MATHÉMATIQUES

23

Éléments de théorie des ensembles

BTS | Mathématiques | Groupement D2

Objectifs du chapitre

- Maîtriser le vocabulaire et les notations de la théorie des ensembles (appartenance, inclusion, cardinal).
- Effectuer les opérations ensemblistes : union, intersection, complémentaire, différence.
- Connaître et appliquer les lois de De Morgan.
- Comprendre le produit cartésien, les relations binaires et la notion d'application.
- Appliquer la formule d'inclusion-exclusion au calcul de cardinaux et de probabilités.
- Calculer des arrangements et des combinaisons ; construire le triangle de Pascal.
- Établir le lien entre opérations ensemblistes et requêtes SQL (UNION, INTERSECT, EXCEPT).

Situation professionnelle — Technicienne en informatique industrielle

Contexte : Aurélie est technicienne support dans une entreprise de logistique gérant plusieurs milliers de références produits. Elle administre une base de données relationnelle recensant fournisseurs, catégories de produits et mouvements de stock.

Sa responsable lui confie deux demandes :

1. Extraire les fournisseurs qui livrent *à la fois* la catégorie A et la catégorie B (audit croisé).
2. Extraire les fournisseurs qui livrent A *mais pas* B (renégociation des contrats B).

Aurélie reconnaît une **intersection** (requête 1) et une **différence ensembliste** (requête 2). Elle formalise le problème en notations mathématiques avant d'écrire les requêtes SQL. Ce chapitre fournit tous les outils pour raisonner de la même façon.

1. Notions fondamentales

Définition — Ensemble Un **ensemble** est une collection bien définie d'objets appelés **éléments**. On note les ensembles par des lettres majuscules. Les éléments se désignent en *extension* (liste) ou en *compréhension* (propriété) :

- Extension : $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
- Compréhension : $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impair},\ x \leq 9\}$

Un ensemble peut être **fini** (nombre d'éléments déterminé) ou **infini** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, etc.).

Définition — Appartenance On note $x \in A$ si x est un élément de A, et $x \notin A$ sinon.

Exemple : Pour $A = \{2, 4, 6, 8\}$: $4 \in A$ et $5 \notin A$.

Définition — Inclusion A est **inclus dans** B, noté $A \subseteq B$, si tout élément de A appartient à B :

$$A \subseteq B \iff (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Inclusion stricte : $A \subsetneq B$ signifie $A \subseteq B$ et $A \neq B$.
Égalité : $A = B \iff A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Exemple : $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mais $\{2, 6\} \nsubseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Définition — Ensemble vide et ensemble universel

- L'**ensemble vide** $\emptyset$ ne contient aucun élément. Il est inclus dans tout ensemble : $\emptyset \subseteq A$ pour tout A.
- L'**ensemble universel** E (ou Ω) contient tous les éléments du contexte. Tout sous-ensemble vérifie $A \subseteq E$.

Définition — Cardinal Le **cardinal** de A, noté $|A|$ ou $\mathrm{Card}(A)$, est le nombre d'éléments de A.
Exemples : $|\{a, b, c, d\}| = 4$ • $|\emptyset| = 0$ • $|\{0\}| = 1$.

Propriété — Ensemble des parties L'ensemble de tous les sous-ensembles de A, noté $\mathcal{P}(A)$, vérifie $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Exemple : $A = \{1, 2, 3\}$ donne $|\mathcal{P}(A)| = 8$ parties :
$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

Exemple — Base de données produits

$A = \{\text{REF01, REF03, REF05, REF07}\}$ (en stock) $\quad |A| = 4$
$B = \{\text{REF02, REF03, REF05, REF09}\}$ (commandés) $\quad |B| = 4$

- REF03 $\in A$ et REF03 $\in B$
- REF01 $\in A$ mais REF01 $\notin B$
- $\{A, B\} \subseteq \mathcal{P}(\text{catalogue})$

2. Opérations sur les ensembles

Dans toute la section, A et B sont des sous-ensembles de l'ensemble universel E.

Union A ∪ B	Intersection A ∩ B	Complémentaire Ā	Différence A \ B
Éléments dans A *ou* B (ou les deux)	Éléments dans A *et* B à la fois	Éléments de E *non* dans A	Éléments dans A *mais pas* dans B

Définition — Union

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemple : $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Propriétés de l'union Commutativité : $A \cup B = B \cup A$ • Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Élément neutre : $A \cup \emptyset = A$ • Idempotence : $A \cup A = A$ • Absorption : $A \cup E = E$
Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Définition — Intersection

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Exemple : $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}$
Si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont **disjoints**.

Propriétés de l'intersection Commutativité, associativité, élément neutre E, élément absorbant $\emptyset$.
Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Définition — Complémentaire

$$\bar{A} = A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Propriétés : $A \cup \bar{A} = E$ • $A \cap \bar{A} = \emptyset$ • $\overline{\bar{A}} = A$ • $\bar{E} = \emptyset$ • $\bar{\emptyset} = E$

Exemple : $E = \{1..5\}$, $A = \{1,3,5\}$ donc $\bar{A} = \{2,4\}$.

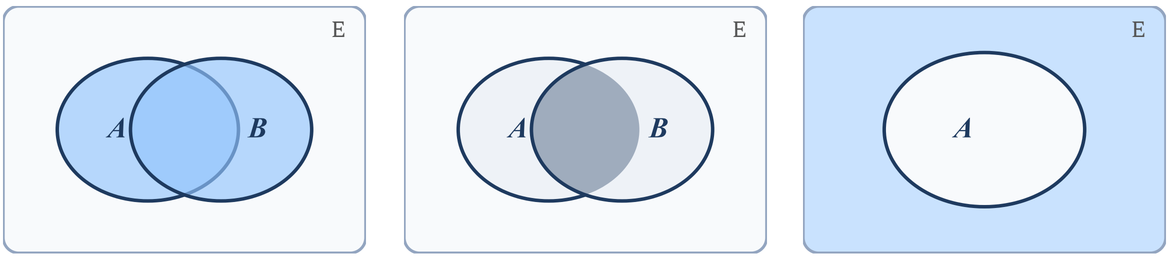
Définition — Différence

$$A \setminus B = A \cap \bar{B} = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

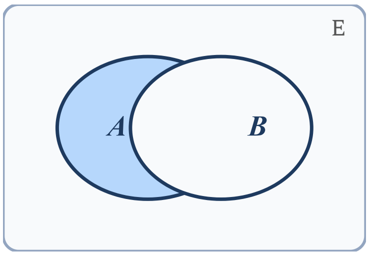
Exemple : $\{1,2,3,4\} \setminus \{2,4,6\} = \{1,3\}$
Attention : la différence n'est **pas commutative** ($A \setminus B \neq B \setminus A$ en général).

2.5 Diagrammes de Venn

Le rectangle représente E, les ellipses les ensembles A et B. La zone colorée illustre l'opération.



$A \cup B$ $A \cap B$ $\bar{A}$



$A \setminus B$

2.6 Lois de De Morgan

Théorème — Lois de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

En mots : le complémentaire d'une *union* est l'*intersection* des complémentaires, et vice versa.

Extension : $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n$

Attention Ne pas confondre $\overline{A \cup B}$ avec $\bar{A} \cup \bar{B}$. Par De Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, *pas* $\bar{A} \cup \bar{B}$!

Vérification : $E = \{1..6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

1re loi : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ donc $\overline{A \cup B} = \{5, 6\}$. Et $\bar{A} \cap \bar{B} = \{4, 5, 6\} \cap \{1, 5, 6\} = \{5, 6\}$. ✓

2e loi : $A \cap B = \{2, 3\}$ donc $\overline{A \cap B} = \{1, 4, 5, 6\}$. Et $\bar{A} \cup \bar{B} = \{4, 5, 6\} \cup \{1, 5, 6\} = \{1, 4, 5, 6\}$. ✓

3. Produit cartésien et relations

3.1 Produit cartésien

Définition — Produit cartésien

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

On a $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Attention : $A \times B \neq B \times A$ en général (les couples sont ordonnés).

Exemple : $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$: $A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$, cardinal $= 2 \times 3 = 6$.

Application BD : si A = clients et B = produits, une table de commandes est un sous-ensemble de $A \times B$.

3.2 Relations binaires

Définition — Relation binaire Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ de A dans B est un sous-ensemble de $A \times B$. On note $a \mathcal{R} b$ si $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Une relation sur A (de A dans A) peut être :

- **Réflexive :** $\forall a,\ a \mathcal{R} a$
- **Symétrique :** $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$
- **Antisymétrique :** $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$
- **Transitive :** $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$

Relation réflexive + symétrique + transitive = **relation d'équivalence**.
Relation réflexive + antisymétrique + transitive = **relation d'ordre**.

3.3 Applications et fonctions

Définition — Application Une **application** $f : A \to B$ est une relation telle que tout $a \in A$ a *exactement un* image $f(a) \in B$.

- **Injective :** $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
- **Surjective :** tout $b \in B$ a au moins un antécédent
- **Bijective :** injective et surjective (correspondance parfaite 1-1)

4. Formule du cardinal (inclusion-exclusion)

Formule fondamentale — 2 ensembles

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Si A et B sont disjoints : $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Intuition : en additionnant $|A|$ et $|B|$, on compte deux fois les éléments de $A \cap B$.

Extension à 3 ensembles

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Exemple 1 — Sondage clients :

200 clients interrogés. 120 satisfaits du SAV (ensemble A), 90 satisfaits du délai (ensemble B), 60 satisfaits des deux ($A \cap B$).

Satisfaits d'au moins un critère : $|A \cup B| = 120 + 90 - 60 = \mathbf{150}$

Insatisfaits des deux : $200 - 150 = \mathbf{50}$

Exemple 2 — Contrôle qualité (3 défauts) :

Sur 500 pièces : défaut de surface $|A| = 80$, dimensionnel $|B| = 60$, matière $|C| = 40$.

$|A \cap B| = 15$, $|A \cap C| = 10$, $|B \cap C| = 8$, $|A \cap B \cap C| = 3$.

$$|A \cup B \cup C| = 80 + 60 + 40 - 15 - 10 - 8 + 3 = \mathbf{150} \text{ pièces défectueuses}$$

Application en probabilités Dans un espace de probabilité quelconque :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

C'est la formule des probabilités totales généralisée. Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

5. Dénombrement

5.1 Règles fondamentales

Règle de la somme Si une expérience peut donner m résultats *ou* n résultats (cas exclusifs), le nombre total est $m + n$.

Exemple : 4 outils manuels ou 3 électriques : $4 + 3 = 7$ choix.

Règle du produit Si une procédure comporte k étapes indépendantes avec $n_1, \ldots, n_k$ possibilités chacune, le nombre total est $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

Exemple : Code = 1 lettre (26) + 2 chiffres (10×10) : $26 \times 100 = 2600$ codes.

5.2 Factorielle et permutations

Définition — Factorielle

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \qquad (0! = 1)$$

Le nombre de **permutations** (arrangements de n éléments parmi eux-mêmes) est $n!$.

Exemple : 4 pièces en ligne : $4! = 24$ dispositions.

5.3 Arrangements (ordre compte, sans remise)

Définition — Arrangements A_n^k Liste ordonnée de k éléments distincts tirés parmi n ($k \leq n$) :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Exemple — Code PIN à 4 chiffres distincts parmi $\{0..9\}$ *:* $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$

5.4 Combinaisons (ordre indifférent, sans remise)

Définition — Combinaisons $\binom{n}{k}$ Sous-ensemble de k éléments tirés parmi n (l'ordre ne compte pas) :

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

Propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n}{1} = n$ • Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Relation de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

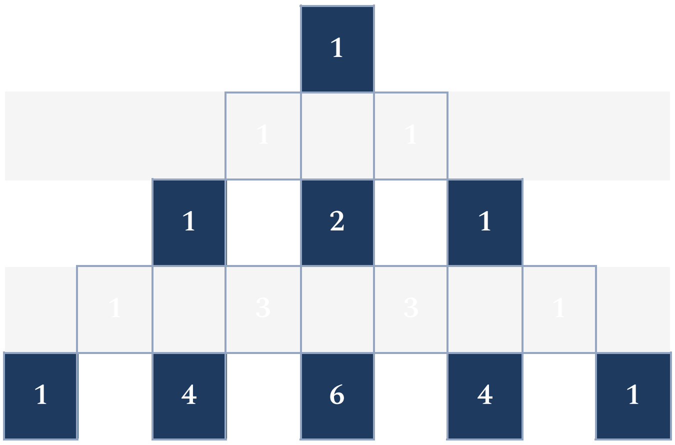
Somme d'une ligne : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Exemple — Contrôle qualité : Un technicien prélève 5 pièces parmi 20 (ordre sans importance) :

$$\binom{20}{5} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5!} = \frac{1\,860\,480}{120} = 15\,504$$

5.5 Triangle de Pascal

Chaque nombre est la somme des deux nombres directement au-dessus.



Ligne n : $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ — lignes $n = 0$ à $n = 4$.

Formule	Ordre	Remise	Nombre
Permutations	Oui	Non	$n!$
Arrangements A_n^k	Oui	Non	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Combinaisons $\binom{n}{k}$	Non	Non	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Tirage avec remise (ordonné)	Oui	Oui	n^k

6. Applications informatiques — Opérations ensemblistes en SQL

Les SGBD relationnels implémentent directement les opérations ensemblistes sur des tables.

Opération	Notation	SQL standard
Union (sans doublons)	$A \cup B$	UNION
Union (avec doublons)	—	UNION ALL
Intersection	$A \cap B$	INTERSECT
Différence	$A \setminus B$	EXCEPT (Oracle : MINUS)

UNION ($A \cup B$)

```
-- Tous les fournisseurs (catA ou catB)
SELECT id_fourn FROM livraisons_catA
UNION
SELECT id_fourn FROM livraisons_catB;
```

INTERSECT ($A \cap B$)

```
-- Fournisseurs livrant A ET B
SELECT id_fourn FROM livraisons_catA
INTERSECT
SELECT id_fourn FROM livraisons_catB;
```

EXCEPT ($A \setminus B$)

```
-- Fournisseurs livrant A mais PAS B
SELECT id_fourn FROM livraisons_catA
EXCEPT
SELECT id_fourn FROM livraisons_catB;
```

De Morgan en SQL

```
-- Fournisseurs ni catA ni catB
-- = complement(A union B)
SELECT id_fourn FROM tous_fournisseurs
EXCEPT
(SELECT id_fourn FROM livraisons_catA
 UNION
 SELECT id_fourn FROM livraisons_catB);
```

Règle SQL Pour UNION / INTERSECT / EXCEPT : les deux requêtes doivent retourner le *même nombre de colonnes* avec des types compatibles. Les noms des colonnes sont ceux de la première requête.

Méthode — Résoudre un problème de dénombrement

1. **Identifier** l'ensemble universel et les ensembles en jeu.
2. **Traduire** les conditions en opérations ensemblistes.
3. **Choisir la formule :** ordre + sans remise → A_n^k ; sans ordre + sans remise → $\binom{n}{k}$; avec remise → n^k ; cardinal d'union → inclusion-exclusion.
4. **Calculer** (factorielles ou touche *nCr* de la calculatrice).
5. **Vérifier** la cohérence (ordre de grandeur, cas limite).

À retenir — Théorie des ensembles et dénombrement

Opérations et lois

- $A \cup B$: union (« ou »)
- $A \cap B$: intersection (« et »)
- $\bar{A} = E \setminus A$: complémentaire
- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$: différence
- De Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- De Morgan : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Formules clés

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ (arrangements)
- $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (combinaisons)
- Pascal : $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$

SQL : `UNION` ↔ $A \cup B$ • `INTERSECT` ↔ $A \cap B$ • `EXCEPT` ↔ $A \setminus B$

MATHÉMATIQUES

23

Éléments de théorie des ensembles

Éléments de théorie des ensembles | BTS | Mathématiques

Rappels : $A \cup B$ (union), $A \cap B$ (intersection). Formule du cardinal : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Produit cartésien : $|A \times B| = |A| \times |B|$. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments : 2^n.

Exercice 1 — Opérations

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Donne $A \cup B$ et $A \cap B$. **2.** Donne $A \setminus B$ (éléments de A pas dans B).

Exercice 2 — Formule du cardinal

On sait que $|A| = 12$, $|B| = 9$, $|A \cap B| = 5$. Calcule $|A \cup B|$.

Exercice 3 — Produit cartésien

A a 4 éléments, B a 3 éléments.

1. Combien de couples dans $A \times B$? **2.** Combien de parties possède A ?

Exercice 4 — Inclusion-exclusion (problème)

Dans un groupe de 30 étudiants, 18 suivent l'option anglais, 15 l'option informatique, et 8 suivent les deux.

1. Combien suivent au moins une des deux options ?

2. Combien n'en suivent aucune ?

Exercice 5 — Lien avec les bases de données (type BTS)

Deux tables : la table CLIENTS_A (120 lignes) et CLIENTS_B (80 lignes), avec 30 clients communs.

Combien de clients distincts au total (équivalent d'un *UNION*) ?

MATHÉMATIQUES

23

Éléments de théorie des ensembles

Éléments de théorie des ensembles | BTS | Mathématiques

Durée : 1 heure **Calculatrice :** autorisée **Barème :** 20 points

Documents : non autorisés

Exercice 1 — Opérations *(6 points)*

$A = \{0, 1, 2, 5, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$.

1. Donne $A \cap B$ et $A \cup B$. *(4 pts)*

2. Donne $|A \cup B|$. *(2 pts)*

Exercice 2 — Cardinal et produit *(8 points)*

1. $|A| = 20$, $|B| = 14$, $|A \cap B| = 6$: calcule $|A \cup B|$. *(4 pts)*

2. A a 5 éléments, B a 4 éléments : calcule $|A \times B|$ et le nombre de parties de B. *(4 pts)*

Exercice 3 — Problème *(6 points)*

Sur 50 personnes, 32 parlent anglais, 20 espagnol, 12 les deux.

1. Combien parlent au moins une de ces langues ? *(3 pts)*

2. Combien n'en parlent aucune ? *(3 pts)*