

Chapitre 12

Variables aléatoires réelles

Sommaire

12.1 Généralités sur les var à densité	282
12.1.1 Variables aléatoires à densité	282
12.1.2 Fonction affine d'une variable à densité	284
12.1.3 Fonction exponentielle d'une var à densité	284
12.1.4 Fonction carrée d'une var à densité	285
12.1.5 Espérance d'une variable aléatoire à densité	285
12.1.6 Moments d'une var à densité	286
12.1.7 Variance d'une var à densité	287
12.2 Variables aléatoires réelles quelconques	287
12.2.1 Indépendance de var quelconques	287
12.2.2 Espérance	289
12.2.3 Variance	289
12.3 Lois usuelles à densité	290
12.3.1  Lois uniformes	290
12.3.2  Lois exponentielles	292
12.3.3  Lois normales	294

La notion d'espérance pour une var discrète a été définie en première année. La définition de l'espérance ou des moments d'ordre supérieur d'une var quelconque est hors d'atteinte dans le cadre de ce programme et toute difficulté s'y ramenant est à écarter.

On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux var quelconques (en particulier, le théorème de transfert permettant de calculer l'espérance de $g(X)$ où X est à densité.)

Compétences attendues.  Montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité.

 Déterminer une densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition et réciproquement.

 Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $Y = g(X)$.

 Prouver qu'une variable aléatoire X est à densité.

 Prouver l'existence et calculer l'espérance ou la variance d'une variable à densité.

Johann Samuel König (également orthographié König), né le 31 juillet 1712 à Büdingen, mort le 21 août 1757 à Zuilenstein, est un mathématicien allemand.

Fils de Samuel-Henri König, pasteur et professeur à Berne, König devient l'élève de Jean Bernoulli

et traduit les *Éléments* d'Euclide. Dans ce livre, se fait sentir l'héritage du formalisme de Pierre Héron et de François Viète. Présenté par Maupertuis, il enseigne les mathématiques à la marquise du Châtelet, et est nommé en 1740 membre de l'Académie des sciences de Paris.

Il devient, vers 1745, professeur de philosophie à Franeker, et en 1749 professeur de philosophie et de droit naturel à La Haye.

Associé étranger de l'Académie de Berlin, il a avec Maupertuis, président de cette compagnie, une dispute célèbre au sujet du principe de moindre action, principe dont Maupertuis s'attribuait l'invention et que König rapportait à Leibniz.

Euler donne raison à Maupertuis, qui fait rayer König de la liste de l'Académie; Voltaire a pris sa défense dans l'histoire du docteur Akakia et est chassé de Prusse à cause de ce libellé.

On réalise une expérience aléatoire et on considère l'univers $\Omega = \{\text{issues possibles à l'expérience}\}$. On munit Ω d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de Ω , puis on définit une probabilité P sur cet espace.

12.1 Généralités sur les var à densité

12.1.1 Variables aléatoires à densité

Définition 12.1 ( Variable à densité).

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est une variable à densité lorsque F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Théorème 12.1 ( Caractérisation d'une fonction de répartition).

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors la fonction de répartition d'une variable aléatoire X a les propriétés caractéristiques suivantes :

1. F_X est partout continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.
2. F_X est croissante.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Exemple 12.1.

On considère une variable aléatoire X et on admet que sa fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

X est une variable aléatoire à densité.

En effet la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ (même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons.

Remarque.

 Prouver qu'une variable est à densité : Il faut savoir prouver qu'une variable aléatoire est à densité lorsqu'on connaît sa fonction de répartition (sur tout $\mathbb{R}$!) : en montrant que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points, et continue sur $\mathbb{R}$ (donc il faut traiter aussi les points problématiques et obtenir la continuité en regardant la limite à gauche et la limite à droite.)

Définition 12.2 (↗ Densité de X).

On considère une variable aléatoire à densité X et sa fonction de répartition F_X . Alors toute fonction positive f_X sur $\mathbb{R}$ telle que : $f_X(x) = F'_X(x)$ pour tout réel x où F_X est $\mathcal{C}^1$, est appelée densité de X .

On a alors les égalités très importantes suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

Et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - F_X(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t) dt.$$

Propriété 12.2.

On considère une variable aléatoire X et sa densité f_X .

Alors on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$.

Remarques.

1. On a la propriété 12.2 car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
2. Pour définir f_X sur $\mathbb{R}$ tout entier, on lui donne une valeur arbitraire, positive ou nulle, en les points où F_X n'est pas $\mathcal{C}^1$. La fonction f_X possède alors un nombre fini de points de discontinuité.
3. On ne change pas la valeur d'une intégrale si l'on change la valeur de la fonction en un nombre fini de points. Ceci entraîne alors le théorème suivant.

Théorème 12.3.

On considère une variable aléatoire à densité X et sa fonction de répartition F_X . Toute fonction f_X à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points (éventuellement aucun), est une densité de X .

Tout ceci nous permet alors d'en déduire le théorème suivant qui permettra de montrer si une fonction f est une densité ou pas.

Théorème 12.4 (↗ Caractérisation d'une densité).

Une fonction f est une densité si et seulement si :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sauf peut-être en un nombre fini de points.
2. f est une fonction à valeurs positives.
3. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et est égale à 1.

Théorème 12.5 (↗ Régularité des fonctions de répartition).

Si f est une densité de probabilité, $F : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point où f est continue.

En un tel point, $F'(x) = f(x)$.

Plus généralement, si f est continue à droite (resp. à gauche) en x , F est dérivable à droite (resp. à gauche) en x .

EXERCICE 12.1 (Fonction de répartition d'une variable à densité).

On considère une variable aléatoire X .

1. Montrer que la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$ et 0 si $x < 0$ est une densité.
2. Déterminer alors la fonction de répartition F de X .

Remarque.

Si X est une variable aléatoire de densité f_X , alors on peut choisir comme support :

$$X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}, f_X(x) \neq 0\}.$$

On verra qu'il y a d'autres choix quand nous étudierons les lois usuelles à densité.

Propriété 12.6.

Si X est une variable aléatoire de densité, alors on a : $\forall x \in \mathbb{R}, P(X = x) = 0$.

Preuve.

Car la fonction de répartition F_X est continue + thme de limite monotone. ◇

Propriété 12.7.

Soit X est une variable aléatoire de densité f_X , dont la fonction de répartition est notée F_X .

Pour tout couple (a, b) de réels tels que $a < b$, on a :

$$P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt.$$

Preuve. ◇

12.1.2 Fonction affine d'une variable à densité**Théorème 12.8** (Fonction affine d'une var à densité).

Soit X une variable aléatoire à densité (notée f_X) définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et deux réels a et b .

Si $a \neq 0$, alors $aX + b$ est une variable aléatoire à densité.

Preuve. ↩

On sait que $Y = aX + b$ est une variable aléatoire (Y est la transformée affine de la variable aléatoire X).

Montrons que Y est une variable aléatoire à densité.

Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y .

Pour tout réel x , on a : $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(aX + b \leq x) = P(aX \leq x - b)$.

Il nous faut alors distinguer les cas où $a < 0$ et $a > 0$.

- Si $a > 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(X \leq \frac{x-b}{a}) = F_X(\frac{x-b}{a})$.

Or X est une variable aléatoire à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en qqs points (en nombre fini) et la fonction $x \mapsto \frac{x-b}{a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

Ce qui prouve dans ce cas ($a > 0$) que Y est une variable aléatoire à densité.

- Si $a < 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(X \geq \frac{x-b}{a}) = 1 - F_X(\frac{x-b}{a})$.

Les mêmes arguments que dans le cas où $a > 0$ permettent de dire que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

Ce qui prouve dans ce cas ($a < 0$) que Y est une variable aléatoire à densité. ◇

EXERCICE 12.2.

Montrer qu'une densité f_Y de Y est : $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Remarque.

Rappelons que toute var fonction d'une var discrète est discrète.

CECI N'EST PLUS nécessairement vrai dans le cas des var à densité! Toute var fonction d'une var à densité n'est pas nécessairement à densité!

Nous verrons dans certains exercices les méthodes pour étudier la loi de $Y = g(X)$ si X est à densité.

12.1.3 Fonction exponentielle d'une var à densité

Soit X une var de densité f et de fonction de répartition F_X . On considère la var $Y = e^X$.

Propriétés 12.9.

1. Pour tout $y \in Y(\Omega)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P(X \leq \ln(y)) = F_X(\ln(y)) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

2. Pour toutes valeurs de y pour lesquelles F_Y est dérivable :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

12.1.4 Fonction carrée d'une var à densité

Soit X une var de densité f et de fonction de répartition F_X . On considère la var $Y = X^2$.

Propriétés 12.10.

1. Pour tout $y \in Y(\Omega)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

2. Pour toutes valeurs de y pour lesquelles F_Y est dérivable :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

12.1.5 Espérance d'une variable aléatoire à densité**Définition 12.3.**

Soit X une variable aléatoire de densité f_X .

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ converge absolument alors on définit l'espérance de la variable aléatoire à densité X par le réel, noté $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

Remarques.

Pour montrer qu'une variable à densité X (densité f_X) possède une espérance, il faut vérifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ converge absolument.

Si le calcul de l'espérance est demandé, alors il faut calculer des intégrales partielles (cf exo 12.3), puis passer à la limite.

Si le calcul de l'espérance n'est pas demandé, il est possible que X ne possède pas d'espérance : dans ce cas on considère la fonction $t \mapsto t f(t)$ et on reconnaît cette fonction comme étant d'intégrale divergente (intégrale de Riemann de paramètre < 1 , par exemple).

EXERCICE 12.3.

On considère une variable aléatoire X . La fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité. (cf. exo 12.1).

Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

EXERCICE 12.4.

On considère une variable aléatoire X . Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Montrer que f est une densité de X .

Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Propriété 12.11 (Linéarité de l'espérance).

Si a et b sont deux réels et si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors on a : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Définition 12.4 (Variable aléatoire centrée).

Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance est nulle.

Propriété 12.12.

Si la variable aléatoire X a une espérance alors $X - E(X)$ est centrée.

Théorème 12.13 (Théorème de transfert).

Si X est une var admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a, b[$, alors $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b g(t) f(t) dt$ converge absolument, et dans ce cas :

$$E(g(X)) = \int_a^b g(t) f(t) dt$$

EXERCICE 12.5.

Soit X une var suivant la loi exponentielle de paramètre 1, la var $T = \frac{1}{1 + e^{-X}}$ admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

12.1.6 Moments d'une var à densité

Définition 12.5 (↗ Moments d'ordre r).

Une var X de densité f admet un moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}^*$) lorsque X^r possède une espérance. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X , le réel :

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t) dt.$$

Remarques.

Le calcul du moment d'ordre 1 revient à calculer l'espérance.

Le calcul du moment d'ordre 2 permettra de trouver la variance.

EXERCICE 12.6.

On considère de nouveau la var $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$. Montrer que X admet un moment d'ordre 2.

EXERCICE 12.7.

Soit f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité d'une var X .
2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
3. Montrer que le moment d'ordre 2 n'existe pas.

12.1.7 Variance d'une var à densité

Définition 12.6 (↗ Variance d'une var à densité).

Si une var X de densité f admet un moment d'ordre 2, alors on appelle variance de X , et on note $V(X)$, le réel défini par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t) dt.$$

On appelle écart type de X (qui existe si $V(X)$ existe), noté $\sigma(X)$, la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 12.14 (↗ de Koenig-Huygens).

Si X est une var à densité possédant une variance, alors on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Théorème 12.15 (↗ $V(aX+b)$).

Si X est une var à densité ayant une variance $V(X)$, alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ a une variance et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Remarque.

Les autres propriétés de la variance seront énoncées dans le cas général des var quelconques au paragraphe suivant.

12.2 Variables aléatoires réelles quelconques

Pour chaque type de var (discrète ou à densité), il est possible de définir certaines propriétés comme l'indépendance, ou certains opérateurs, comme l'espérance ou la variance. Le paragraphe qui suit, définit des notions et énonce des propriétés, valables quelque soit le type de var étudiée.

12.2.1 Indépendance de var quelconques

Définition 12.7 (Indépendance).

Deux var X et Y sont indépendantes ssi $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])P([Y \in J])$, pour tous intervalles réels I et J .

Théorème 12.16.

Deux var X et Y sont indépendantes ssi pour tous réels x et y , on a :

$$P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P([X \leq x])P([Y \leq y])$$

Définition 12.8 (Indépendances mutuelles).

Les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes ssi pour tous intervalles $I_1, I_2, \dots, I_n$, on a : $P(\bigcap_{k=1}^n [X_k \in I_k]) = \prod_{k=1}^n P([X_k \in I_k])$.

Définition 12.9 (Indépendances d'une suite de var).

Une suite de var $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de var indépendantes lorsque, pour toute partie I de $\mathbb{N}$ et tous intervalles réels $(I_k)_{k \in I}$, on a : $P(\bigcap_{k \in I} [X_k \in I_k]) = \prod_{k \in I} P([X_k \in I_k])$.

Théorème 12.17 ([🔗 Lemme des coalitions](#)).

Si les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute var fonction de p d'entre elles ($p < n$) (ie de $X_1, X_2, \dots, X_p$) est indépendante de toute var fonction des $(n - p)$ autres (ie de $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$)

EXERCICE 12.8 ([🔗 Loi du Max](#)).

Déterminer la loi du maximum de 2 var indépendantes X et Y suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Indication : La var $S = \text{Max}(X, Y)$ est définie par : $\forall \omega \in \Omega, S(\omega) = \text{Max}(X(\omega), Y(\omega))$.

L'indépendance de X et Y , implique l'égalité très importante suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_S(x) = P(S \leq x) = P([X \leq x] \cap [Y \leq x]) = P([X \leq x])P([Y \leq x]) = F_X(x)F_Y(x).$$

(on utiliserait la même méthode pour déterminer la loi du Max de plus de 2 var).

EXERCICE 12.9 ([🔗 Loi du Min](#)).

Déterminer la loi du minimum de 2 var indépendantes X et Y suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs a et b (a et b étant des réels strictement positifs).

Indication : La var $T = \text{Min}(X, Y)$ est définie par : $\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \text{Min}(X(\omega), Y(\omega))$.

L'indépendance de X et Y , implique l'égalité très importante suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(T > x) = P([X > x] \cap [Y > x]) = P([X > x])P([Y > x]) = (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)).$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)).$$

(on utiliserait la même méthode pour déterminer la loi du Min de plus de 2 var).

12.2.2 Espérance

Théorème 12.18 (Linéarité).

Si les var X et Y admettent une espérance, alors $X + Y$ admet une espérance et on a :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Généralisation à n var :

Si les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ admettent une espérance, alors toute combinaison linéaire de ces var admet également une espérance, et on a :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \dots + a_n E(X_n).$$

Théorème 12.19 (Croissance de l'espérance).

Si les var X et Y admettent une espérance et si $P([X \leq Y]) = 1$ (ie que X prend presque sûrement des valeurs inférieures à celles que prend Y) alors $E(X) \leq E(Y)$.

Remarque.

Attention, il n'y a pas de réciproque!

Théorème 12.20 (🔗 **Espérance du produit de var indépendantes**).

Si les var X et Y admettent une espérance et si elles sont **indépendantes**, alors leur produit admet également une espérance et on a : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Théorème 12.21 (Généralisation à n var mutuellement indépendantes).

Si les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ admettent une espérance et si elles sont **mutuellement indépendantes** alors leur produit admet également une espérance et on a : $E(X_1.X_2 \dots X_n) = E(X_1).E(X_2) \dots E(X_n)$.

Définition 12.10 (Var centrée).

1. On dit que la variable X est centrée si $E(X) = 0$.
2. Si X est une var possédant une espérance, la variable $X - E(X)$ est appelée var centrée associée à X .

12.2.3 Variance

Théorème 12.22 (🔗 **Variance d'une somme de var indépendantes**).

Si les var X et Y admettent une variance et **sont indépendantes**, alors $X + Y$ admet une variance et on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Généralisation à n var :

Si les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ admettent une variance et sont **mutuellement indépendantes**, alors leur somme admet également une variance, et on a :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n).$$

Remarque.

Attention la variance n'est pas linéaire! Il faut que les var soient indépendantes pour appliquer les formules du théorème 12.22.

D'une façon générale, on a :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j).$$

Si on a pas l'indépendance les formules sont compliquées et non exigibles, elles doivent être données ou démontrées pour être utilisées dans un problème.

Théorème 12.23.

Si X est une var ayant une variance $V(x)$, alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ a une variance et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Définition 12.11 (Var réduite).

1. On dit que X est réduite si $\sigma(X) = 1 = V(X)$
2. Si $\sigma(X) \neq 0$ alors la variable $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X .
En effet, Y vérifie $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

12.3 Lois usuelles à densité

12.3.1 Lois uniformes

Loi uniforme sur $[a, b]$

Définition 12.12.

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\mathcal{U}([a, b])$:

si X a pour densité la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$, si $x \in [a, b]$ et 0 sinon.

Remarque.

Le support de X peut donc être égal à $[a, b]$.

Comme la probabilité $P(X = b)$ est nulle, on peut également considérer que $X(\Omega) = [a, b[$.

On peut alors décider sans risque qu'une densité d'une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{U}([a, b])$ ou $\mathcal{U}([a, b[)$ est la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$, si $x \in [a, b[$ et 0 sinon.

Théorème 12.24 (Fonction de répartition).

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$, est la fonction F définie

$$\text{pour tout réel } x, \text{ par : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Preuve.



Propriété 12.25 (Espérance).

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$ alors X possède une espérance donnée par

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Preuve.

**Propriété 12.26** (Variance).

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$ alors X possède une variance donnée par

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Preuve.

**Loi uniforme sur $[0, 1]$** **Définition 12.13.**

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\mathcal{U}([0, 1])$:

si X a pour densité la fonction f définie par : $f(x) = 1$, si $x \in [0, 1]$ et 0 sinon.

Remarque.

Le support de X peut donc être égal à $[0, 1]$.

Comme la probabilité $P(X = 1)$ est nulle, on peut également considérer que $X(\Omega) = [0, 1[$.

On peut alors décider sans risque qu'une densité d'une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$ ou $\mathcal{U}([0, 1[)$ est la fonction f définie par : $f(x) = 1$, si $x \in [0, 1[$ et 0 sinon.

Théorème 12.27 (Fonction de répartition).

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{U}([0, 1])$, est la fonction F définie

$$\text{pour tout réel } x, \text{ par : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Preuve.

**Propriété 12.28** (Espérance).

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([0, 1])$ alors X possède une espérance donnée par

$$E(X) = \frac{1}{2}.$$

Preuve.

**Propriété 12.29** (Variance).

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([0, 1])$ alors X possède une variance donnée par

$$V(X) = \frac{1}{12}.$$

Preuve.



Théorème 12.30 (Transformation affine de var uniformes).

Pour tout couple de réels (a, b) tel que $a < b$, on a : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \Leftrightarrow (b - a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$

EXERCICE 12.10.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable à densité, donner la loi de Y .

EXERCICE 12.11.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1, n + 1[$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ et on admet que Y est une variable aléatoire, reconnaître la loi de Y .

Commandes Python

```
rd.random() ou rd.rand() # loi uniforme sur [0,1]
(b-a)*rd.random()+a # loi uniforme sur [a,b]
```

12.3.2 Lois exponentielles

Loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$

Définition 12.14.

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ , noté $\varepsilon(\lambda)$, si une densité de X est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Remarques.

Le support de X peut donc être $\mathbb{R}_+$; mais on peut aussi considérer que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Une densité de X suivant la loi $\varepsilon(\lambda)$ peut être la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Théorème 12.31 (Fonction de répartition).

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\varepsilon(\lambda)$, est la fonction F définie

pour tout réel x , par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Preuve.



Propriété 12.32 (Espérance).

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\varepsilon(\lambda)$ alors X possède une espérance donnée par

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Preuve.



Propriété 12.33 (Variance).

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\varepsilon(\lambda)$ alors X possède une variance donnée par

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Preuve.



EXERCICE 12.12.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\varepsilon(\lambda)$. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable à densité, déterminer une densité de Y .

Caractérisation des lois exponentielles

Définition 12.15 (Variable sans vieillissement).

On dit qu'une variable aléatoire, à valeurs positives, est "sans mémoire" ou "sans vieillissement" si, pour tout couple (t, h) de réels positifs, on a : $P(X > t + h) = P(X > t)P(X > h)$.

Théorème 12.34.

Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle sont (mises à part la variable quasi-certaine égale à 0) les seules variables aléatoires positives sans mémoire.

Remarques.

Si $P(X > h) \neq 0$, la propriété d'absence de vieillissement s'écrit :

$$\forall (t, h) \in (\mathbb{R}_+^2), P_{(X>h)}(X > t + h) = P(X > t).$$

Cette égalité montre très bien pourquoi l'on parle d'absence de mémoire.

Les variables aléatoires suivant une loi géométrique vérifient cette propriété MAIS seulement pour t et h entiers naturels.

EXERCICE 12.13.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1, 2]$.

On pose $Y = \ln X$ et on admet que Y est une variable à densité, déterminer une densité de Y .

Propriété 12.35 (Transformation affine de var exponentielles).

$$\forall \lambda > 0, X \hookrightarrow \varepsilon(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda).$$

Preuve.



Propriété 12.36.

$$\forall \lambda > 0, \text{ si } X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \text{ alors } \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - X) \hookrightarrow \varepsilon(\lambda).$$

Preuve.



```
Commandes Python
rd.exponential(1/lambda) # loi exponentielle de paramètre lambda
- np.log(1-rd.random())/lambda # loi exponentielle de paramètre lambda d'après la
propriété 21.36
```

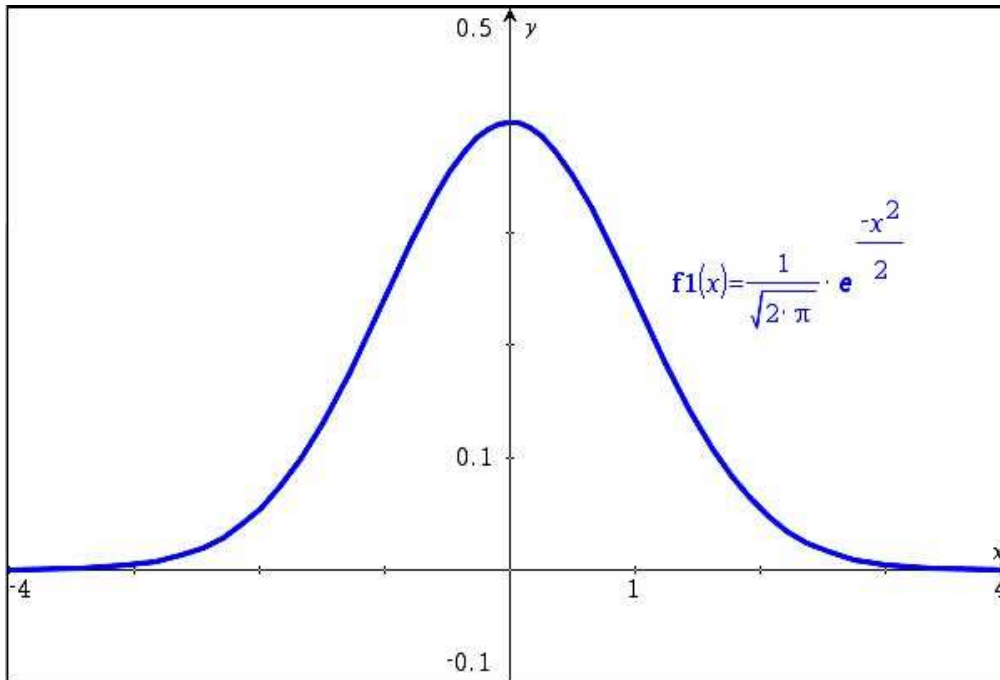
12.3.3 Lois normales

Loi Normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0, 1)$

Définition 12.16.

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, si une densité de X est la fonction φ définie

pour tout réel x par : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.



Remarque.

Le support de X est égal à $\mathbb{R}$.

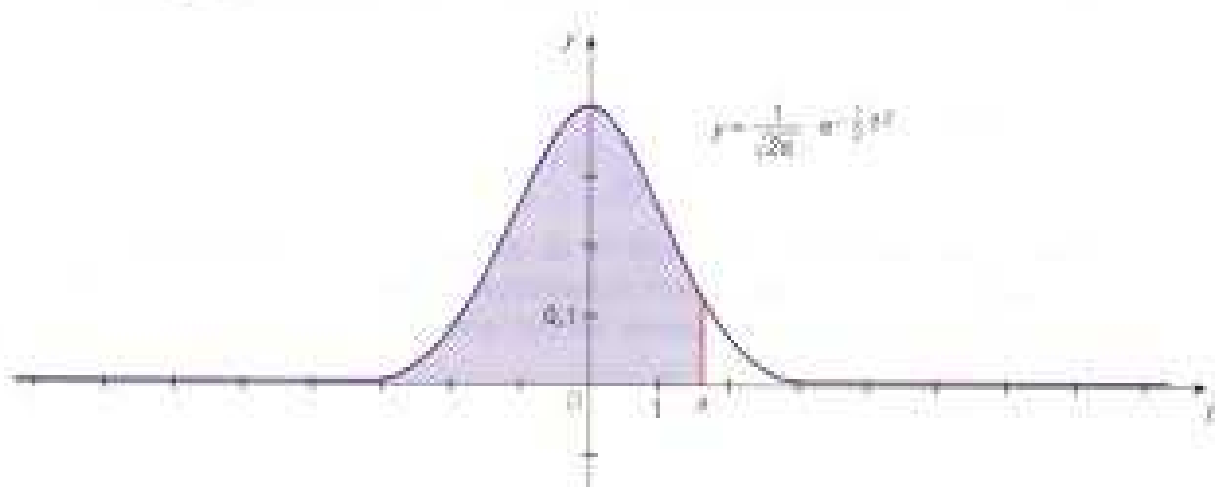
0 représente l'espérance et 1 représente l'écart type au carré $\sigma^2 = 1 = V(X)$.

Définition 12.17 (Fonction de répartition).

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, est la fonction notée Φ définie pour tout réel x , par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

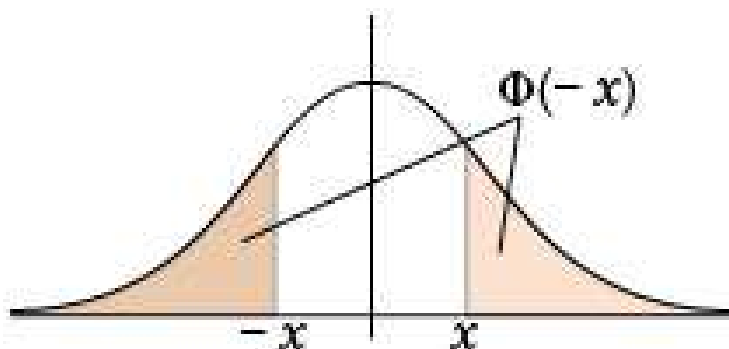
$P(T \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$. Cette intégrale est égale à l'aire hachurée ci-dessous.



Propriété 12.37.

Pour tout réel x , on a : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

En particulier : $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.



Remarque.

On ne sait pas expliciter Φ à l'aide des fonctions usuelles.

Propriété 12.38 (Espérance).

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors X possède une espérance donnée par $E(X) = 0$ et une variance donnée par $V(X) = 1$.

Preuve.

◇

EXERCICE 12.14.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = e^X$ et on admet que Y est une variable à densité, déterminer une densité de Y .

EXERCICE 12.15.

Montrer que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors $-X$ suit aussi la loi normale centrée réduite.

EXERCICE 12.16.

Montrer que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors

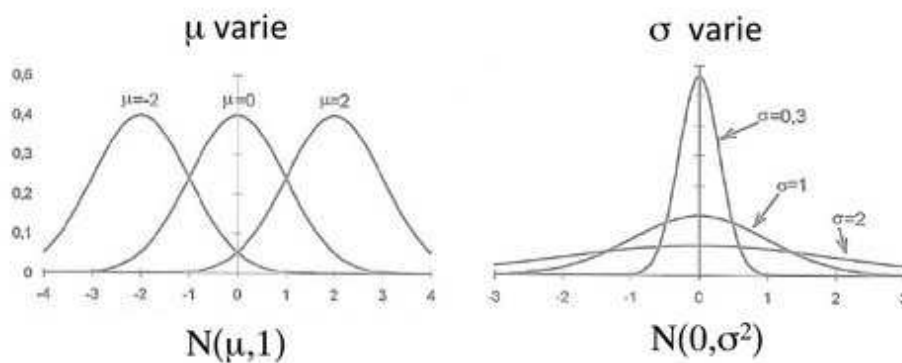
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Loi de Laplace-Gauss ou loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$ **Définition 12.18.**

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de paramètre σ , si une densité de X est la fonction $\varphi_{m,\sigma}$ définie pour tout réel x par : $\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Remarque.

Le support de X est aussi $\mathbb{R}$.



Remarque.

On ne sait pas expliciter $\Phi_{m,\sigma}$ à l'aide des fonctions usuelles.

Définition 12.19 (Fonction de répartition).

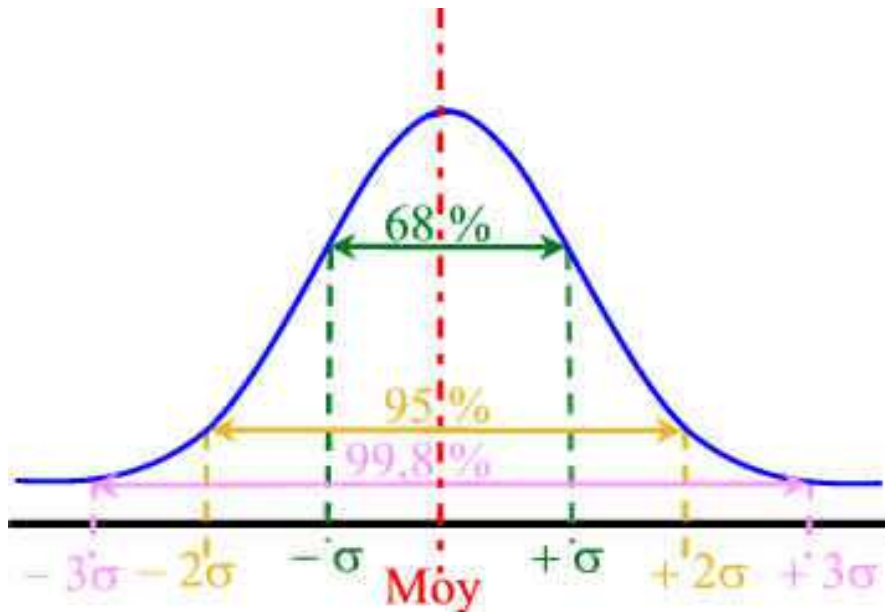
La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, est la fonction notée $\Phi_{m,\sigma}$ définie pour tout réel x , par :

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Propriété 12.39 (Changements de variables normales).

Pour tout réel m et pour tout réel $\sigma > 0$, on a :

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0, 1).$$

**Propriété 12.40** (Espérance et variance).

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X possède une espérance donnée par $E(X) = m$ et une variance donnée par $V(X) = \sigma^2$.

Preuve.

◇

Propriétés 12.41 (Somme de variables normales).

Si X_1 et X_2 sont deux var **indépendantes**, de lois normales respectives, $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, alors $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Généralisation :

Si n var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** et si, pour tout i de $[1, n]$,

$X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, alors $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$.

Propriétés 12.42 (Transformée affine de lois normales).

Toute transformation affine de X est encore une loi normale. Plus précisément, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(am + b, a^2 \sigma^2)$.

Preuve.

◇

Commandes Python

```
rd.normal(m,sigma) # loi normale de paramètres m et sigma^2
```

Tableau récapitulatif des lois usuelles : cas des variables aléatoires réelles continues

Loi	Support	Densité	Fonction de répartition	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$	$[a, b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$, si $x \in [a, b]$ 0 sinon	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle : $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda), \lambda > 0$ loi "sans mémoire" $\forall (t, h) \in \mathbb{R}_+^2$, $P(X > t + h) = P(X > t)P(X > h)$:	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale centrée réduite : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(0) = \frac{1}{2}$,	0	1
Normale ou de Gauss : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow$ $\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$	m	σ^2

Commandes Python

```
rd.random() ou rd.rand() # loi uniforme sur [0,1]
(b-a)*rd.random()+a # loi uniforme sur [a,b]
```

Commandes Python

```
rd.exponential(1/lambda) # loi exponentielle de paramètre lambda
- np/log(1-rd.random())/lambda # loi exponentielle de paramètre lambda d'après la
propriété 21.36
```

Commandes Python

```
rd.normal(m,sigma) # loi normale de paramètres m et sigma^2
```

Feuille d'exercices n°12

VARIABLES ALEATOIRES A DENSITE

Exercice 1. Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Soit $a : x \mapsto \begin{cases} \frac{6}{x^7} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$. Montrer que a est une densité de probabilité.

Exercice 2. Montrer qu'une fonction est une fonction de répartition d'une var à densité

1. Soit B une var définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition $F_B : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.
Montrer que la fonction F_B est une fonction de répartition d'une var à densité.
2. Soit $Lo : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$. Montrer que Lo est la fonction de répartition d'une certaine var à densité.
3. Soit $G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$. Montrer que G est la fonction de répartition d'une certaine var à densité.

Exercice 3. Trouver la fonction de répartition d'une certaine var X

1. Soit A une var définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont une densité est la fonction $a : x \mapsto \begin{cases} \frac{6}{x^7} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$. Déterminer F_A , la fonction de répartition de la var A .
2. Soit Z la var définie par l'égalité $Z = \ln(A)$, où A est la var à densité de la question précédente. Déterminer la fonction de répartition de la variable Z .
3. Soit O une var de fonction de répartition Lo définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ($Lo : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$).
Soit M la var définie par $M = |O|$. Expliciter F_M , la fonction de répartition de M .

4. Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on définit deux var indépendantes, de même densité a étudiée à l'exo 1. On note $I = \min(U, V)$ et $J = \max(U, V)$. Déterminer les fonctions de répartition des var I et J .

Exercice 4. Montrer qu'une var à densité

1. Montrer que la var $Z = \ln(A)$, où A est la var à densité étudiée à l'exo 3 – 1 est une var à densité.
2. Montrer que les var I et J définies à l'exo 3 – 3, sont des var à densité.
3. Soit X une var à densité définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Montrer que la var $Y = aX + b$ est une var à densité.

Exercice 5. Déterminer une densité d'une var à densité

1. Soit R une var définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant pour fonction de répartition $G: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Déterminer une densité de R .
2. Soit X une var de densité f_X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$, déterminer une densité de la var $aX + b$.

Exercice 6. Déterminer une espérance

1. Déterminer l'espérance de la var A étudiée à l'exo 3 – 1, qui admet pour densité la fonction $a: x \mapsto \begin{cases} \frac{6}{x^7} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.
2. Soit N une var de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer $E(|N|)$.
3. Soit λ un réel strictement positif, soit X une var de loi exponentielle de paramètre λ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer les valeurs du réel t pour lesquelles $E(e^{tX})$ existe et déterminer le cas échéant la valeur de cette espérance.
4. Soit X une var de loi exponentielle $\epsilon(1/2)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prouver que $E(\frac{1}{\sqrt{X}})$ existe et donner sa valeur.
5. Soit N une var de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Démontrer que la var $N + |N|$ admet une espérance et la calculer.
6. Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on définit X_1 et X_2 , deux var indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ tels que $0 \leq \lambda \leq \mu$. Soit $t \in]-\infty, \lambda[$. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $E(e^{t(X_1 + X_2)})$.

Exercice 7. Déterminer une variance

1. Soient N_1 et N_2 deux var indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que la var N_1 suit la loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et que la var N_2 suit la loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Déterminer l'espérance et la variance de la var $N_1 + N_2$. En déduire la loi suivie par la var $N_1 + N_2$.

2. Montrer que la var A étudiée à l'exo 3 – 1 qui admet pour densité la fonction

$$a : x \mapsto \begin{cases} \frac{6}{x^7} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases},$$
 admet une variance, dont on précisera la valeur.
3. La var C définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant comme densité la fonction $c :$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$
 admet-elle une variance?
4. Soit $\lambda > 0$ et soit X une var de loi exponentielle de paramètre λ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer, si elle existe, la valeur de $V(e^{tX})$.

Exercice 8. EML 2015

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs : $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$.
3. (a) soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$?
- (b) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ .

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ qui, à tout ω de Ω , associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+$, la probabilité $P(T_n \leq x)$.
- (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n .
5. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.
- (b) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de T_1 et l'espérance $E(T_2)$ de T_2 .
6. (a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.
- (b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx$.

- (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements :

$$(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a).$$

En déduire la probabilité $P(N = 0)$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$.
9. Déterminer l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$ de N .

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z , définie pour tout ω de Ω par :

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ Z(\omega) &= 0 & \text{si } N(\omega) = 0. \end{aligned}$$

10. Justifier : $P(Z \leq a) = 0$.
11. Soit $x \in]a; +\infty[$
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :
- $$\begin{aligned} ((N = n) \cap (Z \leq x)) &= (a < X_1 \leq X) & \text{si } n = 1 \\ ((N = n) \cap (Z \leq x)) &= (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x) & \text{si } n \geq 2 \end{aligned}$$
- En déduire la probabilité $P((N = n) \cap (Z \leq x))$.
- (b) Montrer alors : $P(Z \leq x) = 1 - e^{a-x}$.
12. (a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
- (b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $V(Z)$.

Exercice 9. EML 2008

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}$$

- (a) Montrer que h est une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$ et, pour tout $y \in [0; 1]$, exprimer $h^{-1}(y)$.
- (b) Déterminer deux réels α et β vérifiant : $\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \alpha + \frac{\beta}{2-x}$
- (c) Calculer $\int_0^1 h(x) dx$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$
- (a) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

- (b) Pour tout réel y de $[0; 1]$ déterminer la probabilité de l'événement $(\frac{X}{2-X} \leq y)$
- (c) Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2-X}$ admet une densité et déterminer une densité de Y .
- (d) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et déterminer -

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1, I_2, \dots, I_n$. Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t , les n événements $(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$, sont indépendants.

1. Soit un réel t appartenant à $[0; 1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon. On note $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$.
 - (a) Que modélise la variable aléatoire S_t ?
 - (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t .
2. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.
 - (a) Soit un réel t appartenant à $[0; 1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$
 - (b) Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.
3. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée. Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.

Exercice 10. EML 2012

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ est convergente.
2. (a) Rappeler une densité d'une variable aléatoire. qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2 .
En déduire : $I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- (b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$
En déduire : $I_1 = a^2$.
3. (a) Montrer, pour tout entier n , tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = -a^2 t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$$
- (b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $I_n = (n-1)a^2 I_{n-2}$.
- (c) Calculer I_2 et I_3 .

Exercice 11. ECRICOME 2010

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.
Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

6. Proposer un programme en Python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} .

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question I.5. On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq \alpha \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance $E(X)$.
3. Démontrer que pour $x > \alpha$:

$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$$

En déduire que l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Donner un encadrement de $E(X)$ par deux entiers consécutifs.

4. La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance?

Exercice 12. ECRICOME 2009

Liminaire.

Soient x un réel dans l'intervalle $[0, 1[$, n un entier naturel non nul et S_n la fonction définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

1. Calculer la somme $S_n(x)$.
2. Dériver l'égalité obtenue et montrer que :

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport.

Partie 1.

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X , exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.
2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes?
3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en annexe).
4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

- (a) On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.

Déterminer la loi de Y , donner sans calcul, son espérance et sa variance.

- (b) On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.

Déterminer en fonction de p la probabilité des événements $[Z = 0]$, puis $[Z = k]$ pour $1 \leq k \leq 10$.

Utiliser le liminaire pour calculer l'espérance de Z en fonction de p .

5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
 - Le premier jour, il prend le bus.
 - Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n + 1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
 - Si le jour n il prend le métro, le jour $n + 1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note p_n la probabilité de l'événement $A_n =$ "Monsieur Thurman prend le bus le jour n "

- (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right)p_n + \frac{1}{2}$$

- (b) Soit α le réel vérifiant :

$$\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)\alpha + \frac{1}{2}$$

Déterminer α en fonction de p , puis montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - \alpha) + \alpha$$

- (c) La suite (p_n) est-elle convergente? Si oui quelle est sa limite?

3.3. Partie 2.

1. Le nombre d'appels reçus par le standard d'une société de taxis pendant une période de durée t suit une loi de Poisson Y_t de paramètre λt , λ étant une constante strictement positive. Une origine de temps étant choisie, on note T la variable aléatoire réelle représentant le temps d'attente du premier appel vers ce standard. Par convention $P(T \leq t) = 0$ pour $t < 0$.
 - (a) Pour tout entier naturel k , rappeler la valeur de la probabilité de l'événement $[Y_t = k]$, ainsi que l'espérance et la variance de Y_t .
 - (b) Que peut-on dire des événements $[Y_t = 0]$ et $[T > t]$ pour $t > 0$. En déduire la probabilité des événements $[T > t]$ et $[T \leq t]$ pour $t > 0$.
 - (c) Expliciter la fonction de répartition F_T de T . Reconnaître la loi de T et donner son espérance et sa variance.
2. La durée, exprimée en heures, du transport d'un client par la société est une variable aléatoire U à densité dont une densité est donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = t e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- (a) Vérifier que g est bien une densité de probabilité.
- (b) Montrer que U admet une espérance que l'on déterminera. Que représente cette espérance?

Table

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

par exemple $\Phi(0,67) = 0,7486$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Exercice 13. ECRICOME 2006

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

2. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

3. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

(a) A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$ avec $A \geq 0$, prouver que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+2} = (n+1) I_n$$

(b) En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(voir preuve dans chap 12)

(c) Donner la valeur de I_1 . (voir preuve dans chap 12)

(d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} &= 2^n n! \end{aligned}$$

Exercice 14. ESSEC 2012

En psychologie, on s'intéresse à la façon dont un individu est amené à sélectionner une action quand un choix se présente entre différentes actions possibles. Ce choix peut être influencé par un grand nombre de facteurs impondérables, ce qui fait qu'il est légitime de le modéliser à l'aide de variables aléatoires. L'objet du problème est de présenter quelques éléments simples de la théorie des modèles de choix discret. Dans le modèle binaire le plus simple, le choix se fait en fonction de la réaction à un stimulus. Dans une première partie, on étudie la modélisation élémentaire de la réponse à un stimulus. Dans une deuxième partie, on considère une importante modélisation de choix dépendant du hasard, dit *modèle de Luce*, et on étudie ses propriétés. Enfin, dans une troisième partie, on regarde le cas où les différents choix possibles engendrent des réactions aléatoires et on étudie des propriétés de la réaction optimale. **Les trois parties sont indépendantes.**

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si elles existent, on note $E(T)$ et $V(T)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire T .

Modèles avec réponse discrète Soit α un réel (positif ou négatif) représentant un niveau de stimulus. On considère une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{R}$ représentant la tolérance de l'individu au stimulus en question. On considère donc que l'individu réagit si $X \leq \alpha$ et ne réagit pas si $X > \alpha$. On considère la variable aléatoire Y indicatrice de la réaction définie par

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq \alpha \\ 0 & \text{si } X > \alpha \end{cases}.$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

1. Déterminer la loi de Y , son espérance θ et sa variance.
2. On considère n individus dont on observe la réaction au stimulus. La tolérance de l'individu i est une variable aléatoire X_i dont on suppose qu'elle suit la même loi que X . En outre, les tolérances pour les différents individus sont supposées indépendantes. Soit N la variable aléatoire égale au nombre d'individus réagissant au stimulus. Déterminer la loi de N , son espérance et sa variance. Construire à l'aide de N un estimateur sans biais de θ .

Soient m un réel et σ un réel strictement positif.

On suppose que la tolérance X est obtenue comme résultante d'un "grand nombre" n de facteurs indépendants de petite taille c'est-à-dire $X = \sum_{i=1}^n X_i$, où les X_i sont supposées être des variables aléatoires de même loi d'espérance $\frac{m}{n}$ et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$.

- (a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X . Montrer que pour tout réel a ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

- (c) Le résultat précédent justifie que pour n grand on peut considérer que la variable aléatoire $\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. Trouver dans ce cas l'expression de θ en fonction de α , m et σ .

- (d) Déterminer $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \theta$ et interpréter le résultat.

3. Plutôt que d'utiliser la loi normale, on préfère souvent une loi plus simple dont on étudie dans cette question quelques propriétés. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall y \in \mathbb{R}, F(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}.$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. On dit alors que cette variable aléatoire suit la *loi logistique*.

4. On suppose que X suit une loi logistique. Déterminer θ .

On considère Z une variable aléatoire suivant la loi logistique.

5. Déterminer une densité de probabilité de Z .
6. Soit y un réel positif. Etablir une relation entre $F(y)$ et $F(-y)$.
7. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer.
8. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$.

Exercice 15. HEC 2012

Sous réserve d'existence, on note $E(U)$ et $V(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1; \dots; U_p$ sont indépendantes si pour tout p -uplet $(u_1; \dots; u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leq u_1]; \dots; [U_p \leq u_p]$ sont indépendants.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.

Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I . Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

1. (a) Montrer que la fonction f_λ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x)$.
 - (c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
 2. (a) Vérifier que la fonction $x \mapsto -e^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (b) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx$ et calculer sa valeur.
 - (c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.
 3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.
 - (a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.
 - (b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
 - (c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $E(Y^r)$.
 - (d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $E(Y^{r+1}) = (r+1)E(Y^r)$.
 - (e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $E(Y^r)$ et $E(X^r)$. En particulier, calculer $E(X)$ et $V(X)$.
 4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et de même loi que X .
- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 b_n = 0$.
- On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $M_n = \min_{1 \leq k \leq n} (X_k)$ et $J_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}$.
- On admet que M_n et J_n sont des variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
- Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 16. [EDHEC 2012] On désigne par λ , un réel strictement positif et on considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$.

1. (a) Montrer que f est paire.
- (b) Établir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et donner sa valeur.

- (c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$.
- (b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.
3. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge et donner sa valeur.
- (b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $V(X)$, et donner sa valeur.
4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
- (a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .
- (b) Déterminer une densité f_Y de Y , puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ .
- (c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $V(X)$.
5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$.
- (a) On pose $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que W est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W .
- (b) En déduire une fonction Python qui simule la loi de $|X|$.
Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.
En déduire une fonction Python, qui simule la loi de X .