

Intégrales généralisées

Feuille d'exercices #07

⊗ Partie A – Intégrales sur un segment

★ **Exercice 1** — Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+4x+4} dx; \quad I_3 = \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+x+1} dx;$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} dx; \quad I_5 = \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx; \quad I_6 = \int_0^1 x \arctan(x) dx;$$

$$J_1 = \int_0^1 \arcsin(x) dx; \quad J_2 = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} dx; \quad J_3 = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2} dx;$$

$$J_4 = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1} dx; \quad J_5 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx; \quad J_6 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \operatorname{ch}(x) dx;$$

$$K_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos(x)}; \quad K_2 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x) + \sin(2x)}; \quad K_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin(x)}$$

★ **Exercice 2** — Calculer $\int_0^1 \left[4x + \frac{1}{2}\right] dx$ et $\int_0^1 \max(x, (x-1)^2) dx$.

★ **Exercice 3** — On considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(x)}{\cos(2x)} dx$$

Déterminer les valeurs de I et J à l'aide de $I - J$ et $I + J$.

★ **Exercice 4** — Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in [0, p]$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q(x) dx$.

- Justifier l'existence des intégrales $I_{p,q}$.
- Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$ et en déduire $I_{n,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

★ **Exercice 5** — *Intégrale de Dirichlet*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx$.

- Calculer $I_{n+1} - I_n$ et en déduire la valeur de I_n pour tout entier n .
- Montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ est prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\pi, \pi[$. En déduire que $\int_0^{\pi/2} \varphi(x) \sin((2n+1)x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

★ **Exercice 6** — Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- Montrer que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
- Déterminer un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

★ **Exercice 7** — On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(t) dt$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

- Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et simplifier $u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$.
- Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

★★ **Exercice 8** — Soient $a > 0$, $\varphi : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_{-a}^a \frac{1 - \cos(nt)}{t} \cdot \varphi(t) dt$$

Montrer que I_n est bien définie et déterminer sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

★★ **Exercice 9** — Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 t^k f(t) dt = 0$ pour tout $k \in [0, n]$.

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0, 1]$.

★★★ **Exercice 10** — Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$ si, et seulement si, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = e^{i\theta} |f(t)|$.

★★ **Exercice 11** — *Formule de la moyenne*

1. Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose g positive.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$.

2. Soient $T > 0$, $f \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T -périodique.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)g(nt) dt$.

★ **Exercice 12** — On considère la fonction $f : x \mapsto \int_{1/x}^x \frac{t \arctan(t)}{(1+t^2)^2} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et que f est impaire.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$ et en déduire $f(x)$.
3. Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un changement de variable.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t \arctan(t)}{(1+t^2)^2} dt$.

★ **Exercice 13** — Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(a+b-t) = f(t)$$

1. Montrer que $\int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$.
2. *Application* – Calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

★★ **Exercice 14** — Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-int} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier l'existence du réel $\sup_{\cup} |P|$ puis montrer que $|a_n| \leq \sup_{\cup} |P|$.

★★★ **Exercice 15** — *Inégalité de Hilbert*

1. Soit P un polynôme à coefficients réels.

a) Prouver l'égalité $\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{it}) e^{it} dt$.

b) En déduire l'inégalité $\int_{-1}^1 P^2(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{it})|^2 dt$.

2. Établir alors l'inégalité de Hilbert :

$$\forall a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{0 \leq p, q \leq n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \leq \pi \sum_{p=0}^n a_p^2$$

★★ **Exercice 16** — *Inégalité de Young*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = x f(x)$.

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2. Prouver que pour tous $a, b \geq 0$, $\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \geq ab$.

Préciser le cas d'égalité.

3. Retrouver l'inégalité $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ pour $x, y > 0$ et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

★★ **Exercice 17** — *Inégalité de Jensen*

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose ϕ convexe.

1. Établir l'inégalité de Jensen : $\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t)) dt$ (*)

2. a) On suppose désormais ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $c \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \geq \phi(c) + (x-c)\phi'(c)$.

b) En choisissant convenablement c , retrouver l'inégalité (*).

c) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive, d'intégrale valant à 1.

Établir l'inégalité $\phi\left(\int_a^b f(t)g(t) dt\right) \leq \int_a^b \phi(f(t))g(t) dt$.

3. Appliquer l'inégalité de Jensen pour $\phi_1 : x \mapsto x^2$ puis $\phi_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ et retrouver ces résultats en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

⊗ Partie B – Sommes de Riemann

★★ **Exercice 18** — Déterminer un équivalent simple des termes suivants :

$$u_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}; \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}; \quad w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+n)^\alpha};$$

$$x_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n+k)^{\frac{1}{n}}; \quad y_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

On pourra encadrer le sinus à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange pour y_n .

★★ **Exercice 19** — *Intégrale de Poisson*

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) x + 1 \right)$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \ln(1 - 2 \cos(\theta)r + r^2) d\theta$ pour $|r| < 1$ puis $|r| > 1$.

★★ **Exercice 20** — Soient $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f g$$

★★ **Exercice 21** — *Sommes de Riemann généralisées*

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et intégrable sur $]0, 1[$.

1. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$.

2. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ pour tout $\alpha > -1$.

★★ **Exercice 22** — Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Donner les racines de $X^{n-1} + \dots + X + 1$ et montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ à l'aide de l'exercice précédent.

⊗ Partie C – Nature et calcul d'intégrales impropres

★ **Exercice 23** — Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t^3 + t + 1}} dx; \quad I_2 = \int_1^{+\infty} (t + 1 - \sqrt{t^2 + 2t}) dx; \quad I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{e^t - \cos(t)};$$

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t^\beta)}; \quad J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt; \quad J_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^t}{(1+e^t)^\alpha} dt;$$

$$K_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt; \quad K_2 = \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt; \quad K_3 = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$$

★ **Exercice 24** — Établir la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt; \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt;$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2-2\cos(\theta)t+1)}; \quad J_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt; \quad J_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}};$$

$$K_1 = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt; \quad K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(at+b)^2}{t^2+t+1} dt; \quad K_3 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

★ **Exercice 25** — Montrer que pour tout $a > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ln(a)}{a}$.

★ **Exercice 26** — Établir la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(\omega t) dt \text{ où } p > 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin(t)| dt$$

★★ **Exercice 27** —

1. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dx}{t - \omega}$. En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ pour toute fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ de degré ≤ -2 , à pôles simples et non réels.

2. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

★ **Exercice 28** — Établir la convergence des intégrales et calculer :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt \quad (\alpha > 0) \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

★★ **Exercice 29** — Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

1. Justifier l'existence de $I_n(\alpha)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir une relation entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n+1}(\alpha)$.
Exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de α, n et $I_1(\alpha)$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))$.
4. Montrer qu'il existe un réel $K(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

★★ **Exercice 30** — On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

1. Justifier l'existence de I ainsi que de J .
2. Prouver que $I = J$ puis calculer $I + J$. En déduire la valeur de I .

★★ **Exercice 31** — Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\int_a^b \frac{e^{-xt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_0^x \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u} du$.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u} du$.

★★ **Exercice 32** — Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x} dx$ lorsque I converge.

★★ **Exercice 33** — *Intégrale de Cauchy-Frullani*

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $a < b$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

1. Déterminer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt$.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ lorsque $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

★★ **Exercice 34** — Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possédant deux limites ℓ et ℓ' en $\pm\infty$.

Justifier l'existence et calculer $\int_{\mathbb{R}} (f(t+1) - f(t)) dt$.

★★ **Exercice 35** — On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

★★★ **Exercice 36** — *Constante d'Euler*

On note γ la constante d'Euler. Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt = 1 - \gamma \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} \right) dt = \gamma$$

★★ **Exercice 37** — Soit $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

★★ **Exercice 38** — *Transformée de Laplace*

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ est supposée convergente. Justifier que pour tout réel $s > 0$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ converge.

⊗ Partie D – Étude asymptotique

★ **Exercice 39** — On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f(x) + \ln(x)$ a une limite finie lorsque $x \rightarrow 0^+$.
3. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right)$.
4. On pose $I = \int_0^{+\infty} xf(x) dx$. Prouver que l'intégrale converge et calculer I .

★★ **Exercice 40** — Soit Li la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$.

Déterminer un développement asymptotique à n termes en $+\infty$ de $\text{Li}(x)$.

★ **Exercice 41** — Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner un équivalent au voisinage de 0 de $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$.
2. Donner de même un équivalent au voisinage de 1 de $\arccos(x)$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

★★ **Exercice 42** — Soit $f : x \mapsto \int_0^x e^{it^2} dt$.

1. Montrer que f possède une limite finie ℓ en $+\infty$.
2. Vérifier que $\ell - f(x) = -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt$ et en déduire un équivalent de $\ell - f(x)$ en $+\infty$.

★ **Exercice 43** — Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que φ est définie, strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soient $I = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in I$.
 - a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq |e^{-xt} - e^{-yt}| \leq |x - y|te^{-at}$.
 - b) En déduire que φ est lipschitzienne sur I et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$ et $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

★★ **Exercice 44** —

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{\arcsin(t)} dt$.
2. Généraliser à $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{kx} \frac{dt}{f(t)}$ où $k > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

★★ **Exercice 45** — Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Établir les implications suivantes :

1. Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, $\int_0^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$.
2. Si $\int_0^{+\infty} f^2(t) dt$ converge, $\int_0^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{x})$.

★★★ **Exercice 46** — Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas au voisinage de l'infini. On suppose qu'il existe un réel $\lambda \notin \{0, -1\}$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{x}$.

1. Montrer que pour $\lambda > -1$, $\int_0^{+\infty} f$ diverge et $\int_0^x f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\lambda + 1}$.
2. Montrer que pour $\lambda < -1$, $\int_0^{+\infty} f$ converge et $\int_x^{+\infty} f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{xf(x)}{\lambda + 1}$.

⊗ Partie E – Convergence dominée et intégration terme à terme

★ **Exercice 47** — Soient $\alpha > -1, \beta > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-nt}}{\sqrt{1+t^\beta}} dt$.

1. Justifier l'existence de I_n et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent simple de I_n en $+\infty$.

★ **Exercice 48** — Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ supposée continue et bornée.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt$.

1. Justifier l'existence de I_n et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent simple de I_n en $+\infty$ lorsque $f(0) \neq 0$.

★★ **Exercice 49** — Justifier l'existence et déterminer la limite de :

$$\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx; \quad \int_1^{+\infty} \frac{n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)}{\sqrt{x}} dx; \quad \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-ax} dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$$

★★ **Exercice 50** — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+n^4 t^3} dt$. Vérifier que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puis onner un équivalent en $+\infty$ de I_n .

★★ **Exercice 51** — Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ supposée continue. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f^{1/n}(x) dx \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\int_0^1 \ln(f(x)) dx \right)$$

★★★ **Exercice 52** — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t+\dots+t^n}}$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie et déterminer sa limite ℓ .
2. Justifier l'existence de $C > 0$ tel que $J_n - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{3/2}}$.

★★ **Exercice 53** — On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^n(x) dx$.

1. Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puis que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t^2/2}$.
2. a) Justifier que pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \leq \tan(\theta)$.
b) En déduire par intégration que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \leq e^{-x^2/2}$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = t^2 \cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ si $0 \leq t \leq \frac{\pi\sqrt{n}}{2}$; $f_n(t) = 0$ sinon.
Montrer que $I_n = \frac{1}{n^{3/2}} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et en déduire un équivalent de I_n .

★★★ **Exercice 54** — *Méthode de Laplace*

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$, admettant un unique maximum en 0 et vérifiant $f''(0) < 0$. On admet que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

1. Prouver que $t \mapsto \frac{1}{t^2} \ln\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right)$ est prolongeable par continuité sur $[-1, 1]$.
En déduire l'existence de $a > 0$ tel que pour tout $t \in [-1, 1]$, $f(t) \leq f(0)e^{-at^2}$.
2. En posant $u = \sqrt{n}t$, montrer que :

$$\int_{-1}^1 f^n(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \times \frac{f^{n+1/2}(0)}{\sqrt{|f''(0)|}}$$

3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt$ et de $\int_0^{\pi/2} e^{x \cos(t)} dt$.

★★★ **Exercice 55** — On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Déterminer un équivalent de $\Gamma(x+1)$ au voisinage de $+\infty$.

★ **Exercice 56** — Justifier les égalités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

★ **Exercice 57** — Prouver l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\alpha x} - 1} dx$ pour $\alpha > 0$.

★★ **Exercice 58** —

1. Soit f la fonction déf. sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{x-1}$.

Montrer que f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

On notera encore f le prolongement ainsi obtenu.

2. On pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0 puis trouver un équivalent de I_n .
3. Montrer que $n \int_0^1 x^n f(x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

★★ **Exercice 59** — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt$

1. Justifier l'existence et calculer a_n . Montrer que $\sum a_n$ converge.
2. En déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1-te^{-t})^2} dt$.

★★ **Exercice 60** — Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.