frac{13}{24{,}4} \approx 53\%$ de la population de son agglomération.

   b. On sait que 24,4 millions d'habitants représentent 1,8% de la population donc la population indienne en 2019 est environ $\frac{100}{1{,}8} \times 24\,400\,000 \approx 1\,355\,000\,000$ habitants c'est-à-dire environ 1,355 milliards d'habitants. La ville de Mumbaï représente environ $\frac{53}{100} \times \frac{1{,}8}{100} \approx 0{,}95\%$ de la population de l'Inde.
   Autre méthode : La population de la ville de Mumbaï représente environ $\frac{13\,000\,000}{1\,355\,000\,000} \approx 0{,}95\%$ de la population de l'Inde en 2019.

2. **a.** Nota Bene : l'énoncé devrait préciser qu'on prend l'origine du temps (en abscisse) en 1900. On obtient alors le graphique suivant.



b. Les points sont relativement alignés donc on peut envisager un modèle linéaire.

c. Voir ci-dessus.

d. Comme 1900 est pris comme année 0, 1947 correspond à l'année 47 donc on peut estimer la population de l'agglomération de Mumbaï au moment de l'indépendance à $0{,}02 \times 47 + 0{,}8 = 1{,}74$ millions d'habitants.

3. Si l'évolution avait continué ainsi, la population de l'agglomération de Mumbaï en 2019 aurait été de $0{,}02 \times (2019 - 1900) + 0{,}8 = 3{,}18$ millions d'habitants alors qu'elle était de 24,4 millions d'habitants. Ainsi, on ne peut pas considérer que ce modèle est resté valable (longtemps) après l'indépendance.

Exercice 3.

1. On voit que l'évolution suit deux tendances : une hausse de 1994 à 2007 puis une baisse de 2008 à 2018. Pour estimer la population en 2020, on ne va considérer que les points à partir de 2008.

2. Sur la courbe, on voit que les points sont relativement bien alignés de 2010 à 2018 car la courbe verte est quasiment rectiligne sur cette période. Prenons l'originie du temps en 2010. La courbe passe approximativement par les points A(0, 95) et B(24, 40) $(2018 - 2010 = 8)$ donc le coefficient directeur de la droite d'ajustement linéaire est environ $\frac{40-95}{8-0} \approx -6{,}9$. Son équation est donc la forme $y = -6{,}9x + 95$. Ainsi, l'équation de la droite d'ajustement linéaire est environ $y = -6{,}9x + 95$.

On peut donc modéliser l'indice de population de verdiers à l'année $2010 + n$ par la suite u définie par $u(n) = -6{,}9n + 95$.

3. Note Bene : il y a une coquille dans l'énoncé. On veut l'indice en 2020.

Dans ce modèle, on peut estimer l'indice en 2020 à $u(10) = -6{,}9 \times 10 + 95 = 26$.

Exercice 4.

1. Les variations absolues sont :

$$16{,}4 - 14{,}3 = 2{,}1 \qquad 18{,}9 - 16{,}4 = 2{,}5 \qquad 22{,}1 - 18{,}9 = 3{,}2 \qquad 25{,}4 - 22{,}1 = 3{,}3$$

et les variations relatives sont :

$$\frac{16{,}4 - 14{,}3}{14{,}3} \approx 15\% \qquad \frac{18{,}9 - 16{,}4}{16{,}4} 15\% \qquad \frac{22{,}1 - 18{,}9}{18{,}9} = 17\% \qquad \frac{25{,}4 - 22{,}1}{22{,}1} = 15\%$$

On voit que les variations relatives sont relativement constantes, ce qui n'est pas le cas des variations absolues donc le modèle exponentiel est plus adapté sur la période 1970-1990.

2. On voit que les taux d'accroissement sont environ constants à 15% donc on modélise la population par une suite géométrique de raison $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$. Cependant, ce taux correspond à une évolution par période de 5 années donc $u(n)$ modélise la population à l'année $1970 + 5n$ (et non pas $1970 + n$).

3. Comme $\frac{2020-1970}{5}$, dans ce modèle, on peut estimer la population algérienne en 2020 à $u(10) = 14{,}3 \times 1{,}15^{10} \approx 57{,}8$ millions d'habitants.

4. Le résultat précédent n'est pas cohérent avec la réalité car on a une erreur de $\frac{57{,}8-43{,}4}{43{,}4} \approx 33\%$.

5. **a.** Les variations absolues par période de 5 ans entre 1995 et 2010 sont :

$$30{,}8 - 28{,}5 = 2{,}3 \qquad 32{,}9 - 30{,}8 = 2{,}1 \qquad 35{,}7 - 32{,}9 = 2{,}8$$

Ces évolutions sont relativement constantes donc on peut opter pour un modèle linéaire.

b. On modélise donc la population à l'année $1995 + 5n$ par une suite arithmétique u. Comme raison de cette suite, on prend $\frac{2{,}3+2{,}1+2{,}8}{3} = 2{,}4$. Ainsi, pour tout entier n, $u(n) = 28{,}5 + 2{,}4n$. Comme $\frac{2020-1995}{5} = 5$, on peut donc estimer la population algérienne en 2020 à $u(5) = 42{,}5$ millions d'habitants.

Cette estimation est beaucoup plus proche de la réalité puisqu'on a un erreur de seulement $\frac{43{,}4-42{,}5}{43{,}4} \approx 2\%$.