

# Matrices et déterminants

## 1.1. Définitions

### 1.1.1. Définitions

Une matrice A d'ordre (n,p) est un tableau de n x p nombre  $a_{ij}$  rangés sur n lignes et p colonnes.

Les nombres  $a_{ij}$  sont les termes de la matrice A. Le premier indice i indique le numéro de la ligne et le second indice j indique le numéro de la colonne. Le terme  $a_{ij}$  est donc l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

On note la matrice A :  $A = (a_{ij})_{n.p}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ : & : & : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A est une matrice à 4 lignes et 3 colonnes (4,3).

### 1.1.2. Matrices particulières

$$B = (1 \ 2 \ 0 \ -1)$$

est une matrice à une ligne et 4 colonnes (1,4), on dit que B est une matrice ligne d'ordre 4. Plus généralement les matrices d'ordre (1,p) sont dites matrices ligne d'ordre p.

•

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice à 3 lignes et une colonne (3,1), on dit que C est une matrice colonne d'ordre 3. Plus généralement les matrices d'ordre (n,1) sont dites matrices colonnes d'ordre n.

•

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice à 3 lignes et 3 colonnes, on dit que D est une matrice carrée d'ordre 3. Plus généralement les matrices d'ordre (n,n) sont dites matrices carrées d'ordre n.

•

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice identité d'ordre 3 notée  $I_3$ .

•

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice nulle tous ses termes sont égaux à zéro.

**Remarque :** Deux matrices sont égales si et seulement si les termes correspondants sont identiques, c'est à dire qu'elles sont formées des mêmes éléments placés aux même endroits.

### 1.1.3. Transposée d'une matrice

Soit la matrice  $A = (a_{ij})_{n,p}$ . On appelle matrice transposée de A notée  ${}^tA$  la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes dans la matrice A :  ${}^tA = (a_{ji})_{p,n}$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Application :** Calculez les transposées des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution : Voir le site

**Remarque :**

Matrice symétrique :  ${}^tA = A$

Matrice antisymétrique :  ${}^tA = -A$

## 1.2. Addition matricielle

### 1.2.1. Définition

Soit  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de même ordre  $(n,p)$ . La matrice  $A + B$  est la matrice d'ordre  $(n,p)$  obtenue en additionnant terme à terme les éléments de  $A$  et  $B$ .  
d'où :

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

**Exemple :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 1.2.2. Propriétés

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes :  
Commutativité :  $A+B=B+A$

- Associativité :  $A+(B+C)=(A+B)+C$
- Existence d'un élément neutre :  $A + (0) = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Existence d'une symétrie :  $A + (-A) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'une manière générale si  $A = (a_{ij})$  est une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, sa symétrique par rapport à l'addition est la matrice  $(-A)$  de terme général  $A = (-a_{ij})$

$$A + (-A) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0)$$

$(-A)$  est la matrice symétrique de  $A$ .

**Application :**

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez les matrices  $(A+B)$ ,  $(B+A)$ ,  $(B+C)$ ,  $(C+A)$

Solution Voir le site

### 1.3. Multiplication par un nombre

Si  $k \in \mathbb{R}$  et  $A = (a_{ij})$  alors :  $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

**Exemple :**  $k=2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$kA = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

**Propriétés :**

Soient deux matrices  $A$  et  $B$  et deux réels  $k$  et  $l$  :

$$(k+l)A = kA + lA$$

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$k(lA) = (kl)A$$

**Application :** Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Calculez :  $2A-4B$  ;  $3A+2C$  ;  $2A-2B+3C$

Solution : Voir le site

## 1.4. Multiplication des matrices

### 1.4.1. Définition

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice d'ordre  $(n,p)$  et  $B = (b_{ij})$  une matrice d'ordre  $(p,q)$ . La matrice  $AB$  est une matrice d'ordre  $(n,q)$  dont le terme général  $C_{ij}$  est obtenu en multipliant les éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  par les éléments de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B$  et en additionnant les produits obtenus :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Ainsi pour effectuer le produit  $AB$  il faut que le nombre de colonnes de la matrice  $A$  soit égal au nombre de lignes de la matrice  $B$  :

$$A_{(n,p)} \cdot B_{(p,q)} = C_{(n,q)}$$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculez les produits :  $A.B$  et  $B.A$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{11} : 5 = 1*0 + 2*1 + 3*1 \\ a_{12} : 4 = 1*1 + 2*0 + 1*3 \\ a_{21} : 3 = 3*0 + 2*1 + 1*1 \\ a_{22} : 4 = 3*1 + 2*0 + 1*1 \end{array}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 0*1 + 1*3 = 3 & a_{21} = 1*1 + 0*3 = 1 & a_{31} = 1*1 + 1*3 = 4 \\ a_{12} = 0*2 + 1*2 = 2 & a_{22} = 1*2 + 0*2 = 2 & a_{32} = 1*2 + 1*2 = 4 \\ a_{13} = 0*3 + 1*1 = 1 & a_{23} = 1*3 + 0*1 = 3 & a_{33} = 1*3 + 1*1 = 4 \end{array}$$

On remarque que la multiplication des matrices n'est pas commutative, car en général on a :

$$AB \neq BA$$

### Application :

Calculez A.B dans chacun des cas suivants :

$$*A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$*A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$*A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : Voir le site

### 1.4.2. Puissances successives d'une matrice

Par analogie avec les nombre réels, on pose :

$$A^2 = A.A, A^3 = A.A.A = A^2.A = A.A^2$$

$$A^n = A.A.....A \quad n \text{ termes}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$$

L'égalité  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  ne se produira que dans le cas où  $AB=BA$ . De même :

$$(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2 \neq A^2 - B^2$$

Les formules usuelles ne s'appliquent pas aux matrices sauf dans le cas particulier où A et B commutent

### Applications :

1- Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculer  $(A+B)$ ,  $(A-B)$ ,  $(A+B)(A-B)$  et  $(A^2 - B^2)$

2- Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

En posant  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  calculer et déterminer 2 réels a et b

tel que  $A = aI + bJ$

Solution

## 1.5. Les matrices carrées

### 1.5.1. Matrices carrées particulières

Soit  $A=(a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , la suite  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  forme la diagonale principale de  $A$ .

- $A_1$  est une matrice triangulaire supérieure.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Tous les termes en-dessous de la diagonale principale sont nuls.

- $A_2$  est une matrice triangulaire inférieure.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tous les termes au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

- $A_3$  est une matrice diagonale.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Tous les termes sont nuls, à l'exception de ceux de la diagonale principale.

### 1.5.2. Propriétés de la multiplication des matrices carrées

Soient 3 matrices carrées  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'ordre  $n$  :

- Associativité :  $A(BC) = (AB)C$
- Distributivité :  $A(B+C) = AB + AC$
- Élément neutre : Il existe une matrice  $I$  telle que :  $AI=IA=A$   
La matrice  $I$  est la matrice diagonale dont les termes de la diagonale principale sont tous égaux à 1 c'est la matrice identité.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Non commutativité : Le produit AB est généralement différent du produit B.A

### 1.5.3. Inverse d'une matrice carrée

On appelle inverse d'une matrice A carré d'ordre n, une matrice B telle que :

$$AB = BA = I$$

La matrice inverse de A est notée  $A^{-1}$ , elle est unique si elle existe.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

**Remarque :**

Si A et B sont inversibles, la matrice (AB) est inversible et admet pour inverse la matrice  $(B^{-1}A^{-1})$ .

**Exemple :**

Soient les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer MN et en déduire  $M^{-1}$ .

$$MN = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4I$$

$$\text{donc } MN = -4I \quad \text{d'où } -\frac{1}{4}MN = I$$

$$M \left( -\frac{1}{4}N \right) = I \quad \text{d'où } M^{-1} = -\frac{1}{4}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Application :**



$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculez  $A^2$  et en déduire  $A^{-1}$

Solution : Voir le site

**Remarque :**

- En général, on ne peut pas simplifier par A dans l'égalité  $AB = AC$ . Par exemple pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = 2A$$

simplifier par A conduit à un résultat absurde.

$$AB = 0 \text{ et } A \neq 0 \text{ n'entraîne pas } B = 0 \text{ par exemple } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.6. Le calcul des déterminants

### 1.6.1. Déterminant d'ordre 2

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A noté  $\det A$ , est égal à :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2 \times -4) - (3 \times 1) = -11$$

**Application :**

Calculez les déterminants des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

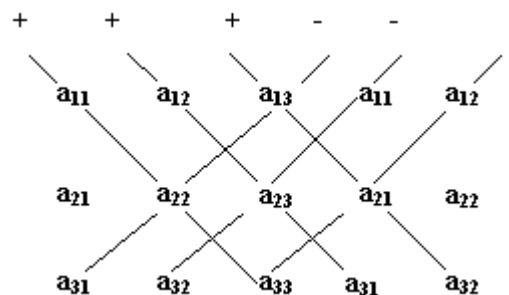
Solution : Voir le site

### 1.6.2. Déterminant d'ordre 3 (Méthode de Sarrus)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

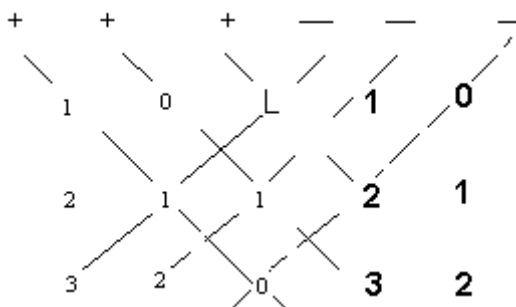
Pour calculer le déterminant d'ordre 3 de cette matrice, on utilise la règle de Sarrus. Ainsi, on écrit les trois colonnes de la matrice puis on répète la première et la deuxième colonne comme illustré ci-dessous. Ensuite, on fait le produit des nombres situés sur chacune des diagonales indiquées et on l'affecte du signe correspondant. Le déterminant est alors la somme des termes ainsi obtenus.



$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \det A &= [(1 \cdot 1 \cdot 0) + (0 \cdot 1 \cdot 3) + (1 \cdot 2 \cdot 2)] - [(3 \cdot 1 \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot 1) + (0 \cdot 2 \cdot 0)] \\ &= 0 + 0 + 4 + -0 - 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

**Application :**

Calculez les déterminants des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution : Voir le site

**Remarque :** Cette méthode n'est pas généralisable, elle n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3.

### 1.6.3. Règle générale du calcul des déterminants

Soit A une matrice carrée d'ordre n, pour calculer son déterminant on va utiliser un développement par rapport à une ligne ou une colonne comme suit:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On appelle mineur  $m_{ij}$  du terme  $a_{ij}$ , le déterminant obtenu en supprimant dans le déterminant la ligne i et la colonne j. C'est donc un déterminant d'ordre n-1

On appelle cofacteur  $C_{ij}$  du terme  $a_{ij}$  le nombre réel  $(-1)^{i+j} m_{ij}$ . Pour calculer  $\det A$ , on peut choisir une ligne et développer le déterminant par rapport à cette ligne.

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} m_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ik}$$

On peut également choisir une colonne, et développer le déterminant par rapport à cette colonne.

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} (-1)^{k+j} m_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} C_{kj}$$

**Exemples :**

•

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{calculer } \det A$$

On choisit la première ligne.

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 0 + 1 = -1$$

•

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calculer le déterminant de A

On choisit la première colonne.

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{pour le premier déterminant on choisit} \\ &\quad \text{la première colonne et pour le second} \\ &\quad \text{la deuxième colonne.} \\ &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \left( 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 4 - 1 + 2(0 - 0 - 1) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

**Remarque :**

Pour faciliter les calculs on choisit généralement la ligne ou la colonne où il y a le plus de termes nuls.

**Application :**

Calculez les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Solution : Voir le site

#### 1.6.4. Propriétés

- Le déterminant d'une matrice diagonale est égale au produit des termes de la diagonale principale.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit des termes de la diagonale principale.
- $\det kA = k^n \det A$  (A étant une matrice d'ordre n)
- $\det A = \det {}^t A$

## 1.7. Le calcul des matrices inverses

**Définition :** A est inversible s'il existe une matrice B telle que :  $AB=BA=I$   
B est la matrice inverse de A et elle est notée  $A^{-1}$ .

**Théorème :** Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro. Dans ce cas  $A^{-1}$  donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [{}^tC(A)]$$

où  ${}^tC(A)$  est la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

**Exemple :**

- Inverse d'une matrice d'ordre 2  
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 3$  donc A est inversible.

$$C(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tC(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [{}^tC(A)] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- Inverse d'une matrice d'ordre 3

soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 2+6-1-3=4$  donc A est inversible.

$$C(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tC(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [{}^tC(A)] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

### Remarque :

Pour vérifier que le calcul de  $A^{-1}$  est correct, il suffit de calculer le produit:  $AA^{-1}$  qui devrait être égale à la matrice identité  $I$ .

### Application :

Calculer l'inverse des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : Voir le site

## 1.8. Utilisation des matrices en économie et gestion

Considérons une entreprise qui fabrique (P) produits  $O_1, O_2, \dots, O_p$  à partir de (n) composant  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .

Les  $I_n$  peuvent être de la matière première, du travail, de l'énergie ...etc. Ils sont appelés « inupts », ils entrent dans la chaîne de production.

Les  $O_j$  sont appelés « output », ils sortent de la chaîne de production. Désignons par  $a_{ij}$  le nombre d'unité de l'input  $I_i$  nécessaires à la fabrication de l'output  $O_j$ .

$a_{ij}$  est le coefficient technique ou coefficient « input -output. »

La matrice  $A = (a_{ij})$  est la matrice technologique de production ou la matrice d'input-output.

$$A = (a_{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} O_1 & O_2 & \dots & O_p \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

### Exemple :

On considère une entreprise qui fabrique deux produits P1 et P2 à partir de trois matières premières Ma, Mb et Mc.

La fabrication d'une unité de P1 nécessite deux unités de la matière première Ma, trois unités de Mb et une seule unité de Mc.

La fabrication d'une unité de P2 nécessite trois unités de la matière première Ma, quatre unités de Mb et deux unités de Mc.

La matrice technologique relative à cet exemple de production est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 1.9. Exercices généraux : Voir le site

## Objectif

1- Résoudre les systèmes d'équations linéaires avec plusieurs méthodes.

## Systèmes linéaires

### 1- Définition

On appelle système linéaire à  $n$  équations et à  $p$  inconnues tout système de la forme :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_i$  sont des réels donnés, alors que  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  sont les inconnues du système.

**Exemple :**

$$S : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

(S) est un système linéaire de 3 équations et à 4 inconnues.

### 2- Représentation matricielle

On définit :

- La matrice  $A = (a_{ij})$  c'est la matrice du système

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Le vecteur  $B$  c'est le vecteur du second membre du système.



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

- Le vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  c'est le vecteur des inconnues du système.

Un système linéaire à (n) équations et (p) inconnues est équivalent à l'écriture matricielle suivante :

$$A_{(n,p)} X_{(p,1)} = B_{(n,1)}$$

Ecrivons alors l'exemple précédent sous forme matricielle:

- La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Le vecteur du second membre :

$$B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Application :

Ecrivez sous forme matricielle les systèmes suivants:

$$\begin{cases} 8 = 2x_1 - x_2 \\ 10 = 3x_1 + x_3 \\ 13 = x_2 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_3 - x_2 + x_1 \\ y_2 = x_2 - x_1 \\ y_3 = -3x_3 + x_2 \\ y_4 = x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 7 = 2x_1 - x_2 \\ 5 = x_2 - x_1 + 3x_3 \end{cases}$$

### Solution

### Remarques :

- La résolution du système revient à déterminer l'ensemble des solutions ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Le système sera impossible s'il n'a pas de solution, et indéterminé s'il en a une infinité.
- Deux systèmes linéaires seront équivalents s'ils ont un même ensemble de solutions.

## Résolution par la méthode de Cramer

### 1- Définition

Le système  $AX=B$  (forme matricielle) est dit système de Cramer si  $A$  est une matrice carrée et  $\det A$  est non nul. Dans ce cas le système de Cramer admet une solution unique vérifiant  $AX=B$ .

### 2- Résolution

La résolution à l'aide de la méthode de Cramer n'est donc possible que dans le cas où le nombre d'équations est égal à celui des inconnues.

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On note :

$$\Delta = \det A = \det[A_1 A_2 \dots A_n] \quad \text{avec} \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

D'une façon générale :

$$\Delta_i = \det [A_1 \ A_2 \dots A_{i-1} \ B \ A_{i+1} \dots A_n]$$

L'unique solution du système de Cramer est donnée par :

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

et d'une façon générale :

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

**Exemple :**

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

On peut appliquer la méthode de Cramer du fait qu'on a 3 équations et 3 inconnues mais il faut vérifier que  $\det A$  est non nul.

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 6 - 8 + 3 - 1 = -8$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 3 + 4 + 6 + 1 = 16$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 2 - 8 + 1 + 1 = -8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 12 + 4 - 3 - 2 = -16$$

$$\text{d'où : } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16}{-8} = -2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2$$

La solution du système est donnée par (-2, 1, 2)

### Application :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + 5y + 4z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = -6 \end{cases}$$

### Solution

## Résolution par la méthode du pivot de Gauss

### 1- Résolution par la méthode du pivot de Gauss

On considère le système à 4 équations et 4 inconnues suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 & (1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 & (2) \\ 2x_3 - x_4 = 6 & (3) \\ 3x_4 = 12 & (4) \end{cases}$$

Ce système d'équations particulier est dit système triangulaire supérieur du fait que sa matrice est triangulaire supérieure.

Un tel système est particulièrement simple à résoudre :

$$(4) \Rightarrow x_4 = 3$$

$$(3) \Rightarrow x_3 = 5$$

$$(2) \Rightarrow x_2 = 0$$

$$(1) \Rightarrow x_1 = 4$$

Un système triangulaire inférieur peut être aussi résolu de la même manière pourvue que tous les termes de la diagonale principale soient différents de zéro.

## 2- Méthode de Gauss ou du pivot

Elle consiste à transformer un système d'équations linéaires en un système triangulaire équivalent qui est plus simple à résoudre.  
 Cette démarche est basée sur le fait qu'on ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire lorsqu'on effectue les transformations élémentaires suivantes :

- Echanger deux équations du système
- Multiplier une équation par nombre réel non nul.
- Ajouter à une équation le produit d'une autre équation par un nombre réel.

## 3- Principe

La méthode de Gauss permet donc de transformer un système de (m) équations linéaires à (n) inconnues en un système triangulaire équivalent :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & (L_m) \end{cases}$$

- Si  $a_{11} \neq 0$   
 Pour tout  $i$  tel que  $2 \leq i \leq m$  on procède à l'opération :

$$L_i \rightarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

Le terme  $a_{11}$  s'appelle le pivot de cet ensemble d'opérations. On « élimine » ainsi l'inconnue  $x_1$  des équations  $L_2, L_3, \dots, L_m$  et l'on obtient le système équivalent (S').

$$(S') : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Le système (S') est formé de la première équation de (S) et d'un système de (m-1) équations à (n-1) inconnues avec lequel on se trouve ramené à la solution initiale. Il reste à trouver un second Pivot et à recommencer le même ensemble d'opérations.

- Si  $a_{11} = 0$  deux situations sont possibles :
  1. Il existe  $i$  tel que  $a_{i1} \neq 0$ , on procède alors l'opération  $L_1 \rightarrow L_i$  et on se retrouve dans la situation initiale.
  2.  $\forall i \in [1, m] \quad a_{i1} = 0$ , l'inconnue  $x_1$  n'apparaît pas dans le système. On considère alors l'inconnue suivante  $x_2$  comme la première inconnue et on vérifie si l'on peut prendre  $a_{12}$  comme Pivot.

### Remarques :

1. Cette chaîne d'opérations a forcément une fin puisqu'à chaque pas on laisse de côté une nouvelle équation et une nouvelle inconnue.
2. Si l'on fait apparaître au cours des opérations, une équation :

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b_i \quad \text{avec } b_i \neq 0$$

Le système est alors impossible et il est inutile de continuer.

### Exemple 1 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 & (1) \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 & (2) \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 20x_4 = 50 & (3) \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 16x_4 = 39 & (4) \end{cases}$$

→ On garde (1) et (2) et on élimine  $x_1$  dans (3) et (4).

$$\begin{aligned} (3) - (1) & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \end{array} \right. \\ (4) - (1) & \left\{ \begin{array}{l} 3x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 27 \\ x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 16 \end{array} \right. \end{aligned}$$

→ On élimine  $x_2$  dans (3) et (4).

$$\begin{aligned} (3) - 3(2) & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \end{array} \right. \\ (4) - (2) & \left\{ \begin{array}{l} x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_3 + 3x_4 = 8 \end{array} \right. \end{aligned}$$

→ Il ne reste plus qu'à éliminer  $x_3$  dans (4).

$$(4) - 2(3) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -2$$

Le système admet une solution unique qui est  $(-2, 1, 1, 2)$ .

### Exemple 2 :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) - 2(1) \\ (3) - \frac{3}{2}(1) \end{aligned} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(3) - (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ -4x_3 = -1 \end{cases}$$

Le système admet une solution unique (1 , 5/4 , 1/4 ) .

### Application :

Résoudre les systèmes suivants :

$$S_1 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x + y + z - t = -1 \\ -x - y + z - 3t = 2 \\ -x + y - z - t = 0 \\ x - y - z - t = -1 \end{cases}$$

Solution : Voir le site

## Résolution par inversion de la matrice du système

L'écriture matricielle d'un système d'équations linéaires est de la forme :

$$A_{(n,p)}X_{(p,1)}=B_{(n,1)}$$

La résolution d'un tel système n'est possible que si la matrice A est inversible.  
On note  $A^{-1}$  la matrice inverse de A, multiplions alors les deux membres de l'équation par  $A^{-1}$ .

$$\text{D'où : } A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \text{ainsi} \quad X = A^{-1}B$$

**Exemple :**

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Notons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4} \\ \frac{10}{4} \\ \frac{6}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$



**Application :**

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x + 2y + 3z = 13 \\ 2x + 2y + 4z = 9 \end{cases}$$

Solution : Voir le site

**Exercices généraux** : Voir le site