

Mathématiques
Devoir surveillé n°2
Octobre 2025

Durée de l'épreuve: 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(Sans justification, les points ne peuvent pas être donnés).

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x} \leq y$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leq y$
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x} \leq y$
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leq y$
5. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$
6. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}_+, \quad ac \leq bc \Rightarrow a \leq b$

Exercice 2.

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad f(x)f(y) = \sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y) \quad (\star\star)$$

1. Dans toute cette question, on considère f une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant la relation $(\star\star)$.

(a) Vérifier que $f(0) = 0$.

(b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x).$$

(c) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} [y(f(x))^2 + x(f(y))^2]$$

(d) Vérifier alors que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y))^2 = 0$$

(e) En déduire que la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. (*Attention vous ne pouvez pas dériver g car la fonction n'est pas forcément dérivable.*)

(f) Montrer alors que f est la fonction nulle ou la fonction $x \mapsto 2\sqrt{2x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Conclure.

Exercice 3.

On pose, pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (k+1)2^k.$$

Le but de cet exercice est de calculer S_n à l'aide de trois méthodes distinctes.

1. Première méthode

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = n 2^{n+1} + 1.$$

2. Deuxième méthode

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout réel x :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n (k+1)x^k.$$

- (a) En faisant apparaître un télescopage, simplifier $(1-x)f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- (b) En déduire une autre expression de $f_n(x)$ pour $x \neq 1$.
- (c) Conclure en retrouvant la valeur de S_n .

3. Troisième méthode

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{k+1}.$$

On admet que g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- (a) Calculer $g'_n(x)$ pour tout réel x à l'aide de la définition de g_n .
- (b) Donner une autre expression de g_n pour tout réel $x \neq 1$ et en déduire une autre expression de $g'_n(x)$ pour tout $x \neq 1$.
- (c) Conclure en retrouvant la valeur de S_n .

Exercice 4.

On note pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

- 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) \geq 2.$$

- 2. En déduire que si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4.$$

- 3. Dans cette question, nous allons généraliser le résultat de la dernière question. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2.$$

On pourra procéder par récurrence sur n .