

I Définition et quelques propriétés

Définition
Une *équation différentielle scalaire autonome d'ordre 1* est une équation différentielle du type :

$$y' = F(y)$$

avec y l'inconnue qui est une fonction dérivable et F une fonction continue. On appelle (E) cette équation dans la suite du cours. Une solution de cette équation est une fonction $y \in \mathcal{C}^1$ sur un **intervalle** $I \subset \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = F(y(t)).$$

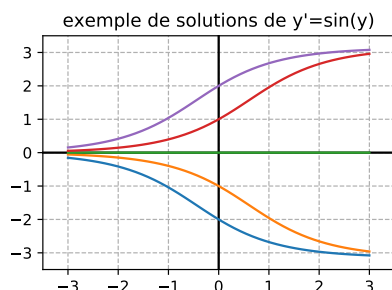
Remarque :
L'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est par exemple pas un intervalle, mais $]0, +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ sont deux intervalles distincts.

Commentaires :
Dans le programme est stipulé que : "Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée".

■ **Exemple 1 :**
L'équation

$$y' = \sin(y)$$

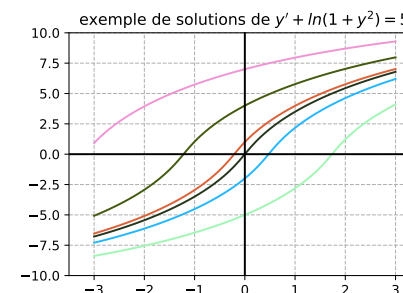
d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une équation autonome d'ordre 1. Voici quelques représentations graphiques de solutions (obtenues avec la fonction `solve_ivp` de Python – pour l'utilisation : cf TP5 d'informatique)



■ **Exemple 2 :**
L'équation

$$y' + \ln(1 + y^2) = 5$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une équation autonome d'ordre 1. Voici quelques représentations graphiques de solutions :



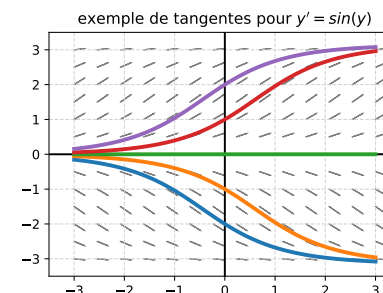
Remarque :
Deux courbes de solutions qui passent par une même ordonnée ont des tangentes parallèles.

En effet, notons k cette ordonnée commune. Dès qu'une courbe passe par cette ordonnée (en une abscisse t), on a $y(t) = k \in \mathbb{R}$. La pente de la tangente à la courbe est

$$y'(t) = F(y(t)) = F(k).$$

qui est donc indépendant de y et de l'abscisse t (ne dépend que de l'ordonnée k .)

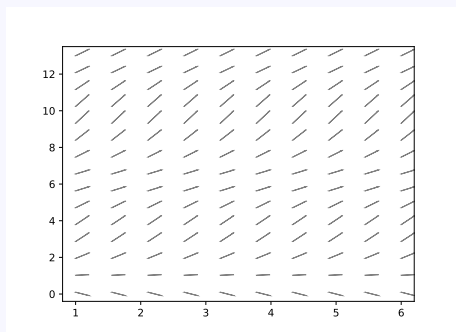
Par exemple, représentons les pentes des tangentes pour pour l'équation $y' = \sin(y)$ d'inconnue y :



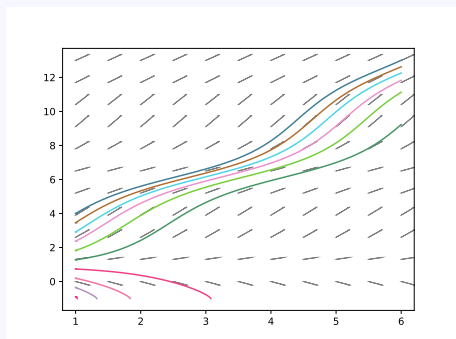
Ceci permet de conjecturer instinctivement que deux courbes de solutions ne se recoupent jamais. (à méditer.)

? Exercice 1

Voici ci-dessous un exemple de tangentes obtenues pour une équation autonome. Esquisser plusieurs courbes de solutions possibles correspondant à ce graphique. (On prendra notamment comme point de départ des courbes des ordonnées inférieures à 1 ainsi que supérieures à 2.)



Solution



Définition et Proposition

Si a est un réel tel que $F(a) = 0$ alors $y : t \mapsto a$ est une solution de (E) . On appelle *équilibre* ou *état stationnaire* les solutions constantes de (E) .

Démonstration :

En réinjectant dans l'expression $y' - F(y)$, on constate que pour $y : t \mapsto a$, on obtient

$$y' - F(y) = 0 - F(a)$$

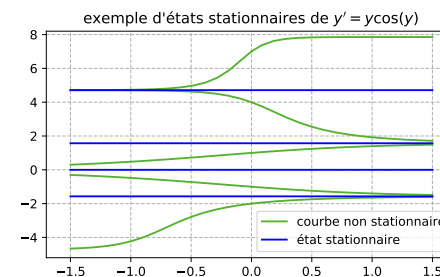
Ainsi, si $F(a) = 0$, on a bien

$$y' - F(y) = 0$$

et $y : t \mapsto a$ est bien une solution constante de l'équation différentielle. $\square$

■ Exemple 3 :

Les fonctions constantes $y_0 : t \mapsto 0$ et $y_1 : t \mapsto \frac{\pi}{2}$ sont des états stationnaires de l'équation $y' = y \cos y$. (exemples ci-dessous)



Proposition 1

Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $J = \{u - k \mid u \in I\}$. Alors :

- $\forall t \in J$, on a $t + k \in I$
- et si y est une solution de l'équation (E) sur I , alors $\varphi : t \in J \mapsto \varphi(t + k)$ avec k réel est solution de (E) sur J .

Commentaires :

Graphiquement, ceci signifie que toute translation horizontale (à gauche ou à droite) d'une courbe est encore la courbe d'une solution

Démonstration :

Avec les notations de la proposition, pour tout $t \in J$, il existe $u \in I$ tel que

$$t = u - k$$

d'où

$$t + k = u \in I$$

Ainsi, $\varphi : t \in J \mapsto y(t + k)$ est bien définie et dérivable et de plus

$$\varphi'(t) = y'(t + k)$$

Or y est solution, donc, pour tout $u \in I$, on a

$$y'(u) = F(y(u))$$

d'où ici

$$\varphi'(t) = y'(t + k) = F(y(t + k)) = F(\varphi(t))$$

i.e. φ est solution de l'équation $\square$

? Exercice 2

On considère l'équation autonome $y' = \frac{1}{y}$.

1. Montrer que y vérifie cette équation ssi

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid y^2(x) = 2x + 2c$$

2. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{y :]-c, +\infty[\mapsto \sqrt{2}\sqrt{c+x}\}$$

3. Vérifier que si y est solution sur I , pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a, $\varphi : t \mapsto y(t+k)$ est encore une solution sur $J = I - k$.

Solution

1. On observe que $y' = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y'y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2y^2)' = 1$.
Ceci équivaut donc à

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid y^2(x) = 2x + c$$

2. Parmi les possibilités définies précédemment, il nous faut $2x + 2c \geq 0$ sur tout l'ensemble de définition afin que la racine soit bien définie et $2x + 2c \neq 0$ afin que y ne s'annule pas et soit bien dérivable, d'où les solutions

$$\{y :]-c, +\infty[\mapsto \sqrt{2}\sqrt{c+x}\}$$

3. Si $k \in \mathbb{R}$ et $y :]-c, +\infty[\mapsto \sqrt{2}\sqrt{c+x}$ une solution, on a $\varphi : t \in J \mapsto y(t+k) = \sqrt{2}\sqrt{c+k+x} = \sqrt{2}\sqrt{C+x}$ qui est bien définie et dérivable et est bien solution.

II Résolutions graphiques : méthode d'Euler

On rappelle (cf TP d'informatique) que l'on peut obtenir graphiquement des approximations de courbes de solutions grâce à la méthode d'Euler, que vous devez connaître (*mais dont l'énoncé est censé être rappelé en cas d'utilisation.*)

Théorème 2 Méthode d'Euler

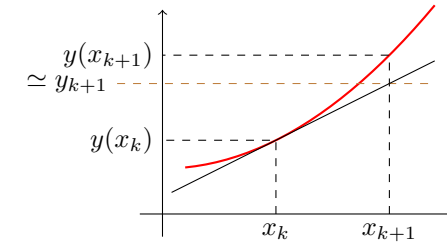
Soient y une solution de (E) sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ et n un entier naturel non nul. Soit ensuite $(y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ la suite finie définie par :

$$\begin{cases} y_0 = y(\alpha) \\ h = \frac{\beta - \alpha}{n} \\ y_{k+1} = y_k + hF(y_k) \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases}$$

Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si n est assez grand, on a :

$$y_k \simeq y(x_k)$$

qui repose sur l'approximation faite grâce à la définition de la dérivée et qui se traduit graphiquement par le schéma suivant : Ce qui se traduit graphiquement de la manière suivante :



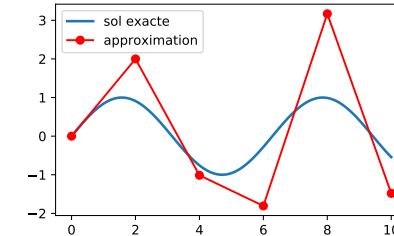
■ Exemple 4 :

Avec l'équation $y' + y = \cos x + \sin x$, sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, on a, pour $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$,

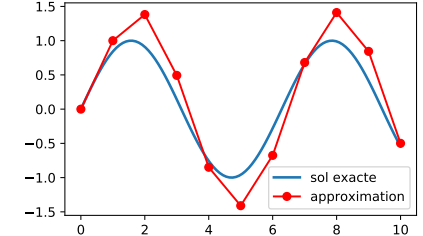
$$y_{k+1} = y_k + h(\cos x_k + \sin x_k - y_k) \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

et où on constate que les approximations deviennent en effet logiquement meilleures quand le nombre n de points augmente :

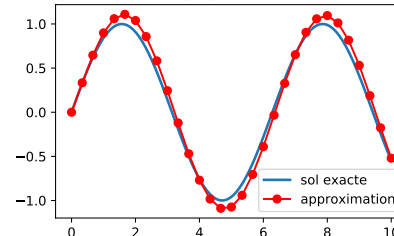
Approximation de $y' + y = \sin x + \cos x$ avec $n=5$



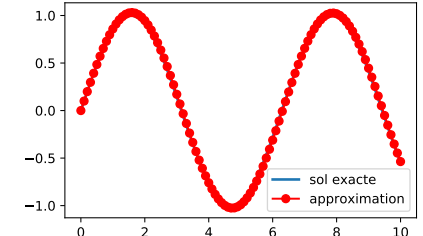
Approximation de $y' + y = \sin x + \cos x$ avec $n=10$



Approximation de $y' + y = \sin x + \cos x$ avec $n=30$



Approximation de $y' + y = \sin x + \cos x$ avec $n=100$



III Exemples de résolutions en dynamique des populations

NOMBRE D'INDIVIDUS
 Dans tous les exemples de cette section, on note $N(t)$ une fonction positive que l'on suppose dérivable et qui désigne le nombre d'individus dans une population donnée, à l'instant t (Le nombre d'individus peut être non entier.)

III-1 Modèle de Malthus

Explications : Dans ce modèle attribué à Thomas Malthus, on considère une population isolée et sans contrainte, au sens suivant :

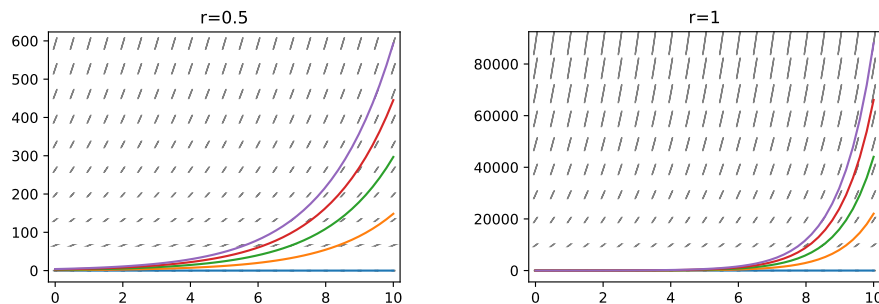
- espace et nourriture illimités,
- absence de prédateur,
- résistance aux maladies, etc. ...

On note r le "taux de croissance" de l'espèce. On veut traduire le fait que plus il y a d'individus, plus ils se reproduisent vite.

Définition
 Dans le modèle élémentaire de Malthus, on estime que

$$N'(t) = rN(t) \quad \forall t \geq 0$$

On obtiendra un graphique du type suivant avec $r = 0.5$ et $r = 1$:



? Exercice 3

Montrer que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions

$$N : t \geq 0 \mapsto N(0)e^{rt}$$

Solution

Il s'agit d'une équation différentielle homogène de type $y' = \text{"constante"} \cdot y$. D'après le cours, on connaît ses solutions. Elles s'écrivent

$$N(t) = \lambda e^{rt}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En prenant $t = 0$, on trouve

$$N(0) = \lambda e^0 = \lambda$$

D'où la solution.

III-2 Modèle Logistique

Explications : Dans ce modèle attribué à Verhulst en 1836, on considère une population isolée du même type que le modèle de Malthus, mais avec une contrainte environnementale, au sens suivant :

- nourriture illimitée, absence de prédateur, résistance aux maladies, etc. ...
- mais espace limité.

On note r le "taux de croissance" de l'espèce et K la capacité d'accueil du milieu.

Définition
 Dans ce modèle, on estime que

$$N'(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t) \quad \forall t \geq 0$$

Commentaires :

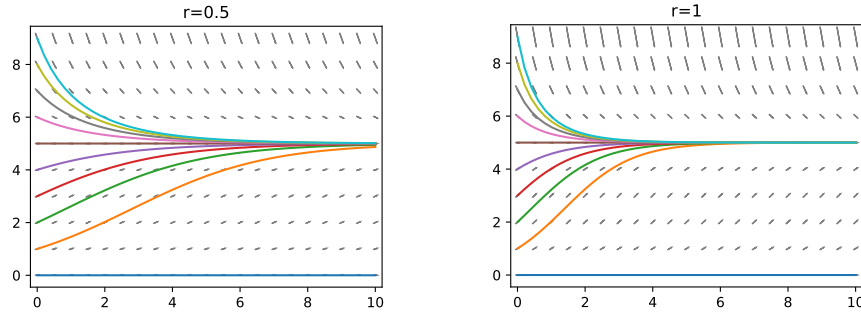
- Quand N est inférieur à la capacité du milieu, on a $1 - \frac{N(t)}{K} > 0$. Ainsi $N' > 0$ et la population augmente.
- Quand N est supérieur à la capacité du milieu, on a $1 - \frac{N(t)}{K} < 0$. Ainsi $N' < 0$ et la population diminue.
- En revanche, quand N est proche de la capacité d'accueil du milieu (par valeurs inférieures), la croissance ralentit de plus en plus. On a

$$\text{Si } N(t) \simeq K \text{ alors } 1 - \frac{N(t)}{K} \simeq 0 \text{ et donc } N' \simeq 0$$

La population stagne

- Tant que N est loin de K par valeurs inférieures, $1 - \frac{N(t)}{K} \simeq 1$, on a $N' \simeq rN$. Le modèle est proche du modèle de Malthus et tout se passe à peu près comme si l'espace était illimité.

On obtiendra un graphique du type suivant avec $r = 0.5$ et $r = 1$:



? Exercice 4

1. Montrer que $N : t \mapsto 0$ et $N : t \mapsto K$ sont des états stationnaires du modèle.
2. Supposons que N ne s'annule pas. Poser pour tout $t \geq 0$, $z(t) = \frac{1}{N(t)}$. Montrer que

$$N'(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t) \quad \Leftrightarrow \quad z' = -rz + \frac{r}{K}$$

3. En déduire que solutions du modèle logistique sont :

$$N : t \geq 0 \mapsto \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1 \right) e^{-rt}}$$

4. Justifier qu'il n'y a pas d'autres états stationnaires.

Solution

1. Trivial car on obtient bien $0 = 0$ en réinjectant.
2. On a $z' = -\frac{N'}{N^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} N'(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t) &\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N^2(t)} = \frac{r}{N(t)} \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) \\ &\Leftrightarrow -z'(t) = rz(t) - \frac{r}{K} \end{aligned}$$

D'où l'équation équivalente $z' = -rz + \frac{r}{K}$.

3. Les techniques de cours habituelles donnent comme solutions à l'équation homogène les fonctions

$$z_0 : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt}$$

On cherche comme solution particulière une constante qui est

$$y_p : t \geq 0 \mapsto \frac{1}{K}$$

Ainsi, les solutions générales sont de la forme

$$z(t) : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$$

avec ainsi

$$N(t) : t \geq 0 \mapsto \frac{1}{\lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}}$$

la condition initiale en $t = 0$ donne

$$\begin{aligned} N(0) = \frac{1}{\lambda e^{-r \cdot 0} + \frac{1}{K}} &\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{K} = \frac{1}{N(0)} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{N(0)} - \frac{1}{K} \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$N(t) : t \geq 0 \mapsto \frac{1}{\left(\frac{1}{N(0)} - \frac{1}{K} \right) e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{K}{\left(\frac{K}{N(0)} - 1 \right) e^{-rt} + 1}$$

4. Les états stationnaires sont ceux où la dérivée est constante égale à 0. Ce sont donc ceux qui répondent à l'équation

$$r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t) = 0$$

Ce qui se passe ssi

$$N : t \mapsto 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{ou} \quad N : t \mapsto K \quad \forall t \geq 0$$

III-3 Le modèle de Gompertz

Explications : Gompertz introduit en 1825 la notion d'évolution du taux de mortalité avec l'âge avançant, avec capacité du milieu limitée.



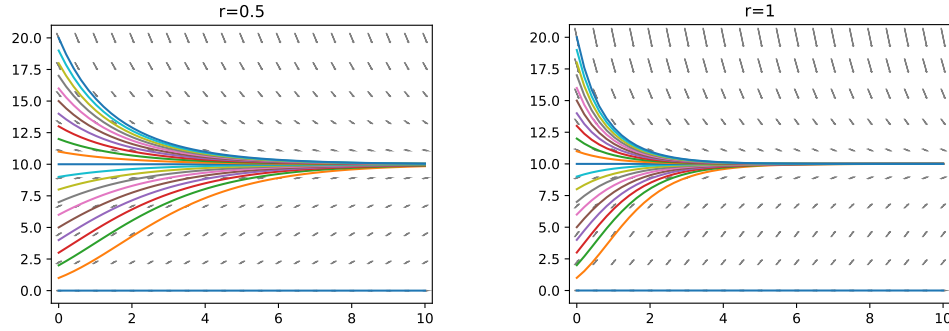
Définition

Avec les mêmes notations que le modèle logistique, il introduit l'équation :

$$N'(t) = r \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right) N(t) \quad \forall t \geq 0$$

Pour tout N application qui ne s'annule pas.

On obtiendra un graphique du type suivant avec $r = 0.5$ et $r = 1$:



Commentaires :

Dans l'hypothèse où $r > 0$:

- Quand N est inférieure à la capacité K du milieu, on a $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) > 0$. Ainsi $N' > 0$ et la population augmente.
- Quand N est supérieure à la capacité K du milieu, on a $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) < 0$. Ainsi $N' < 0$ et la population diminue.
- En revanche, quand N est proche de la capacité d'accueil du milieu (par valeurs inférieures), la croissance ralentit de plus en plus. On a

$$\text{Si } N(t) \simeq K \text{ alors } \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \simeq 0 \text{ et donc } N' \simeq 0$$

La population stagne.

? Exercice 5

On pose ici $r > 0$. On rappelle que dans notre modèle, N ne s'annule pas et est donc > 0 .

1. Déterminer le/les éventuels états stationnaires.
2. Poser pour tout $t \geq 0$, $z(t) = \ln(N(t))$. Montrer que l'équation de Gompertz équivaut à

$$z' + rz = c$$

avec c une constante à déterminer.

3. Résoudre l'équation en z .
4. En déduire que pour toute condition initiale $N(0) > 0$, la solution du modèle logistique est :

$$N : t \geq 0 \mapsto Ke^{-\ln \frac{K}{N(0)} e^{-rt}}$$

Solution

1. Les états stationnaires sont ceux où la dérivée est constante égale à 0. Ce sont donc ceux qui répondent à l'équation

$$r \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) N(t) = 0$$

Or, comme on a supposé $N(t)$ non nulle, il ne reste plus que $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) = 0$, c'est-à-dire

$$N : t \mapsto K \quad \forall t \geq 0$$

2. On a $z' = \frac{N'}{N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} N'(t) = r \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) N(t) &\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N(t)} = r \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \\ &\Leftrightarrow z'(t) = r \ln K - rz(t) \end{aligned}$$

D'où l'équation équivalente $z' + rz = r \ln K$.

3. Les techniques de cours habituelles donnent comme solutions à l'équation homogène les fonctions

$$z_0 : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt}$$

On cherche comme solution particulière une constante qui est

$$y_p : t \geq 0 \mapsto \ln K$$

Ainsi, les solutions générales sont de la forme

$$z(t) : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt} + \ln K$$

4. Comme $N = e^z$, on déduit de la question précédente :

$$N(t) : t \geq 0 \mapsto e^{\lambda e^{-rt} + \ln K}$$

La condition initiale en $t = 0$ donne

$$\begin{aligned} N(0) = e^{\lambda e^{-r \cdot 0} + \ln K} &\Leftrightarrow N(0) = e^{\lambda + \ln K} \\ &\Leftrightarrow \lambda + \ln K = \ln(N(0)) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \ln(N(0)) - \ln K = -\ln \frac{K}{N(0)} \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$N(t) : t \geq 0 \mapsto e^{\ln \frac{K}{N(0)} e^{-rt} + \ln K} = Ke^{-\ln \frac{K}{N(0)} e^{-rt}}$$