

Je vais apprendre à :

- Maîtriser les différentes formes d'un nombre complexe (algébrique, trigonométrique, exponentielle)
- Représenter un nombre complexe dans le plan et calculer son module et son argument
- Résoudre des équations du second degré à discriminant négatif
- Effectuer des opérations en forme exponentielle (produit, quotient, puissance)
- Déterminer des ensembles de points définis par module ou argument
- Appliquer les nombres complexes à l'électricité : impédance complexe, signaux sinusoïdaux

Situation professionnelle

Analyse d'un circuit électrique RLC

Un technicien en électrotechnique doit calculer l'impédance totale d'un circuit comportant une résistance $R = 100 \Omega$, une bobine d'inductance $L = 0,2 \text{ H}$ et un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, alimenté par un signal sinusoïdal de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.

Problème : Comment déterminer le courant dans le circuit et le déphasage entre tension et courant ? La réponse passe par les *nombres complexes* et la notation

$$Z = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega}.$$

1. Forme algébrique et représentation géométrique

1.1 L'unité imaginaire j

DÉFINITION — UNITÉ IMAGINAIRE

On note j le nombre tel que :

$$j^2 = -1$$

Convention BTS : en sciences de l'ingénieur, on utilise j (et non i) pour éviter la confusion avec l'intensité du courant électrique.

DÉFINITION — NOMBRE COMPLEXE, FORME ALGÈBRIQUE

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme :

$$z = a + jb$$

où a et b sont des réels. On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

- $a = \operatorname{Re}(z)$ est la **partie réelle** de z
- $b = \operatorname{Im}(z)$ est la **partie imaginaire** de z

ATTENTION

La partie imaginaire de $z = 3 + 5j$ est 5 (un réel), et non $5j$. On écrit $\operatorname{Im}(z) = 5$.

PROPRIÉTÉ — ÉGALITÉ DE DEUX COMPLEXES

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales **et** leurs parties imaginaires sont égales :

$$a + jb = c + jd \iff a = c \text{ et } b = d$$

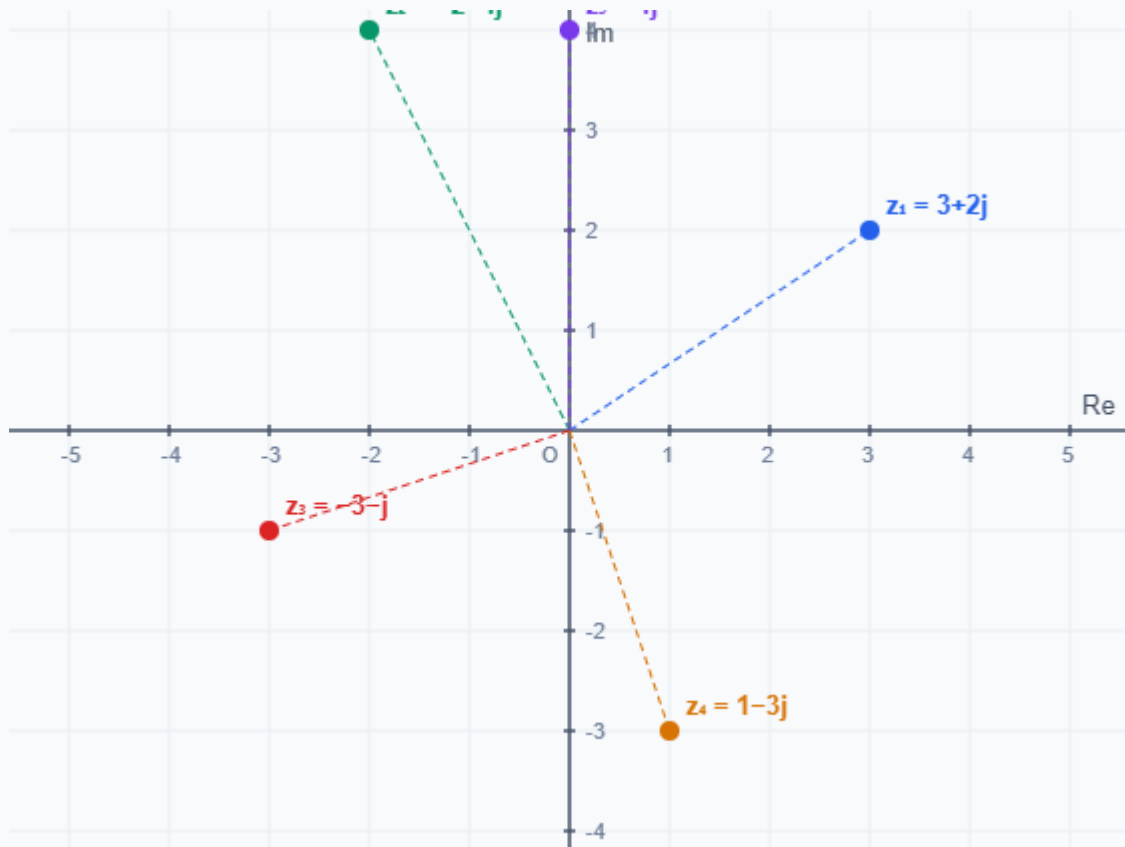
1.2 Plan complexe et affixe

DÉFINITION — PLAN COMPLEXE, AFFIXE

Le **plan complexe** est un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel tout nombre complexe $z = a + jb$ est représenté par le point $M(a; b)$.

- L'axe des abscisses est l'**axe réel**
- L'axe des ordonnées est l'**axe imaginaire**
- z est l'**affiche** du point M , et M est l'**image** de z

Plan complexe — Représentation de nombres complexes



Les points représentent les complexes $z_1 = 3 + 2j$, $z_2 = -2 + 4j$, $z_3 = -3 - j$, $z_4 = 1 - 3j$ et $z_5 = 4j$.

EXEMPLE — PLACER DES NOMBRES COMPLEXES

Représentons dans le plan complexe : $z_1 = 3 + 2j$, $z_2 = -2 + 4j$, $z_3 = -3 - j$,
 $z_4 = 1 - 3j$.

- z_1 : point $M_1(3; 2) \rightarrow 3$ vers la droite, 2 vers le haut
- z_2 : point $M_2(-2; 4) \rightarrow 2$ vers la gauche, 4 vers le haut
- z_3 : point $M_3(-3; -1) \rightarrow 3$ vers la gauche, 1 vers le bas
- z_4 : point $M_4(1; -3) \rightarrow 1$ vers la droite, 3 vers le bas

1.3 Conjugué

DÉFINITION — CONJUGUÉ

Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + jb$ est le nombre :

$$\bar{z} = a - jb$$

Géométriquement, \bar{z} est la symétrique de z par rapport à l'axe réel.

PROPRIÉTÉS DU CONJUGUÉ

Pour tous $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ (toujours réel positif)
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2j \operatorname{Im}(z)$
- $\overline{\bar{z}} = z$

MÉTHODE — EXTRAIRE PARTIE RÉELLE ET IMAGINAIRE

$$1. \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$2. \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j}$$

1.4 Module

DÉFINITION — MODULE

Le **module** de $z = a + jb$ est le réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Géométriquement, $|z|$ est la distance du point M à l'origine O .

PROPRIÉTÉS DU MODULE

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|\bar{z}| = |z|$
- Inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

EXEMPLE — CALCULS DE MODULES

$$z_1 = 3 + 4j \rightarrow |z_1| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$z_2 = -1 + j \rightarrow |z_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$z_3 = 6j \rightarrow |z_3| = \sqrt{0 + 36} = 6$$

1

Mini-exercice — Module et conjugué

Soit $z = -5 + 12j$. Calculer \bar{z} , $|z|$ et $z \cdot \bar{z}$.

► Voir la correction

2. Équations du second degré à coefficients réels

PROPRIÉTÉ — DISCRIMINANT NÉGATIF

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation admet **deux solutions complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \bar{z}_1$$

ATTENTION

Ne pas oublier que $\sqrt{-k} = j\sqrt{k}$ pour $k > 0$. Le j sort de la racine, on écrit $j\sqrt{|\Delta|}$.

MÉTHODE — RÉSOUDRE DANS \mathbb{C} UNE ÉQUATION DU 2ND DEGRÉ

1. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$
2. Si $\Delta \geq 0$: solutions réelles classiques
3. Si $\Delta < 0$: poser $\Delta' = |\Delta|$ et écrire :

$$z_1 = \frac{-b + j\sqrt{\Delta'}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - j\sqrt{\Delta'}}{2a}$$

4. Vérifier que z_1 et z_2 sont bien conjugués

EXEMPLE RÉSOLU — ÉQUATION DU 2ND DEGRÉ

Résoudre $z^2 - 4z + 13 = 0$.

$\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$, donc $\Delta' = 36$ et $\sqrt{\Delta'} = 6$.

$$z_1 = \frac{4 + 6j}{2} = 2 + 3j \quad z_2 = \frac{4 - 6j}{2} = 2 - 3j$$

Vérification : $z_1 + z_2 = 4 = -\frac{b}{a} \checkmark$ et $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3j)(2 - 3j) = 4 + 9 = 13 = \frac{c}{a} \checkmark$

2

Mini-exercice — Équation du 2nd degré

Résoudre dans \mathbb{C} : $z^2 + 2z + 5 = 0$.

► Voir la correction

3. Forme trigonométrique et exponentielle

3.1 Argument d'un nombre complexe

DÉFINITION — ARGUMENT

L'**argument** d'un nombre complexe non nul z , noté $\arg(z)$, est l'angle θ (en radians) entre l'axe réel positif et le vecteur \overrightarrow{OM} , mesuré dans le sens trigonométrique.

L'argument est défini **modulo** 2π .

Si $z = a + jb$ avec $|z| = r$, alors :

$$\cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

MÉTHODE — TROUVER L'ARGUMENT

1. Calculer $|z| = r$
2. Calculer $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$
3. Déterminer θ à l'aide du cercle trigonométrique (attention au quadrant !)

3.2 Forme trigonométrique

DÉFINITION — FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous **forme trigonométrique** :

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

où $r = |z|$ (module) et $\theta = \arg(z)$ (argument).

3.3 Forme exponentielle et formule d'Euler

À retenir — Formule d'Euler

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Cette formule fondamentale permet de passer de la forme trigonométrique à la forme exponentielle.

DÉFINITION — FORME EXPONENTIELLE

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous **forme exponentielle** :

$$z = r e^{j\theta}$$

où $r = |z| > 0$ et $\theta = \arg(z)$.

CONSÉQUENCES DE LA FORMULE D'EULER

- $e^{j\pi} = -1$ (formule d'Euler remarquable)
- $e^{j\pi/2} = j$
- $e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$
- $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

3.4 Passage entre les trois formes

Résumé — Les 3 formes d'un nombre complexe

Forme	Écriture	Paramètres
Algébrique	$z = a + jb$	$a = \text{Re}(z), b = \text{Im}(z)$
Trigonométrique	$z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$	$r = z , \theta = \arg(z)$
Exponentielle	$z = r e^{j\theta}$	$r = z , \theta = \arg(z)$

Conversions :

- Algébrique \rightarrow Trigonométrique/exponentielle : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, θ tel que $\cos \theta = a/r$ et $\sin \theta = b/r$
- Trigonométrique/exponentielle \rightarrow Algébrique : $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$

EXEMPLE RÉSOLU — PASSAGE ENTRE FORMES

a) Écrire $z = 1 + j$ sous forme exponentielle.

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$z = \sqrt{2} e^{j\pi/4}$$

b) Écrire $z = 3 e^{j\pi/3}$ sous forme algébrique.

$$z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} j$$

3

Mini-exercice — Formes d'un complexe

Écrire $z = -\sqrt{3} + j$ sous forme trigonométrique puis exponentielle.

► Voir la correction

4. Opérations en forme exponentielle

PROPRIÉTÉ — PRODUIT

Si $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$, alors :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Les modules se multiplient : $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- Les arguments s'additionnent : $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$

PROPRIÉTÉ — QUOTIENT

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Les modules se divisent : $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- Les arguments se soustraient : $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$

PROPRIÉTÉ — PUISSANCE

$$z^n = r^n e^{jn\theta}$$

Le module est élevé à la puissance n , l'argument est multiplié par n .

EXEMPLE RÉSOLU — OPÉRATIONS

Soient $z_1 = 2 e^{j\pi/6}$ et $z_2 = 3 e^{j\pi/4}$.

$$z_1 \cdot z_2 = 6 e^{j(\pi/6 + \pi/4)} = 6 e^{j5\pi/12}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{j(\pi/6 - \pi/4)} = \frac{2}{3} e^{-j\pi/12}$$

$$z_1^3 = 8 e^{j3\pi/6} = 8 e^{j\pi/2} = 8j$$

4

Mini-exercice — Calcul en forme exponentielle

Soient $z_1 = 4 e^{j\pi/3}$ et $z_2 = 2 e^{-j\pi/6}$. Calculer $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ et z_2^4 .

► Voir la correction

5. Ensembles de points dans le plan complexe

PROPRIÉTÉ — CERCLE

L'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z - a| = k \quad (k > 0)$$

est le **cercle** de centre A (d'affixe a) et de rayon k .

En effet, $|z - a|$ représente la distance AM .

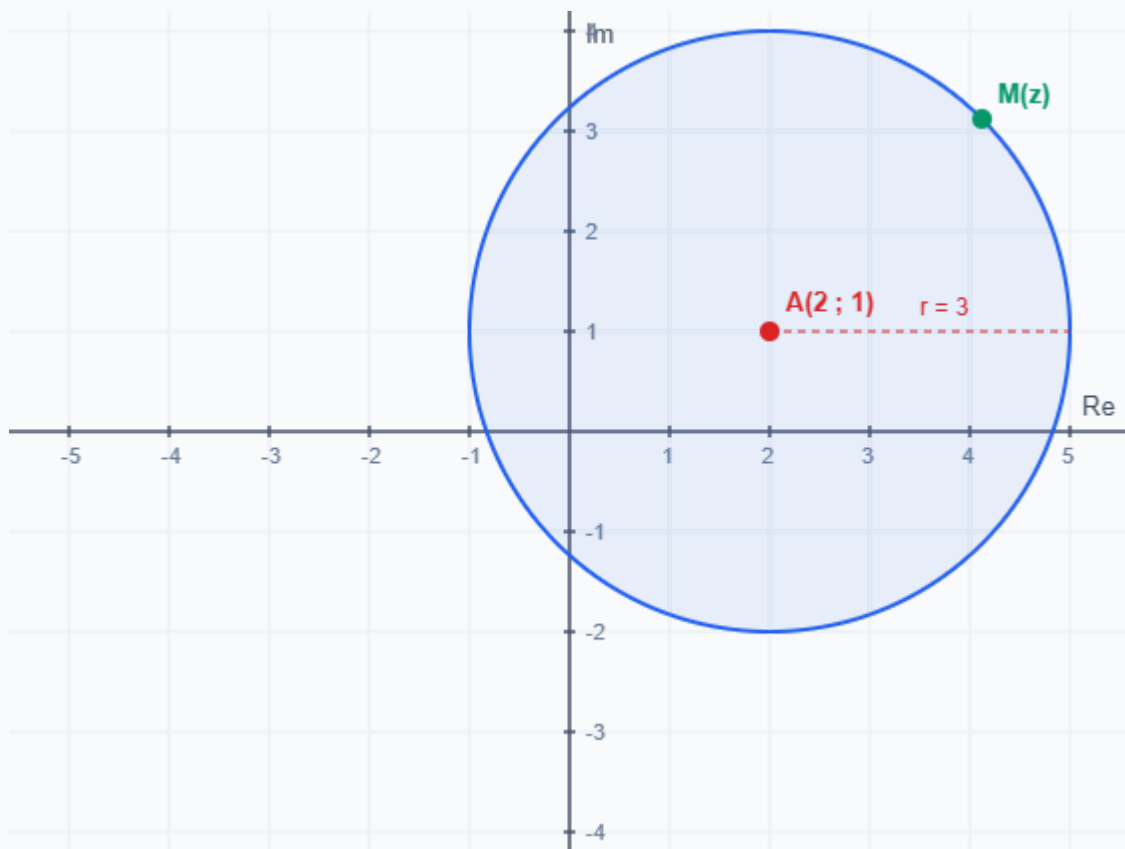
PROPRIÉTÉ — DEMI-DROITE

L'ensemble des points M d'affixe z ($z \neq a$) tels que :

$$\arg(z - a) = \alpha$$

est la **demi-droite** d'origine A (d'affixe a), faisant un angle α avec l'axe réel.

Ensemble $|z - (2 + j)| = 3$ — Cercle de centre $A(2; 1)$ et de rayon 3



EXEMPLE — ENSEMBLES DE POINTS

a) $|z - 3| = 2$: cercle de centre $A(3; 0)$ et de rayon 2.

b) $|z + 1 - 2j| = 4$: on écrit $|z - (-1 + 2j)| = 4$, cercle de centre $B(-1; 2)$ et de rayon 4.

c) $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{4}$: demi-droite d'origine $C(1; 0)$, formant un angle de 45° avec l'axe réel.

5

Mini-exercice — Ensembles de points

Décrire géométriquement les ensembles suivants :

a) $|z - 2 + 3j| = 5$ b) $|z| = |z - 4|$ c) $\arg(z + 1) = \frac{\pi}{3}$

► Voir la correction

6. Transformations du plan complexe

DÉFINITION — TRANSLATION

La **translation** de vecteur \vec{w} (d'affixe b) est la transformation $z \mapsto z' = z + b$.

Chaque point se déplace du même vecteur.

DÉFINITION — ROTATION-HOMOTHÉTIE

La transformation $z \mapsto z' = a \cdot z$ avec $a = r e^{j\alpha}$ est une :

- **Rotation** d'angle α (si $r = 1$)
- **Homothétie** de rapport r (si $\alpha = 0$)
- **Similitude directe** (cas général) : rotation d'angle α combinée à une homothétie de rapport r

DÉFINITION — SYMÉTRIE PAR RAPPORT À L'AXE RÉEL

La transformation $z \mapsto z' = \bar{z}$ est la **symétrie** par rapport à l'axe réel (axe des abscisses).

DÉFINITION — INVERSION

La transformation $z \mapsto z' = \frac{1}{z}$ (pour $z \neq 0$) est l'**inversion**.

En forme exponentielle : si $z = r e^{j\theta}$, alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$.

EXEMPLE — ROTATION D'UN MOTIF

Un agenceur doit faire tourner un motif de 90° autour de l'origine. Si un sommet est au point d'affixe $z = 3 + 2j$, l'image par la rotation de $\pi/2$ est :

$$z' = e^{j\pi/2} \cdot z = j \cdot (3 + 2j) = 3j + 2j^2 = -2 + 3j$$

Le point $(3; 2)$ a pour image $(-2; 3)$: rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique. ✓

7. Applications professionnelles

7.1 Impédance complexe en électricité

À retenir — Impédance complexe

En régime sinusoïdal permanent de pulsation $\omega = 2\pi f$, l'impédance complexe d'un circuit est :

- Résistance : $\underline{Z}_R = R$
- Bobine : $\underline{Z}_L = jL\omega$
- Condensateur : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}$

Circuit RLC série :

$$\underline{Z} = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

PROPRIÉTÉ — MODULE ET ARGUMENT DE L'IMPÉDANCE

- Le **module** $|Z|$ donne l'impédance en ohms : $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$
- L'**argument** $\varphi = \arg(Z)$ donne le déphasage tension/courant : $\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$

EXEMPLE RÉSOLU — CIRCUIT RLC (SITUATION DE DÉPART)

Reprenons la situation professionnelle : $R = 100 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

$$\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \approx 314,2 \text{ rad/s}$$

$$L\omega = 0,2 \times 100\pi \approx 62,8 \Omega$$

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{10 \times 10^{-6} \times 100\pi} \approx 318,3 \Omega$$

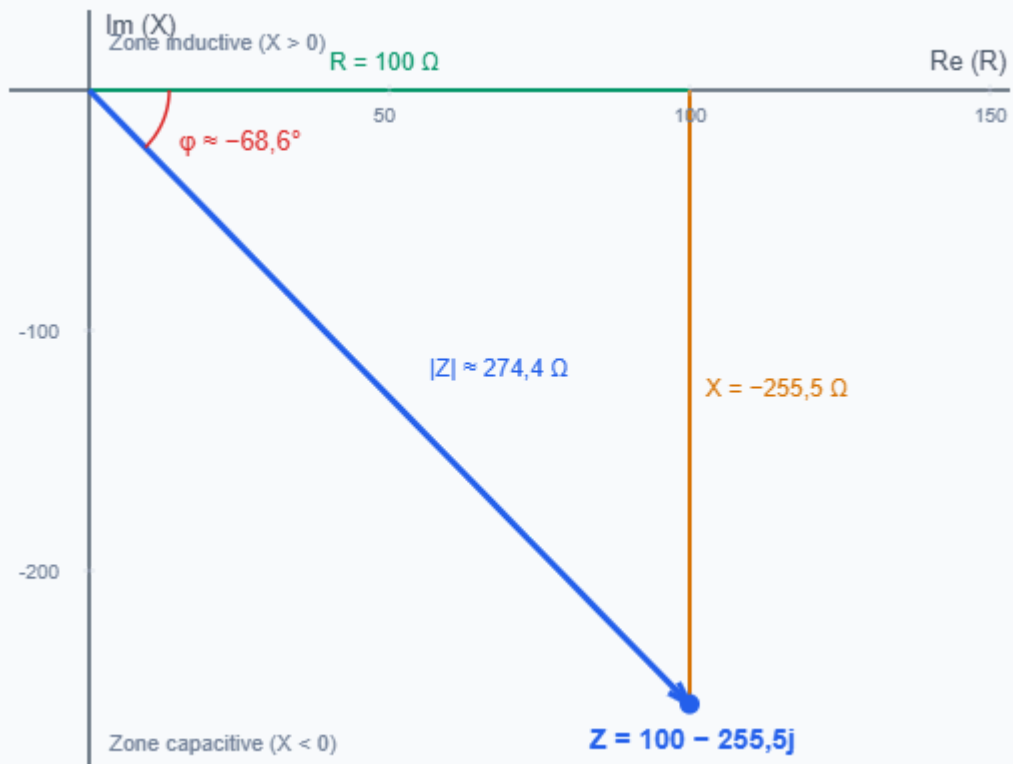
$$\underline{Z} = 100 + j(62,8 - 318,3) = 100 - 255,5j \Omega$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{100^2 + 255,5^2} = \sqrt{10\,000 + 65\,280} \approx 274,4 \Omega$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-255,5}{100}\right) \approx -1,20 \text{ rad} \approx -68,6^\circ$$

Interprétation : le déphasage est négatif ($\varphi < 0$), donc le circuit est **capacitif** : le courant est en avance sur la tension. L'effet du condensateur domine celui de la bobine.

Représentation de l'impédance $\underline{Z} = 100 - 255,5j$ dans le plan complexe



L'impédance est représentée comme un vecteur. La partie réelle (R) est sur l'axe horizontal, la partie imaginaire (réactance X) sur l'axe vertical.

7.2 Représentation de signaux sinusoïdaux

PROPRIÉTÉ — SIGNAL SINUSOÏDAL ET NOTATION COMPLEXE

Un signal sinusoïdal $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par le nombre complexe :

$$\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$$

La valeur instantanée se retrouve par : $u(t) = \text{Re}(\underline{U} e^{j\omega t})$.

Cette représentation simplifie considérablement les calculs de circuits en régime sinusoïdal (diagrammes de Nyquist, Bode).

7.3 Géométrie et transformations

EXEMPLE — ROTATION D'UN PANNEAU EN AGENCEMENT

Un technicien agenceur dessine un panneau rectangulaire dont les quatre sommets ont pour affixes : $z_1 = 0$, $z_2 = 4$, $z_3 = 4 + 2j$, $z_4 = 2j$.

Il doit faire pivoter le panneau de 30° autour de l'origine. La rotation correspond à la multiplication par $e^{j\pi/6}$.

$$z'_2 = 4e^{j\pi/6} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2j \approx 3,46 + 2j$$

Les dimensions du panneau sont conservées (la rotation ne déforme pas la figure).

6

Mini-exercice — Impédance complexe

Un circuit série RL comporte $R = 47 \Omega$ et $L = 0,15 \text{ H}$. La fréquence est $f = 50 \text{ Hz}$.

- Écrire l'impédance complexe \underline{Z} .
- Calculer $|\underline{Z}|$ et $\varphi = \arg(\underline{Z})$.

► Voir la correction

Compétences travaillées :

- Calculer avec des nombres complexes en forme algébrique (somme, produit, quotient, conjugué, module)
- Passer d'une forme à l'autre (algébrique, trigonométrique, exponentielle)
- Résoudre des équations du second degré à discriminant négatif
- Déterminer et représenter des ensembles de points ($|z - a| = k$, $\arg(z - a) = \alpha$)
- Appliquer les transformations du plan complexe
- Calculer des impédances complexes et construire un diagramme de Fresnel

NIVEAU 1

Connaître et appliquer directement

Exercice 1 Calculs algébriques

On donne $z_1 = 3 - 2j$, $z_2 = -1 + 5j$ et $z_3 = 4j$.

1) Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ et $z_1 \cdot z_3$.

2) Calculer $z_1 \cdot z_2$.

3) Calculer $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

Mes calculs :

Exercice 2 Module et conjugué

Pour chacun des nombres complexes suivants, calculer le conjugué \bar{z} , le module $|z|$ et le produit $z\bar{z}$:

a) $z = 5 + 12j$ b) $z = -3 + 4j$ c) $z = 7j$ d) $z = -6$

Mes calculs :

Exercice 3 Représentation dans le plan complexe

Placer dans le plan complexe les points d'affixes suivantes et calculer leur module :

$$z_1 = 3 + j, z_2 = -2 + 3j, z_3 = -4 - 2j, z_4 = 2 - 4j, z_5 = \bar{z}_2.$$

Que remarque-t-on pour z_5 par rapport à z_2 ?

Mes calculs :

Exercice 4**Équations du second degré à discriminant négatif**

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 + 4z + 13 = 0$

b) $z^2 - 6z + 25 = 0$

c) $2z^2 + z + 1 = 0$

Mes calculs :

NIVEAU 2**Appliquer et calculer****Exercice 5****Passage algébrique \rightarrow trigonométrique \rightarrow exponentielle**

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme exponentielle $z = r e^{j\theta}$:

a) $z = 1 + j$ b) $z = -3$ c) $z = -1 + \sqrt{3}j$ d) $z = 2 - 2\sqrt{3}j$

Mes calculs :

Exercice 6 Passage exponentielle → algébrique

Écrire sous forme algébrique :

a) $z = 6 e^{j\pi/6}$ b) $z = 4 e^{-j\pi/2}$ c) $z = 5 e^{j3\pi/4}$

d) Calculer $z_1 \cdot z_2$ avec $z_1 = 3 e^{j\pi/3}$ et $z_2 = 2 e^{j\pi/6}$. Donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Mes calculs :

Exercice 7 Opérations en forme exponentielle

On donne $z_1 = 3 e^{j\pi/4}$ et $z_2 = 2 e^{j2\pi/3}$.

1) Calculer $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ et z_1^4 sous forme exponentielle.

2) Écrire z_1^4 sous forme algébrique.

Mes calculs :

Exercice 8**Puissances et formule de Moivre**

1) Calculer $(1 + j)^6$ en passant par la forme exponentielle. Donner le résultat sous forme algébrique.

2) Calculer $\left(\frac{1 + j\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

3) Simplifier $\frac{(1 - j)^4}{(1 + j)^4}$.

Mes calculs :

Exercice 9 Ensembles de points

Décrire géométriquement et représenter dans le plan complexe les ensembles de points M d'affixe z vérifiant :

a) $|z - 1 - 2j| = 4$

b) $|z + 3| = |z - j|$

c) $\arg(z - 2) = \frac{\pi}{6}$

d) $1 \leq |z - 1 + j| \leq 3$

Mes calculs :

Exercice 10**Transformations du plan : $z \mapsto az + b$**

On considère le triangle ABC d'affixes $z_A = 1$, $z_B = 3$, $z_C = 1 + 2j$.

- 1) Déterminer les images de A, B, C par la translation de vecteur d'affixe $w = -2 + j$.
- 2) Déterminer les images de A, B, C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 3) On considère la transformation $T : z \mapsto z' = (1 + j)z + 2$. Déterminer la nature géométrique de T et calculer les images de A, B, C .

Mes calculs :

Exercice 11**Rotation et homothétie — Motif décoratif**

Un technicien agenceur conçoit un motif décoratif répété par transformation. Le motif de base est un carré de sommets $A(0)$, $B(2)$, $C(2 + 2j)$, $D(2j)$.

La transformation appliquée est $z \mapsto z' = a \cdot z$ avec $a = \frac{1 + j}{\sqrt{2}}$.

- 1) Écrire a sous forme exponentielle. En déduire la nature de la transformation.
- 2) Calculer les images A' , B' , C' , D' .
- 3) Vérifier que la figure image est un carré de même taille que l'original.

Mes calculs :

Exercice 12 Impédance complexe d'un circuit RLC — Contexte FED

Un technicien en Fluides, Énergies, Domotique étudie un circuit RLC série alimenté par un signal sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz. Les composants ont pour valeurs :

- Résistance : $R = 100 \Omega$
- Inductance : $L = 0,3$ H
- Capacité : $C = 20 \mu\text{F}$

- 1) Calculer la pulsation $\omega = 2\pi f$.
- 2) Calculer la réactance de la bobine $X_L = L\omega$ et celle du condensateur $X_C = \frac{1}{C\omega}$.
- 3) Écrire l'impédance complexe $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$ sous forme algébrique.
- 4) Calculer le module $|\underline{Z}|$ et l'argument φ de l'impédance.
- 5) Le circuit est-il inductif ou capacitif ? Justifier.
- 6) Si la tension d'alimentation a une valeur efficace $U = 230$ V, calculer l'intensité efficace du courant $I = \frac{U}{|\underline{Z}|}$ et la puissance active $P = UI \cos \varphi$.

Mes calculs :

Exercice 13**Diagramme de Fresnel — Contexte FED**

Un technicien en génie électrique étudie un circuit RL série alimenté sous une tension sinusoïdale $u(t) = 325 \cos(100\pi t)$ (en V). Les composants sont $R = 80 \Omega$ et $L = 0,2 \text{ H}$.

1) Écrire l'impédance complexe \underline{Z} sous forme algébrique puis exponentielle.

2) Calculer le courant complexe $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ où $\underline{U} = 325 e^{j \cdot 0}$ (on prend la tension comme référence de phase). Donner \underline{I} sous forme exponentielle.

3) En déduire l'expression instantanée du courant $i(t)$.

4) Construire le **diagramme de Fresnel** :

- Représenter le vecteur \underline{I} (courant, pris comme référence horizontale)
- Représenter $\underline{U}_R = R\underline{I}$ (tension aux bornes de R , en phase avec \underline{I})
- Représenter $\underline{U}_L = jL\omega\underline{I}$ (tension aux bornes de L , en avance de $\pi/2$ sur \underline{I})
- Vérifier graphiquement que $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$

5) Calculer les valeurs efficaces U_R, U_L et vérifier que $U^2 \neq U_R^2 + U_L^2$ mais que $U^2 = U_R^2 + U_L^2$ (relation de Pythagore dans le diagramme de Fresnel).

Mes calculs :

Exercice 14**Géométrie complexe — Conception d'un motif hexagonal**

Un concepteur en agencement d'intérieur souhaite créer un motif hexagonal régulier pour un panneau décoratif en bois. L'hexagone est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $r = 5$ cm.

Les sommets de l'hexagone sont les images de $z_0 = 5$ par les rotations successives de $\frac{\pi}{3}$ autour de O .

- 1) Écrire sous forme exponentielle les affixes des 6 sommets z_0, z_1, \dots, z_5 .
- 2) Écrire chaque affixe sous forme algébrique (valeurs exactes).
- 3) Calculer $|z_1 - z_0|$ (longueur d'un côté). Que constate-t-on ?
- 4) Le concepteur veut réduire le motif d'un facteur $\frac{1}{2}$ et le déplacer en $(3 + 4j)$ cm. Quelle transformation complexe $z \mapsto z'$ doit-il appliquer ? Calculer z'_0 .
- 5) Montrer que tous les nouveaux sommets sont sur un cercle de rayon 2,5 cm centré en $(3; 4)$.

Mes calculs :

Nombres complexes

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

On note j l'unité imaginaire telle que $j^2 = -1$ (convention BTS).

Exercice 1 — Forme algébrique, module, conjugué (4 pts)

Soit $z = 5 - 12j$.

- Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z . (1 pt)
- Déterminer le conjugué \bar{z} . (1 pt)
- Calculer le module $|z|$. (1 pt)
- Calculer $z \cdot \bar{z}$ et vérifier que le résultat vaut $|z|^2$. (1 pt)

Exercice 2 — Équation du second degré dans \mathbb{C} (4 pts)

On considère l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$, à coefficients réels.

- Calculer le discriminant Δ . (1,5 pt)
- En déduire les deux solutions complexes conjuguées. (2 pts)
- Vérifier le produit des racines $z_1 \cdot z_2$. (0,5 pt)

Exercice 3 — Forme exponentielle (4 pts)

Soit $z = -1 + j\sqrt{3}$.

- Calculer le module $|z|$. (1 pt)
- Déterminer un argument $\theta = \arg(z)$ (attention au quadrant). (2 pts)
- Écrire z sous forme exponentielle. (1 pt)

Exercice 4 — Opérations en forme exponentielle (4 pts)

Soient $z_1 = 6 e^{j\pi/3}$ et $z_2 = 2 e^{j\pi/4}$.

- Calculer $z_1 \cdot z_2$ sous forme exponentielle. (1,5 pt)
- Calculer $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme exponentielle. (1,5 pt)
- Calculer z_2^4 sous forme exponentielle. (1 pt)

Exercice 5 — Impédance complexe d'un circuit RL (4 pts)

Un circuit série comporte une résistance $R = 30 \Omega$ et une bobine de réactance $L\omega = 40 \Omega$. L'impédance complexe est $\underline{Z} = R + jL\omega$.

- Écrire \underline{Z} sous forme algébrique. (0,5 pt)
 - Calculer le module $|\underline{Z}|$ (impédance en ohms). (1,5 pt)
 - Calculer l'argument $\varphi = \arg(\underline{Z})$ (déphasage tension/courant), en degrés. (1,5 pt)
 - Le circuit est-il inductif ou capacitif ? Justifier. (0,5 pt)
-