

Programme complémentaire — poursuite d'études Ce module fait partie du **programme complémentaire** de Terminale Bac Pro : il prépare la poursuite d'études (BTS et au-delà) et se traite dans le cadre de l'accompagnement au choix d'orientation. Il ne fait pas partie du programme évalué en CCF.

Objectifs du chapitre :

- Connaître la définition de i et la forme algébrique d'un nombre complexe.
- Effectuer des opérations (addition, multiplication) sur les complexes.
- Calculer le module et le conjugué d'un nombre complexe.
- Représenter un complexe dans le plan complexe.
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique (et inversement).
- Résoudre une équation du second degré à discriminant négatif.
- **ICCER** Utiliser les complexes pour les impédances en courant alternatif.

Situation professionnelle — Impédances en courant alternatif

Un technicien CVC dimensionne un circuit électrique comportant résistances et bobines. L'impédance du circuit est un nombre complexe $Z = R + jX$. Calculer sa valeur absolue (le module) permet de déterminer la résistance effective du circuit au courant alternatif.

1. L'unité imaginaire et les nombres complexes

DÉFINITION

On définit le nombre i tel que :

$$i^2 = -1$$

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme :

$$z = a + ib$$

où a et b sont des réels.

- $a = \operatorname{Re}(z)$ est la **partie réelle** de z .
- $b = \operatorname{Im}(z)$ est la **partie imaginaire** de z .

ATTENTION

i n'est pas un nombre réel : on ne peut pas situer i sur la droite des réels. C'est une **extension** des réels.

Si $b = 0$, alors $z = a$ est un réel ordinaire.

Si $a = 0$, on dit que $z = ib$ est un **imaginaire pur**.

EXEMPLES

Nombre complexe	Partie réelle a	Partie imaginaire b	Nature
$z = 3 + 2i$	3	2	Complexe
$z = -1 + i$	-1	1	Complexe
$z = 5$	5	0	Réel
$z = -3i$	0	-3	Imaginaire pur
$z = 2 - 3i$	2	-3	Complexe

APPLICATION

Calcule i^2, i^3, i^4 . Que remarques-tu ?

2. Opérations en forme algébrique

PROPRIÉTÉS

Soient $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$. Alors :

Addition : $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$

Soustraction : $z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$

Multiplication : $z_1 \times z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

(On développe comme un produit ordinaire en remplaçant i^2 par -1 .)

EXEMPLE DÉTAILLÉ — ADDITION ET SOUSTRACTION

Soient $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - 5i$.

Addition : $z_1 + z_2 = (3 + 1) + (2 + (-5))i = 4 - 3i$

Soustraction : $z_1 - z_2 = (3 - 1) + (2 - (-5))i = 2 + 7i$

On regroupe : parties réelles ensemble, parties imaginaires ensemble.

EXEMPLE DÉTAILLÉ — MULTIPLICATION

Soient $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 1 - i$.

$$z_1 \times z_2 = (2 + 3i)(1 - i)$$

On développe : $= 2 \times 1 + 2 \times (-i) + 3i \times 1 + 3i \times (-i)$

$$= 2 - 2i + 3i - 3i^2$$

$$= 2 + i - 3 \times (-1) \quad (\text{car } i^2 = -1)$$

$$= 2 + i + 3$$

$$z_1 \times z_2 = 5 + i$$

APPLICATION

Calcule $(2 + 3i)(1 - i)$ et donne le résultat sous forme $a + bi$.

3. Conjugué et module

DÉFINITION — CONJUGUÉ

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est le nombre complexe :

$$\bar{z} = a - ib$$

On change le signe de la partie imaginaire.

DÉFINITION — MODULE

Le **module** de $z = a + ib$ est le réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

PROPRIÉTÉS REMARQUABLES

- $z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- Si z est réel ($b = 0$), alors $|z| = |a|$ (valeur absolue habituelle).

EXEMPLE

Soit $z = 3 + 4i$.

Conjugué : $\bar{z} = 3 - 4i$

Module : $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$

$$|z| = 5$$

Vérification : $z \times \bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25 = |z|^2 \checkmark$

APPLICATION

Un circuit électrique a une impédance $Z = 5 + 12j$ (en Ω). Calcule le module $|Z|$. Que représente cette valeur physiquement ?

4. Plan complexe — Représentation géométrique

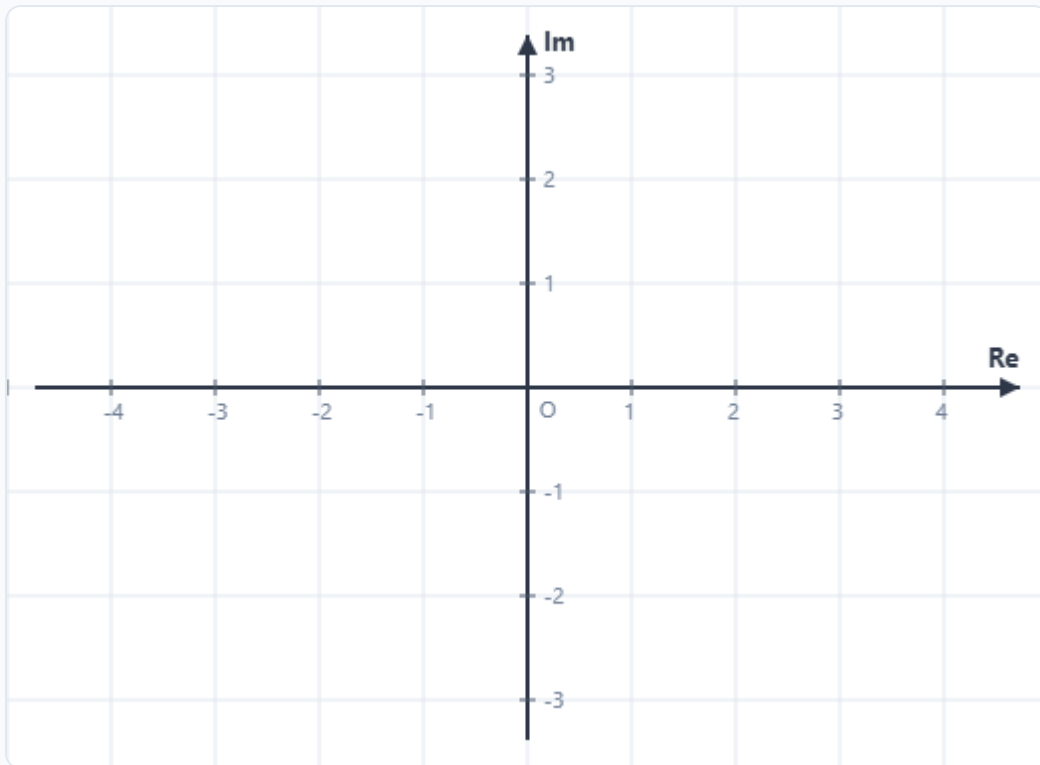
DÉFINITION

Dans le **plan complexe**, on place le nombre $z = a + ib$ par le point $M(a ; b)$:

- L'axe des abscisses est l'**axe réel** (noté Re).
- L'axe des ordonnées est l'**axe imaginaire** (noté Im).

Le module $|z|$ représente la **distance** de M à l'origine O .

Plan complexe interactif



Cliquez sur un bouton pour afficher un nombre complexe dans le plan.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU MODULE

Le module $|z|$ est la longueur du segment OM où M est le point représentatif de z .

Par le théorème de Pythagore : $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

5. Forme trigonométrique

DÉFINITION

Un nombre complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous **forme trigonométrique** :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où :

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le **module**.
- θ est l'**argument** de z , c'est l'angle orienté que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe réel positif.

MÉTHODE — FORME ALGÈBRIQUE VERS FORME TRIGONOMETRIQUE

Soit $z = a + ib$.

Étape 1 :

Calculer $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Étape 2 :

Identifier $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

Étape 3 :

Déduire θ (en radians ou en degrés, dans $] - \pi ; \pi]$).

EXEMPLE 1 — $Z = 1 + i$

Module : $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On reconnaît $\theta = \frac{\pi}{4}$ (soit 45°).

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

EXEMPLE 2 — $Z = -1 + i\sqrt{3}$

Module : $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

$$\cos \theta = \frac{-1}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On reconnaît $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (soit 120°).

$$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

MÉTHODE — FORME TRIGONOMETRIQUE VERS FORME ALGÈBRE

Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$:

$a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$, puis $z = a + ib$.

EXEMPLE

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$z = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + i \times 4 \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$$

6. Formule d'Euler (au-delà du programme complémentaire)

POUR ALLER PLUS LOIN Le programme complémentaire de Terminale couvre les formes **algébrique et trigonométrique**. La forme exponentielle $z = r e^{i\theta}$ est présentée ici en ouverture : elle est au programme de BTS.

FORMULE D'EULER

Pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

On peut donc écrire la **forme exponentielle** d'un complexe :

$$z = r e^{i\theta}$$

REMARQUE

Cette formule est admise (non démontrée au niveau Bac Pro). Elle est très utilisée en physique et en électricité sous la forme $e^{j\omega t}$ où j désigne l'unité imaginaire en convention électrique.

EXEMPLES DE NOTATION EXPONENTIELLE

Forme algébrique	Module r	Argument θ	Forme exponentielle
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
-1	1	π	$e^{i\pi}$
i	1	$\pi/2$	$e^{i\pi/2}$
$2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$	2	$\pi/3$	$2e^{i\pi/3}$

IDENTITÉ REMARQUABLE En prenant $\theta = \pi : e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, soit $e^{i\pi} + 1 = 0$.

7. Application professionnelle — Impédances en courant alternatif

ICCR

CONTEXTE PROFESSIONNEL

En électricité **courant alternatif** (CA), les résistances, bobines et condensateurs s'opposent différemment au courant selon la fréquence. On regroupe ces effets dans l'**impédance complexe** Z , notée avec j (pour éviter la confusion avec l'intensité i).

$$Z = R + jX$$

où R est la résistance (partie réelle) et X la réactance (partie imaginaire).

L'**impédance totale** est $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ (en ohms, Ω).

Problème résolu — Circuit RL série

DONNÉES

Circuit RL série avec : $R = 100 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$.

Tension efficace $U = 230 \text{ V}$.

RÉSOLUTION ÉTAPE PAR ÉTAPE

Étape 1 — Réactance de la bobine :

$$X_L = L\omega = 0,1 \times 100 = 10 \, \Omega$$

Étape 2 — Impédance complexe du circuit :

$$Z = R + jX_L = 100 + 10j$$

Étape 3 — Module de Z (= impédance totale) :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 + 10^2} = \sqrt{10\,000 + 100} = \sqrt{10\,100}$$

$$|Z| \approx 100,5 \, \Omega$$

Étape 4 — Intensité efficace :

$$\text{Loi d'Ohm généralisée : } I = \frac{U}{|Z|} = \frac{230}{100,5} \approx 2,29 \, \text{A}$$

Impédance : $Z = 100 + 10j$ | $|Z| \approx 100,5 \, \Omega$ | Intensité : $I \approx 2,29 \, \text{A}$

FORMULE GÉNÉRALE POUR UN CIRCUIT RLC

$$Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

- $L\omega$: réactance inductive (bobine)
- $\frac{1}{C\omega}$: réactance capacitive (condensateur)
- À la **résonance** : $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, donc $Z = R$ (purement résistif, $|Z|$ minimal).

8. Applications géométriques

ERA / TMA

DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

Si A a pour affixe z_A et B a pour affixe z_B , alors :

$$AB = |z_B - z_A|$$

MILIEU D'UN SEGMENT

Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

EXEMPLE

A d'affixe $z_A = 1 + 2i$ et B d'affixe $z_B = 5 - 2i$.

Distance AB :

$$z_B - z_A = (5 - 1) + (-2 - 2)i = 4 - 4i$$

$$AB = |4 - 4i| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Milieu I :

$$z_I = \frac{(1 + 2i) + (5 - 2i)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$AB = 4\sqrt{2} \approx 5,66 \quad | \quad I \text{ a pour affixe } 3 \text{ (point sur l'axe réel)}$$

9. Résolution d'équations

9.1 Équations du type $z^2 = -a$ ($a > 0$)

MÉTHODE

Si $a > 0$, l'équation $z^2 = -a$ a deux solutions imaginaires pures conjuguées :

$$z = i\sqrt{a} \quad \text{et} \quad z = -i\sqrt{a}$$

EXEMPLE — $z^2 = -4$

$$z^2 = -4$$

Comme $(2i)^2 = 4i^2 = -4$ et $(-2i)^2 = 4i^2 = -4$:

Les solutions sont $z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i$.

9.2 Équation du second degré à discriminant négatif

RAPPEL

Pour $az^2 + bz + c = 0$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: deux solutions réelles.
- Si $\Delta = 0$: une solution réelle double.
- Si $\Delta < 0$: deux solutions **complexes conjuguées** :

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

EXEMPLE — $z^2 + 2z + 5 = 0$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$$

$\Delta < 0$: deux solutions complexes conjuguées.

$$\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{16} = 4$$

$$z = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

$$z_1 = -1 + 2i \text{ et } z_2 = -1 - 2i$$

Vérification : $z_1 + z_2 = -2 = -b/a \checkmark$ | $z_1 \times z_2 = (-1)^2 + (2)^2 = 5 = c/a \checkmark$

EXEMPLE — $2Z^2 - 2Z + 1 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4$$

$$\sqrt{|\Delta|} = 2$$

$$z = \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1 \pm i}{2}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

10. Tableau récapitulatif

Notion	Formule / définition	Exemple avec $z = 3 - 4i$
Forme algébrique	$z = a + ib$	$a = 3, b = -4$
Partie réelle	$\operatorname{Re}(z) = a$	$\operatorname{Re}(z) = 3$
Partie imaginaire	$\operatorname{Im}(z) = b$	$\operatorname{Im}(z) = -4$
Conjugué	$\bar{z} = a - ib$	$\bar{z} = 3 + 4i$
Module	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$	$ z = \sqrt{9 + 16} = 5$
Argument	θ tel que $\cos \theta = a/r, \sin \theta = b/r$	$\theta = \arctan(-4/3) \approx -53,1^\circ$
Forme trigonométrique	$r(\cos \theta + i \sin \theta)$	$5(\cos(-53,1^\circ) + i \sin(-53,1^\circ))$
Forme exponentielle	$r e^{i\theta}$	$5 e^{i\theta}$ avec $\theta \approx -0,927 \text{ rad}$
Distance AB	$ z_B - z_A $	—
Milieu I	$\frac{z_A + z_B}{2}$	—
$\Delta < 0$ dans $az^2 + bz + c = 0$	$z = \frac{-b \pm i\sqrt{ \Delta }}{2a}$	—

À retenir — L'essentiel du chapitre

- $i^2 = -1$ | $z = a + ib$ | $\bar{z} = a - ib$ | $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Dans le plan complexe, $z = a + ib$ correspond au point $M(a; b)$ et $|z| = OM$.
- Forme trigonométrique : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |z|$.
- Formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
- Si $\Delta < 0$: solutions complexes $\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- **ICCER** Impédance : $Z = R + jX$, $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$, $I = U/|Z|$.

11. Exercices

Exercice 1 — Opérations de base

Soient $z_1 = 2 + 5i$ et $z_2 = 3 - i$.

Calculer : (a) $z_1 + z_2$ (b) $z_1 - z_2$ (c) $z_1 \times z_2$ (d) $\bar{z}_1$ (e) $|z_1|$

► Voir la correction

Exercice 2 — Forme trigonométrique

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

(a) $z = -\sqrt{3} + i$ (b) $z = -2i$ (c) $z = 1 + i\sqrt{3}$

► Voir la correction

Exercice 3 — Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 = -9$ (b) $z^2 - 4z + 13 = 0$ (c) $z^2 + z + 1 = 0$

► Voir la correction

Exercice 4 — Applications géométriques et professionnelles

ICCER

Partie A (géométrie) : Dans le plan complexe, A a pour affixe $z_A = -2 + 4i$ et B a pour affixe $z_B = 4 + 2i$.

(1) Calculer la distance AB . (2) Donner l'affixe du milieu I de $[AB]$.

Partie B (impédance) : Un circuit RLC série a : $R = 50 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 100 \mu\text{F}$, $\omega = 200 \text{ rad/s}$.

(3) Calculer $X_L = L\omega$. (4) Calculer $X_C = \frac{1}{C\omega}$. (5) Écrire l'impédance complexe Z . (6) Calculer $|Z|$.

► Voir la correction

Erreurs fréquentes

✗ Oublier que $i^2 = -1$ lors d'une multiplication

$(2 + i)(3 + i) = 6 + 2i + 3i + i^2 = 6 + 5i + (-1) = 5 + 5i$, pas $6 + 5i$.

Conseil : toujours remplacer i^2 par -1 lors du développement.

✗ Confondre module et partie réelle

Le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, pas seulement a .

Conseil : le module est toujours positif et se calcule comme une distance (Pythagore).

✗ Confondre conjugué et opposé

Le conjugué de $a + bi$ est $a - bi$ (signe de la partie imaginaire changé), pas $-a - bi$.

Conseil : conjugué = même partie réelle, partie imaginaire opposée.

✗ Inverser argument et module dans la forme trigonométrique

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$: r est le module, θ est l'argument.

Conseil : $r = |z|$ (toujours positif), et $\theta = \arg(z)$.

Simulation interactive

[Nombres complexes](#)

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir

Compétences travaillées :

- Identifier la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe
- Effectuer des opérations (addition, soustraction, multiplication) sur les complexes
- Calculer le conjugué et le module d'un nombre complexe
- Représenter un complexe dans le plan complexe
- Convertir entre forme algébrique et forme trigonométrique
- Résoudre des équations du second degré à discriminant négatif

EXERCICE 1 Identifier partie réelle et partie imaginaire

SOCLE

Pour chaque nombre complexe, donner la partie réelle $\text{Re}(z)$ et la partie imaginaire $\text{Im}(z)$:

Nombre complexe	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$	Nature
$z_1 = 5 + 3i$			
$z_2 = -2 - 7i$			
$z_3 = 4i$			
$z_4 = -6$			
$z_5 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$			

Mes calculs :

EXERCICE 2 Additionner et soustraire des nombres complexes

SOCLE

Calculer les sommes et différences suivantes. Donner le résultat sous forme algébrique $a + ib$:

- a) $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - 5i$. Calculer $z_1 + z_2$.
- b) $z_3 = -4 + i$ et $z_4 = 6 + 3i$. Calculer $z_3 + z_4$.
- c) $z_5 = 7 - 2i$ et $z_6 = 7 + 2i$. Calculer $z_5 - z_6$.
- d) $z_7 = -1 + 4i$ et $z_8 = -3 - 4i$. Calculer $z_7 - z_8$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 3 Calculer le conjugué d'un nombre complexe

SOCLE

Rappel : le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$ (on change le signe de la partie imaginaire).

Donner le conjugué de chaque nombre complexe :

z	$\bar{z}$
$z_1 = 3 + 5i$	
$z_2 = -2 - i$	
$z_3 = 7$	
$z_4 = -4i$	
$z_5 = 1 + \sqrt{3}i$	

Bonus : Pour chaque nombre, calculer $z + \bar{z}$ et $z \times \bar{z}$. Que remarquez-vous ?

Mes calculs :

EXERCICE 4 Identifier parties réelle et imaginaire — Guidé

SOCLE

MÉTHODE

Un nombre complexe s'écrit $z = a + bi$ où :

- a est la

partie réelle

$$\rightarrow \operatorname{Re}(z) = a$$

- b est la

partie imaginaire

$$\rightarrow \operatorname{Im}(z) = b \text{ (le coefficient devant } i,$$

sans

le i)

Exemple guidé : $z = 7 - 3i$

On identifie : $a = \boxed{7}$ et $b = \boxed{-3}$. Donc $\operatorname{Re}(z) = 7$ et $\operatorname{Im}(z) = -3$.

À toi : Compléter le tableau ci-dessous.

Nombre complexe z	$\operatorname{Re}(z) = \boxed{}$	$\operatorname{Im}(z) = \boxed{}$	Nature
$z_1 = 4 + 5i$			☐ Réel ☐ Imaginaire pur ☐ Complexe
$z_2 = -3i$			☐ Réel ☐ Imaginaire pur ☐ Complexe
$z_3 = 9$			☐ Réel ☐ Imaginaire pur ☐ Complexe
$z_4 = -2 + 6i$			☐ Réel ☐ Imaginaire pur ☐ Complexe

Mes calculs :

EXERCICE 5 Calculer avec les complexes — Pas à pas

SOCLE

MÉTHODE — ADDITION

Pour additionner $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

→ On additionne les parties réelles entre elles, et les parties imaginaires entre elles.

a) **Addition guidée** : $z_1 = 5 + 3i$ et $z_2 = 2 - i$.

Parties réelles : $5 + 2 = \square$

Parties imaginaires : $3 + (-1) = \square$

Donc $z_1 + z_2 = \square + \square i$

MÉTHODE — MULTIPLICATION

Pour multiplier : on développe comme $(a + bi)(c + di)$ et on remplace $i^2 = -1$.

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

b) **Multipliation guidée** : $(3 + 2i)(1 + i)$.

Étape 1 — On développe :

$$3 \times 1 = \square \quad 3 \times i = \square \quad 2i \times 1 = \square \quad 2i \times i = \square$$

Étape 2 — On rassemble : $\square + \square + \square + \square$

Étape 3 — On remplace $i^2 = -1$: $2i^2 = 2 \times (-1) = \square$

Résultat : $(3 + 2i)(1 + i) = \square + \square i$

c) **À toi** : Calculer $(4 + i)(2 - 3i)$.

Développement : $\square + \square + \square + \square$

Remplacement de i^2 :

Résultat : $\square + \square i$

Mes calculs :

EXERCICE 6 Placer des complexes dans le plan — Guidé

SOCLE

MÉTHODE

Pour placer $z = a + bi$ dans le plan complexe :

- L'axe horizontal ($\rightarrow$) correspond à la

partie réelle

a.

- L'axe vertical ($\uparrow$) correspond à la

partie imaginaire

b.

- Le point se place aux coordonnées $(a ; b)$.

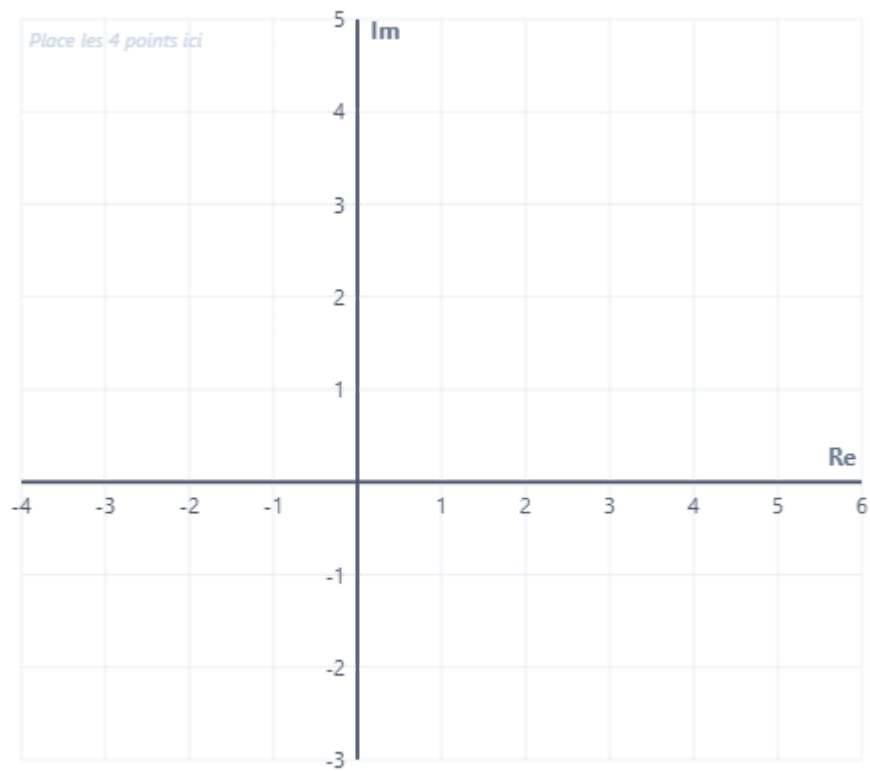
Exemple guidé : Placer $z = 3 + 2i$.

Partie réelle = 3 $\rightarrow$ on avance de 3 vers la droite.

Partie imaginaire = 2 $\rightarrow$ on monte de 2. Le point est en $(3 ; 2)$.

À toi : Compléter le tableau, puis placer les points sur le plan.

Complexe z	Partie réelle $a = \square$	Partie imaginaire $b = \square$	Point $(a ; b)$
$z_1 = 2 + 4i$			$(\square ; \square)$
$z_2 = -3 + i$			$(\square ; \square)$
$z_3 = 5$			$(\square ; \square)$
$z_4 = -2i$			$(\square ; \square)$



Plan complexe — place les 4 points

Mes calculs :

EXERCICE 7 Calculer le module — guidé

SOCLE

MÉTHODE

Le module de $z = a + ib$ est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

C'est la distance du point représentatif à l'origine dans le plan complexe.

Exemple guidé : $z = 3 + 4i$

$$a = 3, b = 4 \rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

À toi : Calculer le module de chaque nombre complexe.

Complexe z	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	$ z $
$z_1 = 5 + 12i$				
$z_2 = 8 - 6i$				
$z_3 = -3i$				
$z_4 = 2 + 2i$				

Mes calculs :

EXERCICE 8 Multiplier des complexes — pas à pas

SOCLE

RAPPEL

On développe comme un produit ordinaire, puis on remplace i^2 par -1 .

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

a) **Guidé** : Calculer $(2 + i)(3 - 2i)$.

$$2 \times 3 = \square \quad 2 \times (-2i) = \square \quad i \times 3 = \square \quad i \times (-2i) = -2i^2 = \square$$

$$\text{Partie réelle : } \square + \square = \square \quad \text{Partie imaginaire : } \square + \square = \square$$

$$\text{Résultat : } \square + \square i$$

b) **À toi** : Calculer $(1 + 3i)(2 + i)$.

Résultat :

c) **À toi** : Calculer $(5 - i)(5 + i)$. Que remarquez-vous avec le module de $z = 5 + i$?

Résultat : Lien avec $|z|$:

Mes calculs :

EXERCICE 9 Reconnaître la forme trigonométrique — guidé

SOCLE

RAPPEL

La forme trigonométrique est $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où $r = |z|$ et θ l'argument.

Pour trouver θ : $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$, puis on reconnaît l'angle dans le tableau des valeurs remarquables.

Valeurs à connaître :

θ	0°	$30^\circ (\pi/6)$	$45^\circ (\pi/4)$	$60^\circ (\pi/3)$	$90^\circ (\pi/2)$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

a) Convertir $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ en forme algébrique.

$$a = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \boxed{} = \boxed{} \quad b = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$\text{Résultat : } z = \boxed{} + \boxed{}i$$

b) Convertir $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ en forme trigonométrique.

$$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\boxed{} + \boxed{}} = \boxed{}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\boxed{}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\boxed{}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = \boxed{}$$

$$\text{Résultat : } z = \boxed{}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

Mes calculs :

EXERCICE 10 Calculer i^2, i^3, i^4 — guidé

SOCLE

RÈGLE

On sait que $i^2 = -1$. En multipliant par i à chaque fois :

$i^1 = i \cdot i^2 = -1 \cdot i^3 = -i \cdot i^4 = 1 \cdot$ puis le cycle recommence.

Compléter le tableau en s'aidant de la règle :

Puissance	Calcul intermédiaire	Résultat
i^2	$i \times i$	-1
i^3	$i^2 \times i = (-1) \times i$	
i^4	$i^3 \times i = (-i) \times i$	
i^5	$i^4 \times i = 1 \times i$	
i^6	$i^5 \times i$	

Application : Simplifier les expressions suivantes :

a) $3i^2 = 3 \times \square = \square$

b) $5i^4 = 5 \times \square = \square$

c) $-2i^3 = -2 \times \square = \square$

Mes calculs :

EXERCICE 11 Égalité de deux complexes — trouver les inconnues

SOCLE

RÈGLE

Deux nombres complexes $a + ib$ et $c + id$ sont égaux si et seulement si :

$a = c$ (parties réelles égales)

ET

$b = d$ (parties imaginaires égales).

Trouver les réels x et y vérifiant chaque égalité :

a) $x + 3i = 7 + 3i$

Parties réelles : $x = \square$. Parties imaginaires : déjà égales ($3 = 3$).

b) $2 + yi = 2 - 5i$

Parties imaginaires : $y = \square$.

c) $(x + 1) + (y - 2)i = 4 + 6i$

Partie réelle : $x + 1 = 4$ donc $x = \square$

Partie imaginaire : $y - 2 = 6$ donc $y = \square$

d) $(2x - 3) + (3y + 1)i = 5 - 2i$

$x = \square$ $y = \square$

Mes calculs :

EXERCICE 12 Module et conjugué — exercice bilan guidé

SOCLE

On donne $z = 6 + 8i$.

1. Donner le conjugué $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \boxed{}$$

2. Calculer le module $|z|$ en complétant :

$$a = \boxed{}, b = \boxed{}$$

$$a^2 = \boxed{}, b^2 = \boxed{}, a^2 + b^2 = \boxed{}$$

$$|z| = \sqrt{\boxed{}} = \boxed{}$$

3. Vérifier que $z \times \bar{z} = |z|^2$:

$$z \times \bar{z} = (6 + 8i)(6 - 8i) = 36 - 48i + 48i - 64i^2 = 36 - 64 \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$|z|^2 = \boxed{}^2 = \boxed{} \checkmark$$

4. Le nombre $z = 6 + 8i$ représente la tension aux bornes d'un appareil électrique (en notation complexe). Quelle est l'intensité de la tension (valeur absolue du module) ?

Intensité = $|z|$ = unités

Mes calculs :

EXERCICE 13 Lire et construire un complexe dans le plan — exercice de synthèse

SOCLE

RAPPEL

Dans le plan complexe, au point $M(a; b)$ correspond le complexe $z = a + ib$.

Lire les coordonnées du point $\rightarrow$ écrire le complexe.

1. Lire les complexes : Pour chaque point placé dans le plan ci-dessous, donner le nombre complexe correspondant.

Point	Coordonnées $(a; b)$	Nombre complexe $z = a + ib$
A	$(4; 3)$	
B	$(-2; 5)$	
C	$(0; -4)$	
D	$(6; 0)$	

2. Pour chaque complexe, calculer son module :

$$|z_A| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{\square} = \square$$

$$|z_B| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{\square} \approx \square$$

$$|z_C| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \square$$

$$|z_D| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \square$$

Mes calculs :

EXERCICE 14 Résoudre $z^2 = -a$ — guidé

SOCLE

MÉTHODE

Si $a > 0$, l'équation $z^2 = -a$ a deux solutions imaginaires pures :

$$z_1 = i\sqrt{a} \text{ et } z_2 = -i\sqrt{a}$$

Exemple guidé : Résoudre $z^2 = -16$.

$$\sqrt{16} = 4 \rightarrow \text{Solutions : } z_1 = \boxed{4i} \text{ et } z_2 = \boxed{-4i}$$

$$\text{Vérification : } (4i)^2 = 16i^2 = 16 \times (-1) = -16 \checkmark$$

À toi :

Équation	$\sqrt{a} = \square$	Solutions
$z^2 = -36$	$\square$	$z_1 = \square$ et $z_2 = \square$
$z^2 = -1$	$\square$	$z_1 = \square$ et $z_2 = \square$
$z^2 = -49$	$\square$	$z_1 = \square$ et $z_2 = \square$
$z^2 = -3$	$\sqrt{3}$	$z_1 = \square$ et $z_2 = \square$

Mes calculs :

EXERCICE 15 Multiplier des nombres complexes

STANDARD

Calculer les produits suivants en utilisant la règle $i^2 = -1$. Donner le résultat sous forme algébrique.

a) $(2 + 3i)(4 - i)$

b) $(1 + i)(1 - i)$

c) $(-3 + 2i)(5 + 4i)$

d) $(2i)(3 - 5i)$

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 16 Calculer le module d'un nombre complexe

STANDARD

Le module de $z = a + ib$ est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Calculer le module de chaque nombre complexe :

z	a	b	$a^2 + b^2$	$ z $
$z_1 = 3 + 4i$				
$z_2 = -5 + 12i$				
$z_3 = 1 - i$				
$z_4 = 6i$				
$z_5 = -2 - 2i$				

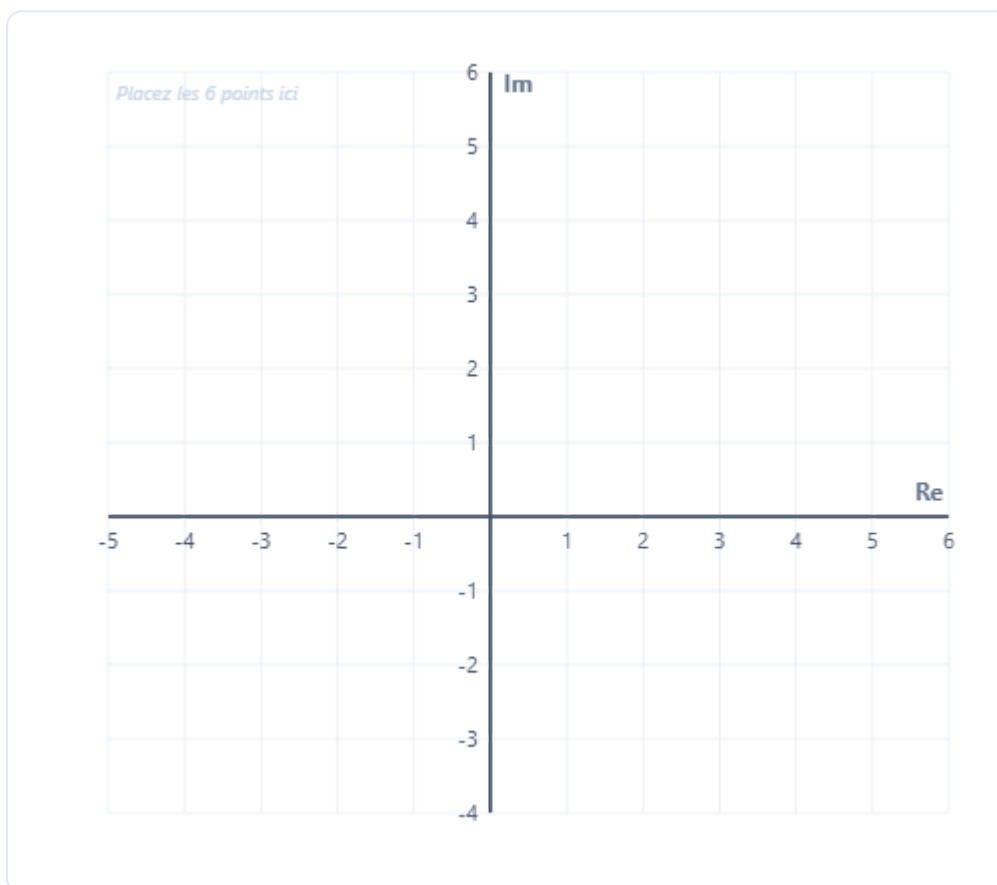
Mes calculs :

EXERCICE 17 Représenter des nombres complexes dans le plan

STANDARD

Placer les nombres complexes suivants dans le plan complexe (axe horizontal = partie réelle, axe vertical = partie imaginaire) :

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = -1 + 4i \quad z_3 = -3 - 2i \quad z_4 = 4 - 3i \quad z_5 = 5i \quad z_6 = -4$$



Plan complexe — placez les 6 points

Mes calculs :

EXERCICE 18 Opérations complexes — contexte professionnel

STANDARD

Contexte : Un installateur thermique modélise les tensions dans un circuit électrique par des nombres complexes : $Z_1 = 3 + 4i$ (bobine) et $Z_2 = 5 - 2i$ (condensateur), exprimées en ohms.

1. Calculer l'impédance totale en série : $Z = Z_1 + Z_2$. Donner $\text{Re}(Z)$ et $\text{Im}(Z)$.
2. Calculer le module $|Z|$ (impédance totale en ohms, arrondir au centième).
3. Si la tension d'alimentation est $U = 230 \text{ V}$, calculer l'intensité efficace $I = \frac{U}{|Z|}$. Arrondir au centième d'ampère.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 19 Argument d'un nombre complexe**STANDARD**

Rappel : l'argument θ de $z = a + ib$ vérifie $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$.

Pour chaque nombre complexe, calculer le module et l'argument (exprimer en degrés, arrondir au dixième) :

a) $z_1 = 4 + 4i$

b) $z_2 = -3$

c) $z_3 = 5i$

d) $z_4 = 2 - 2\sqrt{3}i$

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 20

Équation du second degré à discriminant négatif — contexte menuiserie

STANDARD

Contexte : Un technicien d'agencement modélise la vibration d'un panneau par l'équation $x^2 - 4x + 8 = 0$. L'ingénieur lui demande de résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

1. Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. Le discriminant est-il positif ou négatif ? Que peut-on en déduire sur les solutions ?
3. Donner les deux solutions complexes z_1 et z_2 . Vérifier que $z_2 = \overline{z_1}$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 21 Représentation dans le plan — distances et milieu

STANDARD

Dans le plan complexe, on considère les points A d'affixe $z_A = 2 + 3i$ et B d'affixe $z_B = 6 + i$.

1. Calculer $z_B - z_A$.
2. En déduire la distance $AB = |z_B - z_A|$.
3. L'affixe du milieu M de $[AB]$ est $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$. Calculer z_M .
4. Vérifier que $|z_M - z_A| = \frac{AB}{2}$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 22 Impédance d'un circuit RC — contexte professionnel

STANDARD

Contexte : Un plombier chauffagiste vérifie le circuit de commande d'une vanne motorisée. Le circuit RC a une résistance $R = 120 \, \Omega$ et une réactance capacitive $X_C = -50 \, \Omega$ à la fréquence de 50 Hz.

1. Écrire l'impédance complexe $\underline{Z} = R + jX_C$.
2. Calculer le module $|\underline{Z}|$. Arrondir au dixième.
3. Calculer le conjugué $\overline{\underline{Z}}$.
4. Vérifier la propriété $\underline{Z} \times \overline{\underline{Z}} = |\underline{Z}|^2$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 23 Résoudre des équations du second degré — applications variées

STANDARD

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. Calculer d'abord Δ , puis conclure.

a) $z^2 + 6z + 10 = 0$

b) $z^2 - 2z + 10 = 0$

c) $z^2 + 9 = 0$

d) $3z^2 - 6z + 9 = 0$

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 24

Forme trigonométrique — tableau de conversion

STANDARD

Compléter le tableau de conversion entre forme algébrique et forme trigonométrique :

Forme algébrique	Module r	Argument θ	Forme trigonométrique
$z_1 = \sqrt{3} + i$			
$z_2 = -2i$			
$z_3 = -1 - i$			
$z_4 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$			$z_4 =$
$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$			$z_5 =$

Compléter le tableau ci-dessus.

Mes calculs :

EXERCICE 25 Forme algébrique $\leftrightarrow$ forme trigonométrique**APPROFONDISSEMENT**

La forme trigonométrique de z est : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, où θ est l'argument de z .

Partie A — Algébrique $\rightarrow$ Trigonométrique : convertir les nombres suivants.

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = -\sqrt{3} + i$

c) $z_3 = -2$

Partie B — Trigonométrique $\rightarrow$ Algébrique : convertir les nombres suivants.

d) $z_4 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

e) $z_5 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 26 Résoudre $z^2 = -a$ (avec $a > 0$) **APPROFONDISSEMENT**

On cherche les nombres complexes z tels que z^2 soit un réel négatif.

- a) Résoudre $z^2 = -9$.
- b) Résoudre $z^2 = -25$.
- c) Résoudre $z^2 = -7$.
- d) Vérifier : si $z = 3i$, calculer z^2 .

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 27 Résoudre une équation du second degré à discriminant négatif

APPROFONDISSEMENT

On résout $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, les solutions sont complexes :

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

a) Résoudre $z^2 - 2z + 5 = 0$.

b) Résoudre $z^2 + 4z + 13 = 0$.

c) Résoudre $2z^2 - 4z + 4 = 0$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 28 Impédance d'un circuit en courant alternatif

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un technicien chauffagiste-climaticien installe une pompe à chaleur raccordée au réseau électrique. Pour dimensionner les protections, il doit calculer l'impédance complexe du circuit. En électrotechnique, on note j l'unité imaginaire (au lieu de i , réservé à l'intensité du courant).

RAPPEL

L'**impédance complexe** d'un circuit est : $\underline{Z} = R + jX$

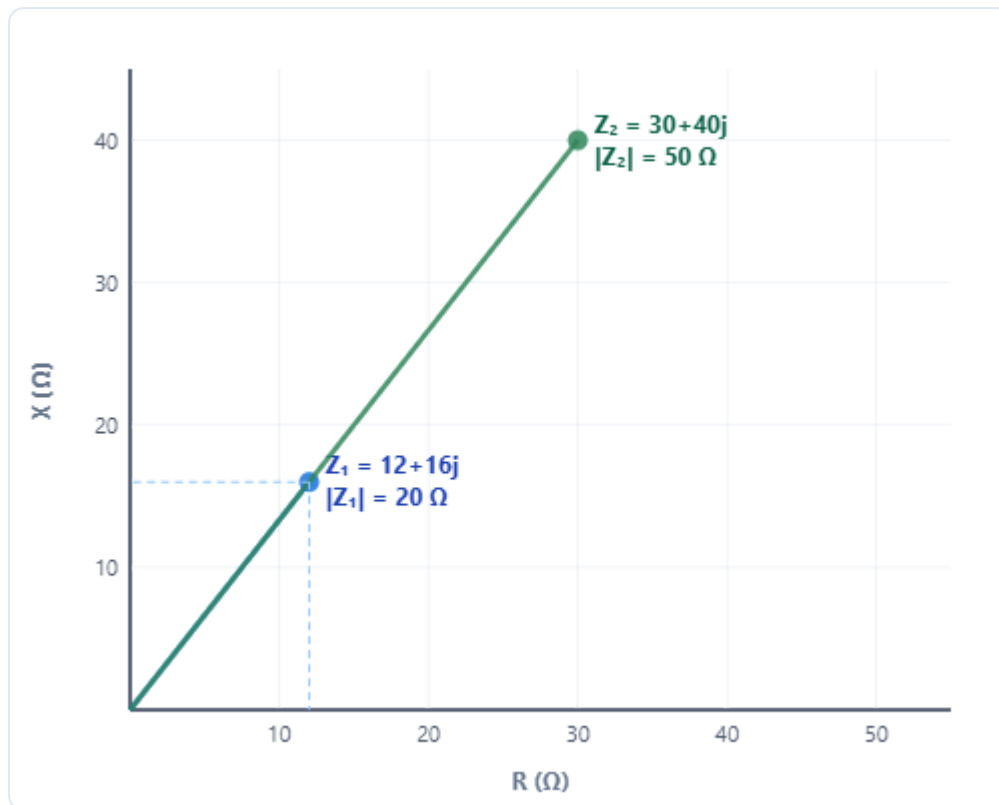
- R = résistance (en Ω) • X = réactance (en Ω)
- Le **module** $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$ donne l'impédance totale.
- L'intensité efficace : $I = \frac{U}{|\underline{Z}|}$ (U = tension efficace en V).

Le circuit de la pompe à chaleur a les caractéristiques suivantes :

Composant	Résistance R (Ω)	Réactance X (Ω)
Compresseur	12	16
Ventilateur	30	40

Tension du réseau : $U = 230$ V.

1. Écrire l'impédance complexe du compresseur $\underline{Z}_1$.
2. Calculer le module $|\underline{Z}_1|$.
3. En déduire l'intensité I_1 traversant le compresseur.
4. Écrire l'impédance complexe du ventilateur $\underline{Z}_2$ et calculer $|\underline{Z}_2|$.
5. Calculer l'intensité I_2 du ventilateur.
6. Un disjoncteur de 16 A protège le circuit du compresseur. Est-il suffisant ?



Représentation des impédances dans le plan complexe

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 29 Résonance d'un circuit RLC**APPROFONDISSEMENT**

Contexte : Un installateur en génie climatique vérifie le circuit électrique d'un système de ventilation. Le circuit comporte une résistance R , une bobine (réactance inductive $X_L > 0$) et un condensateur (réactance capacitive $X_C < 0$). L'impédance totale est $\underline{Z} = R + j(X_L + X_C)$.

Caractéristiques du circuit :

- $R = 10 \, \Omega$
- $X_L = +24 \, \Omega$ (bobine)
- $X_C = -24 \, \Omega$ (condensateur)
- Tension : $U = 230 \, \text{V}$

1. Écrire l'impédance complexe totale $\underline{Z}$.
2. Que vaut la partie imaginaire de $\underline{Z}$? Que se passe-t-il ?
3. Calculer le module $|\underline{Z}|$ et l'intensité I .
4. Ce phénomène s'appelle la **résonance**. Quelle est la condition sur X_L et X_C ?
5. Pourquoi l'intensité est-elle maximale à la résonance ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 30 Distances et plan complexe en agencement**APPROFONDISSEMENT**

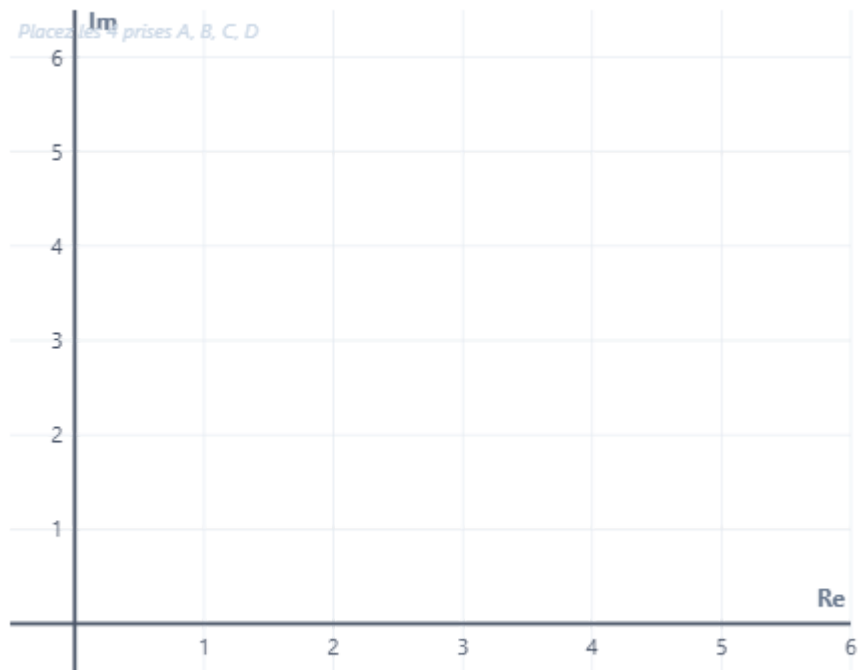
Contexte : Un agenceur d'intérieur utilise un plan coté pour implanter des prises électriques dans une pièce rectangulaire. Il place un repère dans le coin inférieur gauche de la pièce et associe un nombre complexe à chaque prise.

Positions des prises (en mètres) :

Prise	Nombre complexe	Position $(x ; y)$
A	$z_A = 1 + 2i$	(1 m ; 2 m)
B	$z_B = 4 + 2i$	(4 m ; 2 m)
C	$z_C = 4 + 5i$	(4 m ; 5 m)
D	$z_D = 1 + 5i$	(1 m ; 5 m)

La distance entre deux points z_1 et z_2 dans le plan complexe est $d = |z_2 - z_1|$.

1. Placer les 4 prises dans le plan complexe ci-dessous.
2. Calculer la distance AB.
3. Calculer la distance AC (diagonale).
4. L'agenceur doit tirer un câble de A vers C. Combien de mètres de câble faut-il prévoir (ajouter 10 % de marge) ?
5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier par les distances.



Plan de la pièce — placez les 4 prises

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 31 Calcul d'impédance RLC — circuit de ventilation**APPROFONDISSEMENT**

Contexte : Un technicien CVC dimensionne le circuit électrique d'un système de ventilation double-flux. Le circuit comporte : $R = 15 \, \Omega$, une bobine de réactance $X_L = L\omega = 0,08 \times 314 \approx 25,1 \, \Omega$ et un condensateur de réactance $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{400 \times 10^{-6} \times 314} \approx 7,96 \, \Omega$. Tension : 230 V.

1. Écrire l'impédance complexe $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$. Arrondir à l'unité.
2. Calculer $|\underline{Z}|$ et l'intensité efficace I . Arrondir au centième.
3. Donner l'argument $\varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$ en degrés. Interpréter : le circuit est-il inductif ou capacitif ?
4. Le disjoncteur est calibré à 16 A. La protection est-elle adaptée ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 32 Produit de complexes et applications géométriques

APPROFONDISSEMENT

On considère les complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Calculer $z_1 \times z_2$ en forme algébrique.
2. Calculer $|z_1|$, $|z_2|$ et $|z_1 \times z_2|$. Vérifier la propriété $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
3. Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
4. En déduire la forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$, puis vérifier avec la question 1.
5. Quel est l'argument de $z_1 \times z_2$? Interpréter géométriquement : que fait la multiplication par z_1 ?

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 33 Modélisation d'un signal électrique — courant alternatif sinusoïdal

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Un technicien en énergies renouvelables analyse le signal d'un onduleur solaire. La tension est modélisée par $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ où U_m est l'amplitude, $\omega = 2\pi f$ la pulsation et φ la phase. En notation complexe (phasor) :

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}.$$

Pour le circuit : $\underline{U} = 163e^{j\pi/6}$ V (amplitude efficace : $U = 163$ V, phase : $\varphi = 30^\circ$).

1. Convertir $\underline{U}$ en forme algébrique (utiliser $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$). Arrondir à l'unité.
2. Vérifier que $|\underline{U}| = 163$.
3. La tension efficace du réseau est $U_{\text{eff}} = \frac{|\underline{U}|}{\sqrt{2}} \approx \frac{163}{\sqrt{2}}$. Calculer U_{eff} et vérifier qu'elle est proche de 115 V (tension de sortie typique d'un onduleur 12V $\rightarrow$ 115V).
4. Le courant de charge a pour phasor $\underline{I} = 5e^{-j\pi/12}$. Calculer l'angle de déphasage entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$.

Réponses :

Mes calculs :

EXERCICE 34 Lieux géométriques dans le plan complexe**APPROFONDISSEMENT**

Contexte : Un ingénieur thermicien modélise des zones d'équidistance dans un bâtiment par des ensembles de points dans le plan complexe.

On considère les complexes $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 5 + 4i$ représentant deux capteurs de température.

1. Calculer la distance $AB = |z_B - z_A|$.
2. Déterminer l'afixe z_M du milieu de $[AB]$.
3. Un point C d'afixe $z_C = a + bi$ est à égale distance de A et de B . On a donc $|z_C - z_A| = |z_C - z_B|$.
Montrer que cela implique : $(a - 1)^2 + (b - 2)^2 = (a - 5)^2 + (b - 4)^2$.
4. Développer et simplifier cette équation. À quelle courbe géométrique correspond l'ensemble des points C ?
5. Vérifier que le milieu M trouvé en question 2 appartient à cette courbe.

Réponses :

Mes calculs :

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir



Objectifs du chapitre

cliquer pour développer



Durée : 1 heure



Calculatrice : autorisée



Barème : 20 points



Documents : non autorisés

SOCLE Exercice 1 – Opérations guidées sur les complexes

10 points

RAPPELS

- Un nombre complexe s'écrit $z = a + bi$ où $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.
- Addition : $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- Multiplication : on développe et on utilise $i^2 = -1$.

On donne $z_1 = 5 + 2i$ et $z_2 = 3 - i$.

1. (1 pt) Compléter : $\text{Re}(z_1) = \square$ et $\text{Im}(z_1) = \square$.

2. (1 pt) Compléter : $\text{Re}(z_2) = \square$ et $\text{Im}(z_2) = \square$.

3. (2 pts) Calculer $z_1 + z_2$ en complétant :

Parties réelles : $5 + 3 = \square$

Parties imaginaires : $2 + (-1) = \square$

Donc $z_1 + z_2 = \square + \square i$

4. (3 pts) Calculer $z_1 \times z_2$ en complétant le développement :

$$(5 + 2i)(3 - i) = 5 \times 3 + 5 \times (-i) + 2i \times 3 + 2i \times (-i)$$

$$= \square + \square + \square + \square$$

$$\text{On remplace } i^2 = -1 : -2i^2 = -2 \times (-1) = \square$$

$$\text{Résultat : } z_1 \times z_2 = \square + \square i$$

5. (1 pt) Donner le conjugué $\bar{z}_1$ de z_1 (on change le signe de la partie imaginaire) : $\bar{z}_1 = \square$

6. (2 pts) Calculer le module $|z_1|$ en complétant :

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\square^2 + \square^2} = \sqrt{\square + \square} = \sqrt{\square}$$

$$\text{Valeur approchée (calculatrice) : } |z_1| \approx \square$$

SOCLE Exercice 2 – Module et plan complexe guidé

10 points

RAPPEL — MODULE

Le module de $z = a + bi$ est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Il représente la distance du point $M(a; b)$ à l'origine dans le plan complexe.

Contexte : Un électricien repère les positions de 3 boîtiers électriques sur le plan d'une pièce. Il associe un nombre complexe à chaque boîtier (unité : le mètre).

Boîtier A : $z_A = 3 + 4i$ Boîtier B : $z_B = -2 + i$ Boîtier C : $z_C = 1 - 3i$

1. (3 pts) Compléter le tableau :

Boîtier	a	b	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$
A : $3 + 4i$						
B : $-2 + i$						
C : $1 - 3i$						

2. (3 pts) Placer les 3 boîtiers dans le plan complexe ci-dessous. Pour chaque point, indiquer les coordonnées $(a; b)$.

3. (2 pts) L'électricien veut connaître la distance entre A et B. Calculer pas à pas :

$$z_B - z_A = (-2 + i) - (3 + 4i) = (\text{ }) + (\text{ })i$$

$$d_{AB} = |z_B - z_A| = \sqrt{\text{ }^2 + \text{ }^2} = \sqrt{\text{ }} \approx \text{ } \text{ m}$$

4. (2 pts) Quel boîtier est le plus éloigné de l'origine ? Justifier à l'aide des modules calculés à la question 1.

TOTAL SOCLE : 20 points

Exercice 1 – Opérations en forme algébrique

7 points

On donne $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - 4i$.

1. (1 pt) Calculer $z_1 + z_2$.

2. (1,5 pt) Calculer $z_1 \times z_2$. Écrire le résultat sous forme algébrique $a + bi$.

3. (1 pt) Déterminer le conjugué $\bar{z}_1$ de z_1 .

4. (1,5 pt) Calculer le module $|z_1|$ et le module $|z_2|$. Donner les valeurs exactes.

5. (2 pts) Calculer le quotient $\frac{z_1}{z_2}$. Donner le résultat sous forme algébrique.

Exercice 2 – Forme trigonométrique et plan complexe

7 points

1. (2 pts) Écrire le nombre complexe $z = 1 + i$ sous forme trigonométrique $r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Préciser le module r et l'argument θ .

2. (2 pts) Écrire le nombre complexe $w = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ sous forme algébrique.

3. (1,5 pt) Placer dans le plan complexe les points M_1 , M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 2i$ et $z_3 = 3 - i$. Préciser leurs coordonnées cartésiennes.

4. (1,5 pt) En utilisant la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, écrire $z = 1 + i$ sous la forme exponentielle $re^{i\theta}$.

Exercice 3 – Impédance d'un circuit RL (contexte professionnel)

6 points

Contexte : Un technicien en installation climatique étudie un circuit électrique alimentant le moteur d'une pompe à chaleur. Le circuit comporte une résistance $R = 30 \, \Omega$ et une bobine d'inductance L telle que la réactance inductive vaut $X_L = 40 \, \Omega$. L'impédance complexe du circuit est :

$$\underline{Z} = R + jX_L = 30 + 40j \quad (\text{en } \Omega)$$

où j désigne l'unité imaginaire (notation électrique).

1. (2 pts) Calculer le module $|\underline{Z}|$ de l'impédance. Quelle est sa signification physique ?

2. (2 pts) Calculer l'argument φ (déphasage) de $\underline{Z}$ en degrés. Arrondir au degré. Interpréter : le courant est-il en avance ou en retard sur la tension ?

3. (2 pts) La tension d'alimentation est $U = 230 \, \text{V}$ (valeur efficace). Calculer l'intensité efficace $I = \frac{U}{|\underline{Z}|}$ et la puissance active $P = UI \cos \varphi$. Arrondir au dixième.

TOTAL STANDARD : 20 points

RLC

Contexte : Un technicien en installation climatique dimensionne le circuit d'alimentation électrique d'une unité de climatisation réversible. Le circuit comporte en série une résistance R , une bobine (réactance inductive X_L) et un condensateur de compensation (réactance capacitive X_C). En notation électrique, l'unité imaginaire est notée j .

Caractéristiques du circuit :

- $R = 15 \, \Omega$
- $X_L = +36 \, \Omega$ (bobine du compresseur)
- $X_C = -16 \, \Omega$ (condensateur de compensation)
- Tension du réseau : $U = 230 \, \text{V}$ (valeur efficace)

1. (1,5 pt) Écrire l'impédance complexe totale $\underline{Z} = R + j(X_L + X_C)$ sous forme algébrique.

2. (2 pts) Calculer le module $|\underline{Z}|$. Donner la valeur exacte puis la valeur approchée au dixième.

3. (1,5 pt) Calculer l'intensité efficace $I = \frac{U}{|\underline{Z}|}$. Arrondir au dixième.

4. (2 pts) Calculer l'argument $\varphi = \arctan\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right)$ en degrés. En déduire la puissance active $P = UI \cos \varphi$.

5. (1,5 pt) On souhaite atteindre la résonance ($\text{Im}(\underline{Z}) = 0$). Quelle doit être la valeur de X_C pour cela ? Calculer l'intensité à la résonance et expliquer pourquoi elle est maximale.

6. (1,5 pt) Le disjoncteur du circuit est calibré à 20 A. Comparer l'intensité de résonance au calibre. Un fonctionnement accidentel en résonance présente-t-il un risque ? Justifier.

APPROFONDISSEMENT Exercice 2 – Géométrie et nombres complexes

10 points

Dans le plan complexe, on considère les points A , B et C d'affixes :

$$z_A = 1 + i \quad z_B = 4 + 5i \quad z_C = -2 + 4i$$

1. (2 pts) Calculer les distances AB , BC et AC . On rappelle que la distance entre deux points d'affixes z_1 et z_2 est $d = |z_2 - z_1|$.

2. (1,5 pt) Le triangle ABC est-il isocèle ? Équilatéral ? Justifier.

3. (2 pts) Calculer l'affixe du milieu M du segment $[AB]$: $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$. Interpréter géométriquement.

4. (2,5 pts) On définit $z' = z_B - z_A$. Écrire z' sous forme algébrique, calculer son module et son argument. Interpréter : que représente z' géométriquement ?

5. (2 pts) Vérifier que $|z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2 = |z_C - z_B|^2$. Qu'en déduit-on sur la nature du triangle ? (Indication : penser au théorème de Pythagore)

TOTAL APPROFONDISSEMENT : 20 points
