

S4.2 - Oscillateurs amortis

Table des matières

1	Équation différentielle du mouvement	1
2	Oscillations libres amorties	3
2.1	Facteur d'amortissement - Facteur de qualité	3
2.2	Équation caractéristique	3
2.3	Régime pseudo-périodique	4
2.4	Régime critique	7
2.5	Régime apériodique	8
2.6	Tracé de tous les régimes sur le même graphique	10
3	Portrait de phase	10

1 Équation différentielle du mouvement

Considérons un oscillateur harmonique horizontal ¹, constitué d'un mobile de masse $m = 1\text{ kg}$ attaché à un ressort de constante de raideur $k = 1\text{ N.m}^{-1}$ qui oscille le long d'un axe horizontal sur une table à coussin d'air qui élimine les frottements solide au niveau du contact avec le support (figure 1).

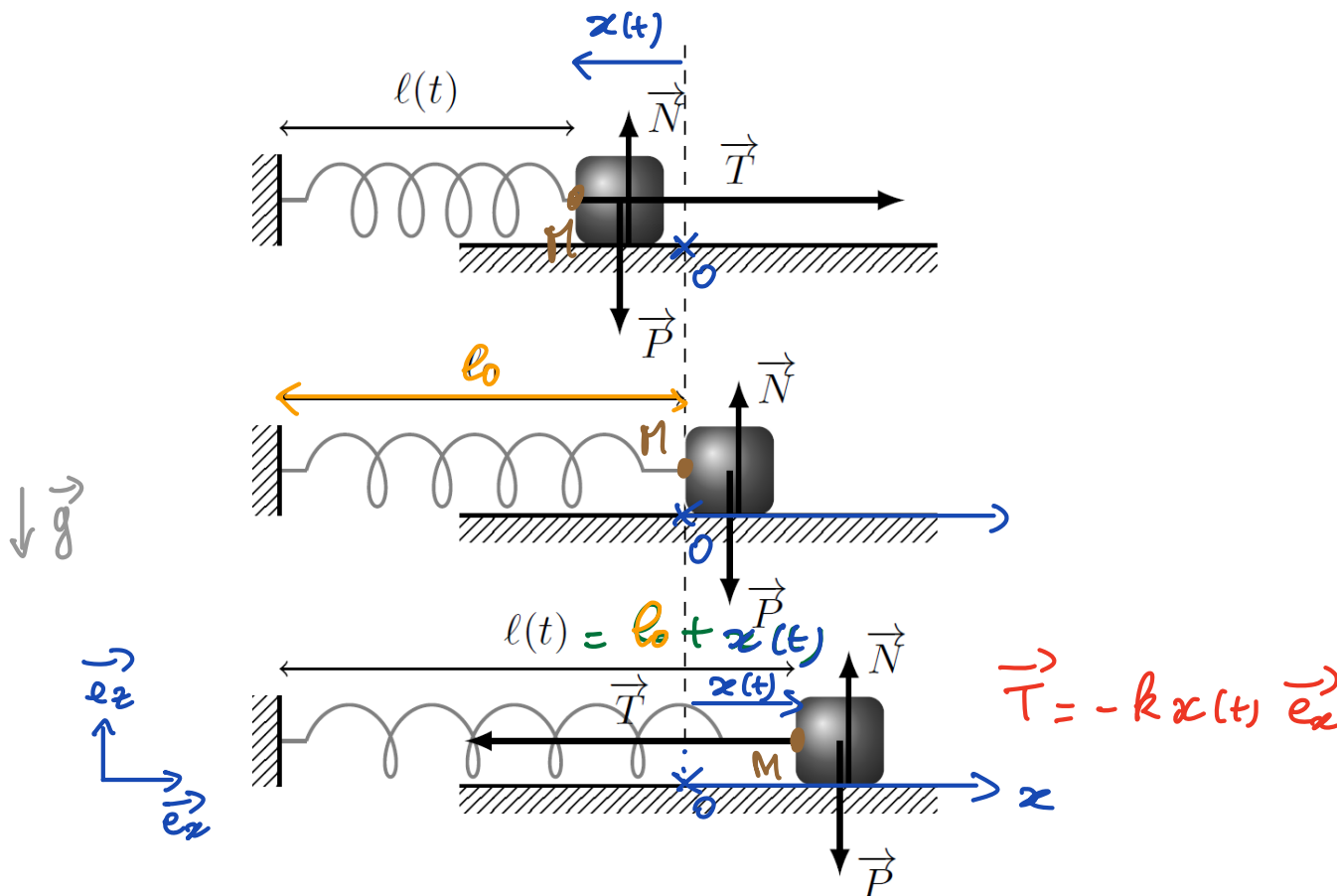


Figure 1 – Oscillateur harmonique horizontal.

1. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

L'origine de l'axe des abscisses est pris à la position d'équilibre du ressort, ce qui revient à :

$$\ell(t) = \ell_0 + x(t)$$

On modélise les frottements de l'air lors du déplacement du mobile par une **force dite de frottements fluide qui est opposée au vecteur vitesse du mobile** :

$$\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{e}_x$$

où h est une constante qui dépend du fluide (ici l'air) et de la forme du mobile, elle s'exprime en kg.s^{-1} .

Les autres forces appliquées au mobile sont le poids

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$$

la réaction du support

$$\vec{N} = N\vec{e}_z$$

et la force de rappel élastique du ressort

$$\vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_x = -kx(t)\vec{e}_x$$

La vitesse du mobile est :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x = \dot{x}\vec{e}_x$$

Son accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{e}_x = \ddot{x}\vec{e}_x$$

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{f}$$

En projetant cette relation sur l'axe horizontal et l'axe vertical, on obtient :

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{e}_x : m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \\ \text{sur } \vec{e}_z : 0 = N - mg \end{cases}$$

La projection sur $\vec{e}_z$ montre que le poids est exactement compensé par la réaction du support

$$N = mg$$

La projection sur $\vec{e}_x$ nous donne l'équation du mouvement que l'on peut mettre sous sa forme normalisée² :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

2. l'équation est dite normalisée lorsque le coefficient devant $\ddot{x}$ est égal à 1

On reconnaît alors la **pulsation propre** de cet oscillateur harmonique amorti :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2 Oscillations libres amorties

2.1 Facteur d'amortissement - Facteur de qualité

On peut encore écrire :

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $2\alpha = \frac{h}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, ou encore :

$$[\alpha] = \tau^{-1} \\ [\xi \omega_0] = \tau^{-1} \Rightarrow \text{sans dim.}$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où ξ est une constante sans dimension qui est appelée **facteur d'amortissement** de l'oscillateur, ω_0 étant sa **pulsation propre**.

Pour décrire l'oscillateur amorti, on peut préférer au couple (ω_0, ξ) le couple (ω_0, Q) , Q étant un paramètre sans dimension appelé **facteur de qualité** défini par :

$$\frac{h}{m} = 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q} = 2\xi\omega_0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{m\omega_0}{h}$$

L'équation différentielle peut donc aussi s'écrire :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2.2 Équation caractéristique

On cherche ensuite une solution de la forme $g(t) = e^{rt}$ qui vérifie l'équation différentielle si :

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0 \text{ car } \dot{g}(t) = re^{rt} \text{ et } \ddot{g}(t) = r^2 e^{rt}$$

Suivant le signe du discriminant réduit $\Delta' = \frac{\Delta}{4}$ de cette équation du second degré en r , appelée **équation caractéristique**, plusieurs régimes sont possibles ³ suivant le signe de Δ (ou Δ') :

$$\Delta = (2\alpha)^2 - 4\omega_0^2 \\ \Delta' = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow$$

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

3. <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/equadiff/equadif/ordre2.php>

ou $\Delta < 0$

◇ **Le régime pseudo-périodique qui correspond à $\Delta' < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$** , l'équation caractéristique admet alors deux racines complexes conjuguées : $\frac{1}{4Q^2} < 1 \Leftrightarrow 4Q^2 > 1 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$.

$$r_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm j\sqrt{4|\Delta'|}}{2} = -\alpha \pm j\sqrt{|\Delta'|} \text{ avec } j^2 = -1 \text{ et } |\Delta'| = -\Delta' = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{|\Delta'|} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\Omega}$$

où, comme on le verra par la suite, $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ correspond à la **pseudo-pulsation**.

La solution de l'équation différentielle est alors une combinaison linéaire des deux solutions possibles :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\Omega t} + A_2 e^{-j\Omega t})$$

où $(A_1, A_2) \in \mathbb{C}^2$ sont nécessairement complexes conjuguées pour avoir $x(t)$ réel, soit $A_1 = A_2^*$.

◇ **Le régime critique qui correspond à $\Delta' = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$** , l'équation caractéristique admet alors une seule racine réelle :

$$r = -\alpha = -\frac{\omega_0}{2Q}$$

◇ **Le régime apériodique qui correspond à $\Delta' > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$** , l'équation caractéristique admet alors deux racines réelles négatives :

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta'} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

La solution de l'équation différentielle est alors une combinaison linéaire des deux solutions possibles :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

où $(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$ sont nécessairement réelles pour avoir $x(t)$ réel.

2.3 Régime pseudo-périodique

On obtient ce régime pour $\alpha < \omega_0 \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$, ce qui correspond à des frottements faibles :

On vient de voir que la solution générale de l'équation différentielle est :

$$x(t) = A_1 e^{(-\alpha + j\Omega)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\Omega)t}$$

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(A_1 e^{j\Omega t} + A_2 e^{-j\Omega t} \right)$$

en introduisant la pseudo-pulsation Ω telle que $\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ ($\Delta' = -\Omega^2 = (j\Omega)^2$ et $r_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega$).

Cette solution peut également se mettre sous la forme :

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(A_1 \underbrace{(\cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t))}_{e^{j\Omega t}} + A_2 \underbrace{(\cos(\Omega t) - j \sin(\Omega t))}_{e^{-j\Omega t}} \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\alpha t} \left(\underbrace{(A_1 + A_2)}_{A \in \mathbb{R}} \cos(\Omega t) + j \underbrace{(A_1 - A_2)}_{B \in \mathbb{R}} \sin(\Omega t) \right)$$

can $A_1 = A_2^*$ $A_1 = a + jb$ et $A_2 = a - jb$.

On peut en déduire l'expression de la vitesse algébrique : $\Rightarrow j(A_1 - A_2) = 2j^2 b = -2b \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = -\alpha e^{-\alpha t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) + e^{-\alpha t} \Omega (-A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t))$$

Les conditions initiales étant connues, à savoir $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, on peut trouver les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha A + \Omega B = v_0 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{v_0 + \alpha x_0}{\Omega}$$

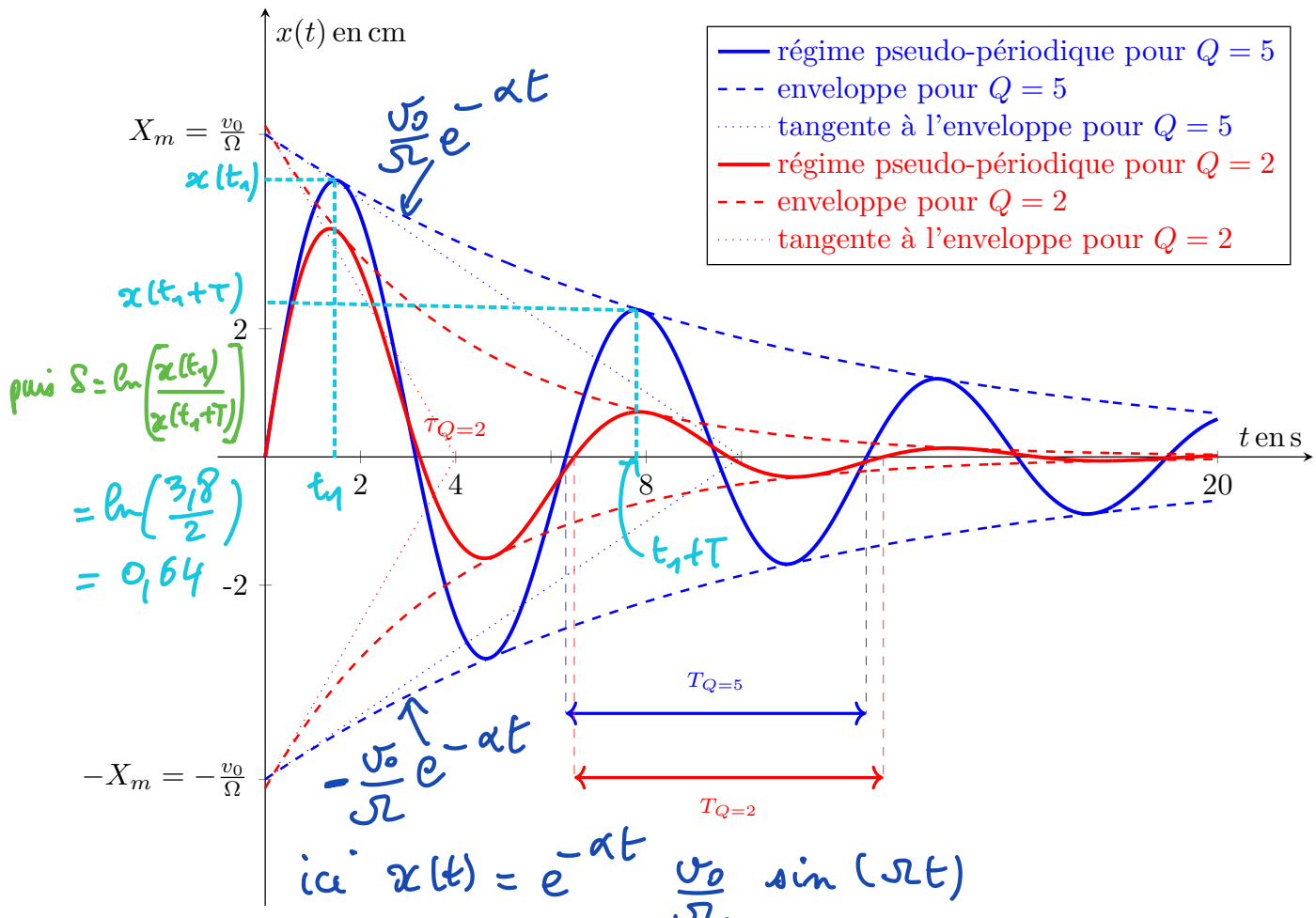
On en déduit l'expression de la position :

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(x_0 \cos(\Omega t) + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \right)$$

On rappelle les valeurs numériques des paramètres de l'oscillateur : $m = 1 \text{ kg}$ et $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$, soit $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$.

On a tracé sur la figure 2 la courbe représentative de $x(t)$ quand $x_0 = 0 \text{ cm}$ et $v_0 = 5 \text{ cm.s}^{-1}$, pour différentes valeurs du facteur de qualité que nous avons ajusté en modifiant la valeur

numérique de h puisque $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$:

Position $x(t)$ pour $x_0 = 0$ cm et $v_0 = 5$ cm.s⁻¹

2.4 Régime critique

On obtient ce régime pour $\alpha = \omega_0 \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$.

La solution générale de l'équation différentielle est :

$$x(t) = e^{-\alpha t}(At + B)$$

On peut en déduire l'expression de la vitesse algébrique :

$$\dot{x} = -\alpha e^{-\alpha t}(At + B) + e^{-\alpha t}A$$

Les conditions initiales étant connues, à savoir $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, on peut trouver les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha B + A = v_0 \end{cases} \Rightarrow A = v_0 + \alpha B$$

On en déduit l'expression de la position :

$$x(t) = e^{-\omega_0 t} \left((v_0 + \alpha x_0)t + x_0 \right)$$

On a tracé la courbe représentative de $x(t)$ pour le régime critique quand $x_0 = 0$ cm et $v_0 = 5 \text{ cm.s}^{-1}$ au paragraphe suivant.

On remarque que le régime critique est le régime apériodique de plus courte durée avec :

$$\tau_{crit} = \frac{1}{\omega_0}$$

2.5 Régime apériodique

On obtient ce régime pour $\alpha > \omega_0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$, ce qui correspond à des frottements importants :

Comme nous l'avons vu plus haut, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

où r_1 et r_2 sont les solutions négatives réelles de l'équation caractéristique. On peut trouver les constantes réelles A_1 et A_2 grâce aux conditions initiales.

On a tracé sur la figure 3 la courbe représentative de $x(t)$ quand $x_0 = 0$ cm et $v_0 = 5$ cm.s⁻¹, pour différentes valeurs du facteur de qualité :

Position $x(t)$ pour $x_0 = 0$ cm et $v_0 = 5$ cm.s⁻¹

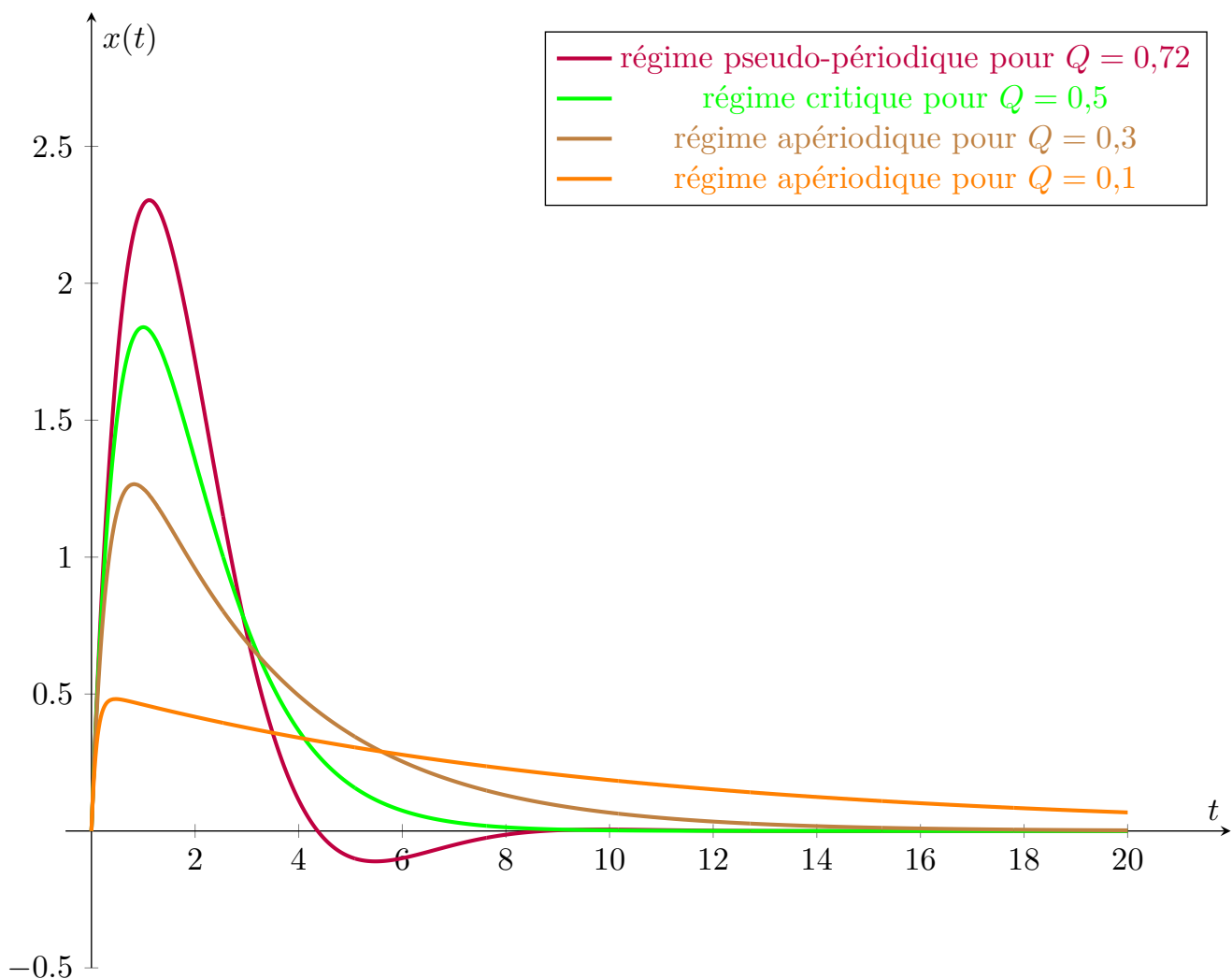


Figure 3 – Régime apériodique.

On a volontairement tracé une courbe correspondant au régime pseudo-périodique pour remarquer que celui-ci se distingue des régimes critique ou apériodique par au moins une oscillation autour de la valeur finale alors que ces deux derniers décroissent de manière monotone vers la valeur finale après leur extremum.

On remarque également que plus Q est grand, plus la durée caractéristique du régime transi-

toire, τ_{aper} , est grande et on admettra que pour $Q \ll 1$, on a :

$$\tau_{aper} = \frac{1}{Q\omega_0}$$

2.6 Tracé de tous les régimes sur le même graphique

Position $x(t)$ pour $x_0 = 0$ cm et $v_0 = 5$ cm.s⁻¹

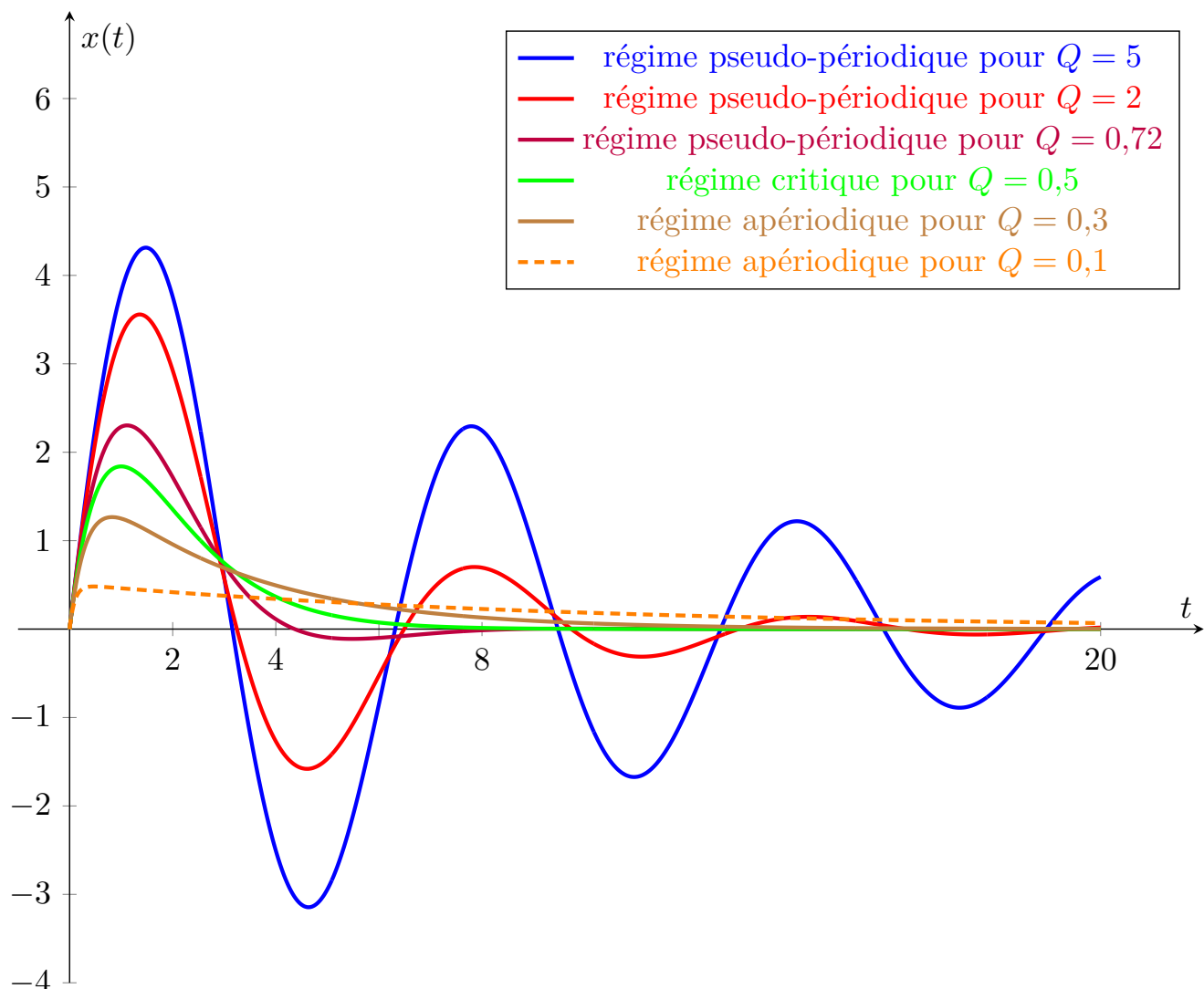


Figure 4 – Les 3 régimes.

3 Portrait de phase

Le portrait du phase est la courbe paramétrique pour laquelle on représente x en abscisse et $\frac{\dot{x}}{\omega_0}$ en ordonnée.

Pour un oscillateur harmonique non amorti le portrait de phase est un cercle, alors que pour un oscillateur harmonique amorti c'est une spirale logarithmique qui tend vers le point attracteur qui est donné par les valeurs finales de la vitesse et de la position.

On remarquera également grâce à l'animation du pendule simple à fil rigide ⁴ non amorti que lorsque l'oscillateur n'est plus harmonique (pour des angles grands) le portrait de phase ressemble moins à un cercle.

4. http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.html