

CHAPITRE 10

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET POLYNÔME ANNULATEUR

I	Diagonalisation et polynôme annulateur	3
I.1	Polynômes annulateurs et valeurs propres	3
I.2	Théorème de Cayley-Hamilton	6
I.3	Applications du théorème de Cayley-Hamilton	7
	Bijection réciproque d'un endomorphisme et inverse d'une matrice	7
	Calcul des puissances d'une matrice	7
I.4	Caractérisation de la diagonalisabilité à l'aide de polynômes annulateurs	9
II	Trigonalisation	12
II.1	Définition	12
II.2	Caractérisation des endomorphismes et matrices trigonalisables	13
II.3	Exemples de trigonalisation	14

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;
- l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Si un polynôme P annule u , toute valeur propre de u est racine de P .	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.	
e) Trigonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. Interprétation en termes d'endomorphisme. La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

I. Diagonalisation et polynôme annulateur

Remarque 10.1 – Rappel : polynômes d'endomorphismes, de matrices

- Soient $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot f^k = a_0 \cdot \text{Id}_E + a_1 \cdot f + \cdots + a_d \cdot f^d \in \mathcal{L}(E).$$

On dit que $P(f)$ est un polynôme en f . C'est un endomorphisme de E .

On dit que P est un polynôme annulateur de f lorsque $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On dit aussi que P annule f ou que f est annulé par P .

- Soient $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où $d \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit :

$$P(A) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot A^k = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + \cdots + a_d \cdot A^d \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On dit que $P(A)$ est un polynôme en A . C'est une matrice carrée de taille n .

On dit que P est un polynôme annulateur de A lorsque $P(A) = 0_n$. On dit aussi que P annule A ou que A est annulée par P .

- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

- $1(f) = \text{Id}_E$ et $1(A) = I_n$
- $(\lambda \cdot P + Q)(f) = \lambda \cdot P(f) + Q(f)$ et $(\lambda \cdot P + Q)(A) = \lambda \cdot P(A) + Q(A)$.
- $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$ et $(P \times Q)(A) = P(A) \circ Q(A)$.

Comme $P \times Q = Q \times P$, les polynômes en f (respectivement en A) commutent.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est une base de E .

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)).$$

I.1. Polynômes annulateurs et valeurs propres



Proposition 10.1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $x \in E$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a : $P(f)(x) = P(\lambda) \cdot x$. Autrement dit, x est un vecteur propre de $P(f)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration

- On a : $f^0(x) = \text{Id}_E(x) = x$.

- On a : $f(x) = \lambda \cdot x$.

Donc, par linéarité de f , on a : $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda^2 \cdot x$.

D'où, $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(\lambda^2 \cdot x) = \lambda^2 \cdot f(x) = \lambda^3 \cdot x$.

Par récurrence, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k \cdot x$.

- On note $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Alors, $P(f) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot f^k$.

$$\text{D'où, } P(f)(x) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot f^k(x) = \sum_{k=0}^d (a_k \times \lambda^k) \cdot x = \left(\sum_{k=0}^d (a_k \times \lambda^k) \right) \cdot x = P(\lambda) \cdot x.$$

□

**Proposition 10.2**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P est un polynôme annulateur de A .

Si λ est une valeur propre de A , alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$. De plus, un vecteur propre de A pour la valeur propre λ est un vecteur propre de $P(A)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration

Même démonstration que pour les endomorphismes.

□

**Théorème 10.1**

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f .

Alors, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est racine de P .

Si de plus, E est de dimension finie, alors

$$\text{Sp}(f) \subset \{\text{racines dans } \mathbb{K} \text{ de } P\}.$$

Démonstration

Soit λ une valeur propre de f . Il existe x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . Par la proposition précédente, on a : $P(f)(x) = P(\lambda) \cdot x$.

Or, P est annulateur de f , donc $P(f) = 0$. D'où $P(\lambda) \cdot x = 0$. Or x est non nul (c'est un vecteur propre). Donc $P(\lambda) = 0$. Autrement dit, λ est racine de P .

□

**Théorème 10.2**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A .

Alors, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est racine de P .

Si de plus, E est de dimension finie, alors

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \{\text{racines dans } \mathbb{K} \text{ de } P\}.$$

Démonstration

Même démonstration que pour les endomorphismes.

□

Remarque 10.2 – $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de A ,

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{\text{racines réelles de } P\} \subset \{\text{racines complexes de } P\} \quad \text{et} \quad \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\text{racines complexes de } P\}.$$

Remarque 10.3 – Prudence!

La réciproque de la proposition précédente est fausse.

Le polynôme $P = X \times (X - 1)$ est annulateur de l'endomorphisme $f = \text{Id}_E$, car $f \circ (f - \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Les racines de P sont 0 et 1 mais seule 1 est une valeur propre de f .

Dans la suite, on suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$.

🔗 **Remarque 10.4 – Polynôme annulateur scindé à racines simple d'un endomorphisme ou d'une matrice diagonalisable**

► Une endomorphisme diagonalisable possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale. Notons

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (non nécessaires distinctes) de f . Considérons le polynôme scindé à racines simples :

$$P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} (X - \lambda).$$

On a alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0_n.$$

On en déduit que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc, P est annulateur de f .

► Une matrice diagonalisable possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Il suffit d'appliquer le point précédent à l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice.

► Dans la suite du cours, on verra que si f (respectivement A) est annulé par un polynôme scindé à racines simples, alors f (respectivement A) est diagonalisable.

🔗 **Remarque 10.5 – Le polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. d'une matrice A) diagonalisable, annule f (resp. A)**

Avec les notations de la remarque précédente si f (respectivement A) est diagonalisable alors le polynôme

$$\chi_f = \chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

est annulateur de f et A .

Le théorème de Cayley-Hamilton montrera que ce résultat est encore vrai même si f (respectivement A) n'est pas supposé(e) diagonalisable.

Attention! le polynôme $\chi_f = \chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ est scindé mais pas nécessairement à racines simples (c'est le cas lorsque les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, autrement dit lorsque χ_f est scindé à racines simples. Dans ce cas, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.).

I.2. Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 10.3 – Cayley-Hamilton

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f est annulateur de f :

$$\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Démonstration

Admis (voir le TD pour une démonstration de ce théorème par les matrices compagnons). □

Corollaire 10.1 – Cayley-Hamilton

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est annulateur de A :

$$\chi_A(A) = 0_n.$$

Démonstration

Considérer l'endomorphisme canoniquement associé à A et lui appliquer le théorème de Cayley-Hamilton. □

Exemple 10.1

► On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = (X - 1) \times (X - 2) \times (X - 3).$$

De plus, le spectre de A est $\{1, 2, 3\}$. D'autre part, on a :

$$(A - I_3) \times (A - 2I_3) \times (A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est en accord avec le théorème de Cayley-Hamilton.

Remarquons que les polynômes $(X - 1) \times (X - 2)$, $(X - 1) \times (X - 3)$ et $(X - 2) \times (X - 3)$ ne sont pas annulateur de A (sinon, d'après le théorème 10.1 page 4 le spectre de A ne pourrait pas être $\{1, 2, 3\}$).

► On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de B est

$$\chi_B = (X - 1)^3.$$

Le polynôme $(X - 1)^3$ est donc annulateur de B . Remarquons qu'en fait, le polynôme $(X - 1)^2$ est aussi annulateur de B :

$$(B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_3.$$

Il n'est pas étonnant qu'un polynôme de degré inférieur au degré de χ_f soit annulateur de f .

- Soit p une projection. Le polynôme $X \times (X - 1)$ est annulateur de p et son polynôme caractéristique est : $X^q \times (X - 1)^r$ où $r = \dim(\text{Ker}(p - \text{Id}_E))$ et $q = \dim(\text{Ker}(p))$.
- Soit s une symétrie. Le polynôme $(X - 1) \times (X + 1)$ est annulateur de s et son polynôme caractéristique est : $(X - 1)^r \times (X + 1)^q$ où $r = \dim(\text{Ker}(s - \text{Id}_E))$ et $q = \dim(\text{Ker}(s + \text{Id}_E))$.

I.3. Applications du théorème de Cayley-Hamilton

Bijection réciproque d'un endomorphisme et inverse d'une matrice

On sait que (voir chapitres 1 et 2) s'il existe un polynôme annulateur d'un endomorphisme (respectivement d'une matrice) dont le coefficient constant est non nul, alors cet endomorphisme (respectivement cette matrice) est un automorphisme (respectivement inversible).

Le choix du polynôme annulateur peut maintenant se porter sur le polynôme caractéristique de l'endomorphisme (respectivement de la matrice).

De plus, si $f \in \text{GL}(E)$ (respectivement $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$), alors on sait que $\det(f) \neq 0$ (respectivement $\det(A) \neq 0$). Dans ce cas, on sait alors que le coefficient constant de χ_f (respectivement χ_A) est non nul.

💡 Exemple 10.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a : $\chi_f = (X - 3) \times (X^2 - 2X + 9) = X^3 - 5X^2 + 15X - 27$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a : $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On en déduit que $f^3 - 5.f^2 + 15.f - 27 \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On en déduit que f est un automorphisme et $f^{-1} = \frac{1}{27} \cdot (f^2 - 5.f + 15.\text{Id}_E)$. De plus,

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot (A^2 - 5.A + 15.I_3).$$

Calcul des puissances d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait que χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauß).

On décompose χ_A en produit de facteurs irréductibles $\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \lambda_p)^{m_p}$ (les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A et les $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^k par χ_A : il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ unique tel que $X^k = Q_k \times \chi_A + R_k$ avec $\deg(R_k) < n$ (rappel : $\deg(\chi_A) = n$). En substituant A à X dans l'équation $X^k = Q_k \times \chi_A + R_k$ et en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$A^k = Q_k(A) \times \chi_A(A) + R_k(A) = R_k(A).$$

Pour déterminer A^k , il suffit alors de déterminer R_k , ce que nous allons faire maintenant.

On sait que $\deg(R_k) < n$, d'où, $R_k = a_{0,k} + a_{1,k}X + \dots + a_{n-1,k}X^{n-1}$. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, λ_i est racine de multiplicité m_i . D'où $\chi_A(\lambda_i) = \chi'_A(\lambda_i) = \dots = \chi_A^{(m_i-1)}(\lambda_i) = 0$. D'où, en évaluant et en dérivant l'égalité $X^k = Q_k \times \chi_A + R_k$, on obtient les équations :

$$R_k(\lambda_i) = \lambda_i^k, R'_k(\lambda_i) = k \times \lambda_i^{k-1}, \dots, R_k^{(m_i-1)}(\lambda_i) = k \times (k-1) \times \dots \times (k-m_i+2) \times \lambda_i^{k-m_i+1}.$$

Pour chaque λ_i on a m_i équations, donc au total $m_1 + \dots + m_p = n$ équations (car $\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \lambda_p)^{m_p}$ est scindé). On a alors un système de n équation à n inconnues (les $a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{n-1,k}$). Il ne reste plus qu'à résoudre ce système pour déterminer R_k et donc $A^k = R_k(A)$.

 Remarque 10.6

Il ne faut pas apprendre ces formules par cœur, il suffit de retenir l'idée :

« division euclidienne », et ensuite, on déroule !

 Exemple 10.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -5 \\ 6 & X+1 & 10 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \times \begin{vmatrix} X-4 & -1 \\ 6 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1) \times (X^2 - 3X + 2) = (X-1)^2 \times (X-2)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^k par χ_A . Il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ unique tel que $X^k = Q_k \times \chi_A + R_k$ (on note (1) cette équation) et $\deg(R_k) < 3$ (χ_A est de degré 3).

On note $R_k = a + bX + cX^2$ où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On évalue (1) en 2 et on a : $a + 2b + 4c = 2^k$.

On évalue (1) en 1 et on a : $a + b + c = 1$.

On dérive (1) et on évalue le résultat en 1 et on a : $b + 2c = k$. On obtient alors le système linéaire :

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 2^k \\ a + b + c = 1 \\ b + 2c = k. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + 2b + 4c = 2^k \\ a + b + c = 1 \\ b + 2c = k. \end{cases} & \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} a + 2b + 4c = 2^k \\ 0 - b - 3c = 1 - 2^k \\ b + 2c = k. \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} a + 2b + 4c = 2^k \\ -b - 3c = 1 - 2^k \\ -c = k + 1 - 2^k. \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow{} \begin{cases} a & & = 2^k - 2k \\ b & & = -2^{k+1} + 3k + 2 \\ c & = & 2^k - 1 - k. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $R_k = 2^k - 2k + (-2^{k+1} + 3k + 2)X + (2^k - 1 - k)X^2$. D'où,

$$A^k = (2^k - 2k).I_3 + (-2^{k+1} + 3k + 2).A + (2^k - 1 - k).A^2.$$

Or, $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 15 \\ -18 & -5 & -30 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où,

$$A^k = (2^k - 2k).I_3 + (-2^{k+1} + 3k + 2).A + (2^k - 1 - k).A^2 = \begin{pmatrix} 3 \times 2^k - 2 & 2^k - 1 & 5 \times 2^k - 5 \\ 6 - 3 \times 2^{k+1} & 3 - 2^{k+1} & 10 - 5 \times 2^{k+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10.1**

Reprendre l'exemple précédent et déterminer les puissances de A en diagonalisant A .

Résolution

Je trouve que $A = P \times D \times P^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais vous pouvez trouver d'autres matrices (par contre, la matrice D doit être diagonale avec deux 1 et un 2 sur la diagonale, peu importe l'ordre).

I.4. Caractérisation de la diagonalisabilité à l'aide de polynômes annulateurs**Théorème 10.4**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'endomorphisme f (respectivement la matrice A) est diagonalisable.
2. Il existe un polynôme annulateur de f (respectivement de A) scindé à racines simples.
3. Le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} (X - \lambda)$ est annulateur de f (respectivement de A).

Démonstration

- La démonstration de (1) $\iff$ (2) est hors-programme.
- L'implication (1) $\implies$ (3) est démontrée dans la remarque 10.4 page 5. L'implication (3) $\implies$ (2) est claire car le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} (X - \lambda)$ est scindé à racines simples. On a admis (2) $\iff$ (1). Donc, (3) $\implies$ (1) et l'équivalence (1) $\iff$ (3) est établie. $\square$

Remarque 10.7 – Attention!

Notez bien que dans le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} (X - \lambda)$ les valeurs propres de f apparaissant *une seule fois*, ce qui assure qu'il soit scindé à racines simples.

Exemple 10.4

- Soit p un projecteur. On sait que $X^2 - X$ annule p . Or,

$$X^2 - X = X \times (X - 1)$$

est scindé à racines simples. On retrouve que p est diagonalisable.

- Soit s une symétrie. On sait que $X^2 - 1$ annule s . Or,

$$X^2 - 1 = (X - 1) \times (X + 1)$$

est scindé à racines simples. On retrouve que s est diagonalisable.

Théorème 10.5

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriels stable par f (avec $F \neq \{0_E\}$).

Si l'endomorphisme f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit f_F est diagonalisable.

Démonstration

Si f est diagonalisable, alors il existe P un polynôme annulateur de f scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$. De plus, ce polynôme est aussi annulateur de f_F (car, pour tout $x \in F$, $f(x) = f_F(x)$). Donc P est un polynôme annulateur de f_F et est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$. Par le théorème précédent, f_F est diagonalisable. $\square$

Remarque 10.8 – Prudence! La réciproque est fausse

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{K}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Le sous-espace vectoriel F est stable par f et la matrice de f_F , l'endomorphisme de F induit par f , dans la base (e_1, e_2) est I_2 . On en déduit que f_F est diagonalisable.

De plus, on a $\chi_f = \chi_A = (X - 1)^3$.

Donc, 1 est valeur propre triple de f . Or, $\dim(E_1(f)) = \dim(E_1(A)) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 3$. Donc f n'est pas diagonalisable.

Remarque : autre rédaction. On a $\chi_f = \chi_A = (X - 1)^3$, donc $\text{Sp}(A) = \{1\}$. D'où, si A est diagonalisable alors A est semblable à la matrice I_3 ce qui n'est pas. Donc, A n'est pas diagonalisable.

Exercice 10.2 – Codiagonalisation de deux endomorphismes qui commutent

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

On considère deux **endomorphismes diagonalisables** f et g de E . On suppose de plus que les endomorphismes f et g **commutent**.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f .

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de f et de g sont diagonales.

Remarque : on dit alors que f et g sont codiagonalisables.

1. Justifier que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$.
2. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que $E_{\lambda_i}(f)$, le sous-espace propre de f pour la valeur propre λ_i , est stable par g .
Dans la suite, on note $g_i = g|_{E_{\lambda_i}(f)}$ l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(f)$ induit par g .
3. Justifier que g_i est diagonalisable.
4. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de f et de g sont diagonales.
5. Donner une version matricielle du résultat de la question 4.

Résolution

1. Comme f est diagonalisable et les λ_i sont les valeurs propres distinctes de f , on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f).$$

2. Comme g commute avec f , g commute avec tout polynôme en f .

En particulier, g commute avec $f - \lambda_i \cdot \text{id}_E$.

Donc,

$$E_{\lambda_i}(f) = \text{Ker}(f - \lambda_i \cdot \text{id}_E) \text{ est stable par } g.$$

3. On sait que g est diagonalisable, donc, par théorème

l'endomorphisme induit g_i est diagonalisable.

4. Par la question précédente, il existe $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(f)$ formée de vecteurs propres de g .
Comme ces vecteurs appartiennent à $E_{\lambda_i}(f)$ et sont non nuls (en effet, ce sont des vecteurs propres), ce sont aussi des vecteurs propres de f .

Ainsi, $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(f)$ formée de vecteurs propres de f et de g .

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$, la famille $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de E .

De plus, par construction, $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de f et de g .

Ainsi,

les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ sont diagonales.

5. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

Montrons qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et D_A et D_B deux matrices diagonales telles que

$$A = P \times D_A \times P^{-1} \quad \text{et} \quad B = P \times D_B \times P^{-1}.$$

Considérons f_A (respectivement, f_B) l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ induit par A (respectivement, par B).

Comme A et B commutent et sont diagonalisables, les endomorphismes f_A et f_B commutent et sont diagonalisables.

Par 4, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $D_A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A)$ et $D_B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_B)$ sont diagonales.

En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, on a :

$$A = P \times D_A \times P^{-1} \quad \text{et} \quad B = P \times D_B \times P^{-1}.$$

Remarque : L'intérêt de ces égalités est que la matrice P est la même pour les deux matrices A et B .

Sans l'hypothèse de commutativité, on ne pourrait écrire que :

$$A = P \times D_A \times P^{-1} \quad \text{et} \quad B = Q \times D_B \times Q^{-1},$$

où P et Q sont des matrices inversibles (pas nécessairement les mêmes).

II. Trigonalisation

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

II.1. Définition



Définition 10.1 – Endomorphisme trigonalisable, Matrice trigonalisable

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *trigonalisable* si, et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *trigonalisable* si, et seulement si, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 10.9

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. En notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure si, et seulement si,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

En particulier $e_1 \in \text{Vect}(e_1)$ et est donc un vecteur propre de f . On ne peut rien dire a priori sur les vecteurs $e_2, \dots, e_n$.

Remarque 10.10 – Valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme trigonalisable. Par définition, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. Autrement dit :

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de f est alors :

$$\chi_f = \chi_T = \prod_{i=1}^n (X - t_{i,i}).$$

Les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux de T . Plus précisément, on a le résultat suivant.



Théorème 10.6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme trigonalisable. Dans une base $\mathcal{B}$ de E , la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$ de E est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de f comptées avec multiplicités.

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, on note m_{λ} la multiplicité de λ . On a alors :

- $\text{Tr}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} m_{\lambda} \times \lambda$. La trace de f est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.
- $\det(f) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \lambda^{m_{\lambda}}$. La déterminant de f est le produit de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

Proposition 10.3

Soient $\mathcal{B}$ une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
La matrice A est trigonalisable si, et seulement si, f est trigonalisable.

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose A trigonalisable.

Comme A est trigonalisable, il existe T une matrice triangulaire supérieure semblable à A . Par la formule de changement de base, A et T représentent f dans deux bases différentes. Autrement dit, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. Donc, par définition, f est trigonalisable.

($\Leftarrow$) On suppose que f est trigonalisable. Par définition, il existe $\mathcal{B}'$ une base de E telle que $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire supérieure. Les matrices A et T représentent f dans deux bases différentes, donc A et T sont semblables. Comme T est triangulaire supérieure, on en déduit que A est trigonalisable. $\square$

Corollaire 10.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .
La matrice A est trigonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme f_A est trigonalisable.

Démonstration

Appliquer le résultat précédent avec $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. $\square$

II.2. Caractérisation des endomorphismes et matrices trigonalisables

Théorème 10.7

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme f est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Démonstration

La démonstration n'est pas exigible.

- L'implication directe ($\Rightarrow$) est une conséquence de la remarque 10.9 page 12.

Montrons l'implication réciproque ($\Leftarrow$) par récurrence sur la dimension de l'espace. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note H_n la propriété : « Pour tout E espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$, si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, alors f est trigonalisable ».

- **Initialisation.** $n = 1$. Soit E un espace vectoriel de dimension 1. La matrice de tout endomorphisme de E est de la forme (a) , où $a \in \mathbb{K}$, qui est triangulaire supérieure. Donc H_1 est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n vraie et on montre H_{n+1} . Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n + 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Comme χ_f est scindé, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f . Soit e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre de λ . En particulier e_1 est non nul et on peut compléter la famille libre (e_1) en $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ une base de E . De plus, par définition de e_1 , on a $f(e_1) = \lambda \cdot e_1$. Donc,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit g_A l'endomorphisme canoniquement de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . Par la formule du déterminant pour une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} X - \lambda & -L \\ 0 & X \cdot I_n - A \end{vmatrix} = (X - \lambda) \times \chi_A = (X - \lambda) \times \chi_{g_A}.$$

On en déduit que χ_{g_A} est scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de g_A est triangulaire supérieure. Notons cette matrice T . Par la formule de changement de base, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = Q \times T \times Q^{-1}$. D'où,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & Q \times T \times Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda & L \times Q \\ 0 & T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. On a $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ (Q est inversible). Donc P est inversible. De plus, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1} \times \begin{pmatrix} \lambda & L \times Q \\ 0 & T \end{pmatrix} \times P.$$

La matrice $T' = \begin{pmatrix} \lambda & L \times Q \\ 0 & T \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et est semblable à $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Donc, T' représente f dans une base de E . Par définition, f est donc trigonalisable. Ce qui achève la récurrence.

► Appliquer le point précédent à l'endomorphisme canoniquement associé à A . □

Corollaire 10.3

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration

Par le théorème de d'Alembert-Gauß, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème précédent □

II.3. Exemples de trigonalisation



Exercice 10.3

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A . Étudier la trigonalisabilité de A .

2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Résolution

1. On a :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-2 & -2 & 3 \\ -5 & X-1 & 5 \\ 3 & -4 & X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 3 \\ X-1 & X-1 & 5 \\ X-3 & -4 & X \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 3 \\ 0 & X+1 & 2 \\ 0 & -2 & X-3 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &= (X-1) \times \begin{vmatrix} X+1 & 2 \\ X-2 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \times ((X+1) \times (X-3) + 4) \\ &= (X-1) \times (X^2 - 2X + 1) \\ &= (X-1)^3. \end{aligned}$$

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et la seule valeur propre de A est 1.

Par l'absurde, si A est diagonalisable, alors A est semblable à I_3 .

Or, seule l'identité est semblable à l'identité. Comme $A \neq I_3$, on aboutit à une contradiction.

Donc,

A n'est pas diagonalisable.

Cependant, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc,

A est trigonalisable.

$$\begin{aligned} 2. \text{ On note } f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

On sait que A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On cherche $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{cases} f(e'_1) = e'_1 \\ f(e'_2) = e'_1 + e'_2 \\ f(e'_3) = e'_2 + e'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} Ae'_1 = e'_1 \\ Ae'_2 = e'_1 + e'_2 \\ Ae'_3 = e'_2 + e'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (A - I_3)e'_1 = 0 \\ (A - I_3)e'_2 = e'_1 \\ (A - I_3)e'_3 = e'_2 \end{cases}$$

En multipliant la deuxième équation par $(A - I_3)^2$ on obtient :

$$(A - I_3)^3 e'_3 = (A - I_3)^2 e'_2 = (A - I_3)e'_1 = 0.$$

On choisit donc e'_3 dans le noyau de $(A - I_3)^3$.

Or, après calculs, $(A - I_3)^3 = 0$. On prend alors par exemple $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Du système initial, on déduit alors que :

$$e'_2 = (A - I_3)e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e'_1 = (A - I_3)e'_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

On vérifie ensuite que les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{vmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 20 & 5 & 0 \\ 20 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^4 \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 20 & -3 \end{vmatrix} = -160 \neq 0.$$

Donc, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et de plus (je ne détaille pas les calculs),

$$\begin{cases} f(e'_1) = Ae'_1 = \dots = e'_1. \\ f(e'_2) = Ae'_2 = \dots = e'_1 + e'_2. \\ f(e'_3) = Ae'_3 = \dots = e'_2 + e'_3. \end{cases}$$

Donc, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T$.

Ainsi, A et T représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, donc,

$$A \text{ est semblable à } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Exercice 10.4

$$\text{On considère } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Étudier la diagonalisabilité de A. Étudier la trigonalisabilité de A.

2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Résolution

1. On a :

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-2) \times \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-2) \times ((X-1) \times (X-3) + 1) \\ &= (X-2) \times (X^2 - 4X + 4) \\ &= (X-2)^3\end{aligned}$$

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et la seule valeur propre de A est 2.

Par l'absurde, si A est diagonalisable, alors A est semblable à $2I_3$.

Or, seule $2I_3$ est semblable à l'identité. Comme $A \neq 2I_3$, on aboutit à une contradiction.

Donc,

A n'est pas diagonalisable.

Cependant, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc,

A est trigonalisable.

2. On note $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 $X \mapsto AX$

On sait que A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On cherche $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{cases} f(e'_1) = 2e'_1 \\ f(e'_2) = 2e'_2 \\ f(e'_3) = 2e'_2 + e'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} Ae'_1 = 2e'_1 \\ Ae'_2 = 2e'_2 \\ Ae'_3 = e'_2 + 2e'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (A - 2I_3)e'_1 = 0 \\ (A - 2I_3)e'_2 = 0 \\ (A - 2I_3)e'_3 = e'_2 \end{cases}$$

En multipliant la deuxième équation par $A - 2I_3$ on obtient :

$$(A - 2I_3)^2 e'_3 = (A - 2I_3)e'_2 = 0.$$

On choisit donc e'_3 dans le noyau de $(A - 2I_3)^2$.

Or, après calculs, $(A - 2I_3)^2 = 0$. On prend alors par exemple $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : pourquoi ce vecteur et pas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Testez avec ce vecteur et vous verrez.

Du système initial, on déduit alors que :

$$e'_2 = (A - 2I_3)e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour e'_1 , on cherche un vecteur propre de A pour la valeur propre 2 qui n'est pas colinéaire à e'_2 . On trouve $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie ensuite que les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Donc, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et de plus (je ne détaille pas les calculs),

$$\begin{cases} f(e'_1) = Ae'_1 = \dots = 2e'_1. \\ f(e'_2) = Ae'_2 = \dots = 2e'_2. \\ f(e'_3) = Ae'_3 = \dots = e'_2 + 2e'_3. \end{cases}$$

Donc, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T$.

Ainsi, A et T représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, donc,

$$A \text{ est semblable à } T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.5

On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A . Étudier la trigonalisabilité de A .

2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Résolution

1. On a :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & 1 \\ 1 & X-2 & 0 \\ -3 & 2 & X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ X-1 & X-2 & 0 \\ X-1 & 2 & X \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-3 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &= (X-1) \times \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \times ((X-3) \times (X-1) + 1) \\ &= (X-1) \times (X-2)^2 \end{aligned}$$

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

$$\text{On a } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

On a $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$.

Or, $C_2 = C_3$, donc, $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2)$.

Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$.

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 3 - 2 = 1 \neq 2$. Donc, par théorème,

A n'est pas diagonalisable.

Cependant, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc,

A est trigonalisable.

2. On note $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 $X \mapsto AX$

On sait que A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On cherche $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{cases} f(e'_1) = e'_1 \\ f(e'_2) = 2e'_2 \\ f(e'_3) = 2e'_2 + e'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} Ae'_1 = e'_1 \\ Ae'_2 = 2e'_2 \\ Ae'_3 = e'_2 + 2e'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (A - I_3)e'_1 = 0 \\ (A - 2I_3)e'_2 = 0 \\ (A - 2I_3)e'_3 = e'_2 \end{cases}$$

En multipliant la deuxième équation par $A - 2I_3$ on obtient :

$$(A - 2I_3)^2 e'_3 = (A - 2I_3)e'_2 = 0.$$

On choisit donc e'_3 dans le noyau de $(A - 2I_3)^2$.

Or, après calculs, $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On prend alors par exemple $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Du système initial, on déduit alors que :

$$e'_2 = (A - 2I_3)e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour e'_1 , on cherche un vecteur propre de A pour la valeur propre 1. On trouve $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie ensuite que les vecteurs e'_1 , e'_2 et e'_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Donc, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et de plus (je ne détaille pas les calculs),

$$\begin{cases} f(e'_1) = Ae'_1 = \dots = e'_1. \\ f(e'_2) = Ae'_2 = \dots = 2e'_2. \\ f(e'_3) = Ae'_3 = \dots = e'_2 + 2e'_3. \end{cases}$$

Donc, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T$.

Ainsi, A et T représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, donc,

$$A \text{ est semblable à } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$