

Mathématiques – CCINP/E3A – DS₄

Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).

Numérotez chaque page de votre devoir.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Suite de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

Q1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée f .

Q2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$.

Q3. Soit $A > 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, A]$.

Q4. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-A, A]$.

Q5. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : Limite de matrices (E3A PSI 2015)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 1 - \frac{\sin(n)}{n} \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où n est un entier non nul.

Q6. Déterminer $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

Q7. Étudier la diagonalisabilité des matrices A_n et A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q8. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Problème : Matrices nilpotentes (E3A PSI 2017)

Dans tout le problème, on se donne $n \geq 2$ un entier et on note

- $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels,
- O_n la matrice nulle de $\mathcal{E}$ et I_n la matrice identité,
- $A^\top$ la transposée d'un élément de $\mathcal{E}$,
- $E_{i,j} \in \mathcal{E}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{E}$,
- $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices **nilpotentes** de $\mathcal{E}$, c'est à dire des $A \in \mathcal{E}$ telles qu'il existe un entier p avec $A^p = O_n$.

Questions de cours

Q9. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$? En donner sans justification une base.

Q10. Soient $i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. calculer le produit des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$. On montrera en particulier que ce produit est nul lorsque $j \neq k$.

Q11. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Q12. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie 1 : Propriétés élémentaires

Soit A un élément de $\mathcal{N}$

- Q13.** La matrice A peut-elle être inversible ? Justifier votre réponse.
- Q14.** On note $\text{Sp}(A)$ le spectre de A , c'est à dire l'ensemble des valeurs propres complexes de la matrice A . Déterminer $\text{Sp}(A)$ et donner le polynôme caractéristique de A .
- Q15.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
- Q16.** Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par A , noté $\text{Vect}(A)$, est inclus dans $\mathcal{N}$.
- Q17.** Vérifier que $A^\top \in \mathcal{N}$.
- Q18.** Montrer que si M est semblable à A , alors $M \in \mathcal{N}$.
- Q19.** Montrer que $A^n = O_n$.
- Q20.** En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{E}$ soit nilpotente est que $M^n = O_n$.
On pourra admettre ce résultat et l'utiliser dans la suite du problème.
- Q21.** Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est le rang maximal de A ?

Soient $(B, C) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$.

- Q22.** On suppose que $BC \in \mathcal{N}$. Prouver alors que $CB \in \mathcal{N}$.
- Q23.** Ici, on suppose de plus que $B \in \mathcal{N}$ et $AB = BA$. Montrer que $AB \in \mathcal{N}$ et que $A + B \in \mathcal{N}$.
 On admet le résultat suivant :

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q24.** Déterminer l'ensemble de toutes les matrices symétriques réelles appartenant à $\mathcal{N}$.
- Dans les deux questions suivantes,** on suppose que la matrice nilpotente A est antisymétrique.
- Q25.** Prouver que $A^2 = O_n$.
- Q26.** En déduire l'ensemble de toutes les matrices antisymétriques appartenant à $\mathcal{N}$ (on pourra utiliser la trace).

Partie 2 : Exemples

Dans cette partie, M est une matrice de $\mathcal{E}$.

Exemple 1

Dans cet exemple, on prend $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$ définie par : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, c'est à dire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Q27.** Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de la matrice M .
- Q28.** On pose $S = M + M^\top$. A-t-on $S \in \mathcal{N}$?
 Montrer que $S^2 \in \text{Vect}(I_n, S)$. Déterminer alors les éléments propres de la matrice S .
- Q29.** $\mathcal{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

Exemple 2

Dans cet exemple, on prend $n = 2$.

Q30. On suppose que M est de rang 1.

Montrer que $M^2 = \text{tr}(M)M$. En déduire que M est diagonalisable ou nilpotente.

Q31. Déterminer une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale n'est pas identiquement nulle.

Q32. En déduire l'ensemble de toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie 3 : Sous-espace engendré par $\mathcal{N}$

Soient

- T_0 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des matrices de trace nulle
- V le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{N} : V = \text{Vect}(\mathcal{N})$, c'est à dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires (finies) d'éléments de $\mathcal{N}$.

Q33. Déterminer la dimension de T_0 .

Q34. Prouver que $\mathcal{N}$ et V sont inclus dans T_0 .

Pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on note

$$F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j} \quad \text{et} \quad G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$$

Q35. Calculer F_j^2 .

Q36. Montrer que $G_j \in V$.

Q37. Soit $\mathcal{F}$ la famille de $\mathcal{E}$ constituée des $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et de toutes les matrices G_k pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre dans V .

Q38. En déduire que $V = T_0$.

Partie 4 : Sous-espaces de dimension maximale contenus dans $\mathcal{N}$

On note $\mathcal{T}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée uniquement de 0.

Q39. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_1$.

Q40. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_1$. On pourra utiliser les résultats de la partie 1.

Q41. Démontrer que $\mathcal{E} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_1$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ dont la dimension est notée d .

Q42. On suppose que $d > \frac{n(n-1)}{2}$. Démontrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$. Conclure.

Q43. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$? Donner un exemple de tel sous-espace.

Partie 5 : Un peu de topologie

$\mathcal{E}$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé de dimension finie.

Q44. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{E}$.

Q45. Soient $A \in \mathcal{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $M = I_n + \alpha A$.

Montrer que $\det(M) = 1$. En déduire que toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que $\mathcal{N}$ ne possède pas de point intérieur.

Q46. Soit F un sous-espace de $\mathcal{E}$. Montrer que si F admet au moins un point intérieur, alors $F = \mathcal{E}$.
Retrouver alors le résultat de la question précédente.