
I	Convergence simple, convergence uniforme et convergence normale	3
II	Régularité de la somme d'une série de fonctions	10
II.1	Continuité de la somme d'une série de fonctions	10
II.2	Théorème de la double limite	11
II.3	Intégration terme à terme d'une série de fonctions	12
II.4	Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions	13

Extrait du programme

B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d’une suite, d’une série de fonctions et d’étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Modes de convergence d’une suite ou d’une série de fonctions	
Convergence simple d’une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l’espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d’une série de fonctions. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	Utilisation d’une majoration uniforme de $ f_n(x) $ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.
c) Régularité de la somme d’une série de fonctions	
Continuité de la somme d’une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I , alors sa somme est continue sur I . Théorème de la double limite : si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$ Intégration de la somme d’une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et : $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$ Dérivation de la somme d’une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d’autres intervalles adaptés à la situation. La démonstration est hors programme. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d’autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Convergence simple, convergence uniforme et convergence normale



Définition 13.1 – Convergence simple d'une série de fonctions

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** sur I lorsque la suite des sommes partielles

$\left(S_n = \sum_{k=0}^n f_k\right)$ converge simplement sur I vers S .

On dit alors que la fonction $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est la somme de la série de fonctions.



Méthode 13.1 – Rédaction de la convergence simple

La convergence simple est une convergence « point par point ».

Pour montrer la convergence simple d'une série de fonctions sur un intervalle I , on commence par fixer $x \in I$ (« Soit $x \in I$ »), puis on étudie la série numérique $\sum f_n(x)$.



Exemple 13.1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$, on pose $f_n(x) = x^n$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$ vers $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

En effet, pour tout $x \in]-1, 1[$, on sait que $x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc,

$$\sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

Soit $x > 1$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge car $x > 1$. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Cette fonction est appelée **fonction ζ de Riemann**.



Exercice 13.1

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

- On suppose les fonctions f_n croissantes sur I . Montrer que S est croissante sur I .
- On suppose les fonctions f_n positives sur I . Montrer que S est positive sur I .

Résolution

1. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x \leq y$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est croissante donc $f_k(x) \leq f_k(y)$.

En sommant les inégalités, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n f_k(x) \leq \sum_{k=0}^n f_k(y)$.

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, il vient $S(x) \leq S(y)$.

Donc,

S est croissante sur I .

2. Soit $x \in I$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est positive donc, $f_k(x) \geq 0$.

En sommant les inégalités, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n f_k(x) \geq 0$.

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, il vient $S(x) \geq 0$.

Donc,

S est positive sur I .



Exercice 13.2 – Équivalent de la fonction ζ en 1

Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1.

Résolution

 Idée à retenir : comparaison série/intégrale.

Soit $x > 1$ fixé.

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^x}$. Comme $x > 1$, la fonction f est décroissante positive et continue sur $[1, +\infty[$.

Donc, pour tout $n \geq 2$, (pourquoi ? Regardez bien la borne d'une des intégrales)

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{n^x} \stackrel{(**)}{\leq} \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt.$$

L'inégalité $(*)$ est encore valable pour $n = 1$. On somme $(*)$ de $n = 1$ à $n = N \geq 2$ et on somme $(**)$ de $n = 2$ à $n = N \geq 2$:

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{1}{t^x} dt.$$

Donc, en ajoutant le terme de la somme pour $n = 1$ dans la seconde inégalité :

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{t^x} dt.$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n^x}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ convergent (série et intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, en faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt.$$

Or,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{1}{(1-x) \times t^{x-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}.$$

Donc,

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Or, $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$, donc, $1 + \frac{1}{x-1} \sim \frac{1}{x-1}$.

Ainsi,

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

**Définition 13.2 – Convergence uniforme d’une série de fonctions**

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I lorsque la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S . Autrement dit, on a :

- À partir d’un certain rang, la fonction $S_n - S$ est bornée sur I .
- $\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque 13.1

On note $\|S_n - S\|_\infty = \|S_n - S\|_\infty = \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)|$.

Théorème 13.1

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I . On note S la somme, (S_n) la suite des sommes partielles et (R_n) la suite des restes de la série :

$$\forall x \in I, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x),$$

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers S si, et seulement si, la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (c’est-à-dire, à partir d’un certain rang les fonctions R_n sont bornées et $\|R_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.)

Démonstration

Pour tout $x \in I$, on a $|S_n(x) - S(x)| = |-R_n(x)| = |R_n(x)|$.

Donc, $\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in I} |R_n(x)| = \sup_{x \in I} |R_n(x) - 0|$.

Ainsi, la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur I vers S si, et seulement si, la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle. □

**Exercice 13.3 – Cas où le critère spécial des séries alternées s'applique**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n \times e^{-n \times x}}{n}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Résolution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Cas 1 : $x < 0$. Par croissance comparée, $|f_n(x)| = \frac{e^{-n \times x}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, le terme général de la série $\sum f_n(x)$ ne tend pas vers 0. Donc, cette série diverge grossièrement.

Cas 2 : $x \geq 0$.

On note $u_n = \frac{e^{-n \times x}}{n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.
- Par opérations sur les limites, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Soit $0 < n$. D'où, comme $x \geq 0$, $e^{-n \times x} \geq e^{-(n+1) \times x} > 0$ et $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} > 0$.

Donc, $u_n \geq u_{n+1}$. Donc, la suite (u_n) est décroissante.

Donc, par le critère spécial des séries alternées,

$\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la série $\sum u_n$ est alternée, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1} \leq \frac{e^{-(n+1) \times x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

La majoration trouvée ne dépend pas de x , donc,

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc,

$\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

**Définition 13.3 – Convergence normale d'une série de fonctions**

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur I lorsque :

- À partir d'un certain rang, la fonction f_n est bornée sur I .
- La série numérique $\sum \underbrace{\sup_{x \in I} |f_n(x)|}_{= \|f_n\|_\infty}$ converge.

**Méthode 13.2 – Rédaction : montrer la convergence normale d'une série de fonctions**

Pour montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement, on peut utiliser une des deux méthodes suivantes.

1. **avec la définition :** on fixe $n \in \mathbb{N}$, on calcule $\|f_n\|_\infty$, puis on vérifie que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
2. **avec les théorèmes de comparaisons :** On fixe $n \in \mathbb{N}$, on cherche $\alpha_n > 0$ tel que : pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, puis on vérifie que la série $\sum \alpha_n$ converge.
Important : α_n ne dépend pas de x (c'est un majorant de f_n).

💡 Exemple 13.2 – Convergence normale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(n \times x)}{n^2 + 1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 + 1}$.

Ce majorant ne dépend pas de x , donc, par définition de la borne supérieure, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{1 + n^2}$.

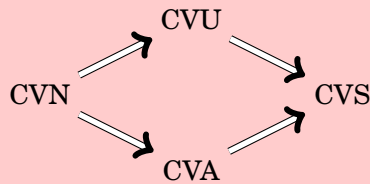
Or, $\frac{1}{1 + n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

⚙️ Théorème 13.2

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

1. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument (donc converge).
2. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I .
3. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .



Démonstration

1. On suppose que la série $\sum f_n$ converge normalement sur I . En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, les fonctions f_n sont bornées (on peut écrire $\|f_n\|_\infty$).
Soit $x \in I$. On a $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$.
Or, la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |f_n(x)|$ converge.
Autrement dit, la série $\sum f_n(x)$ converge absolument donc, converge.

2. On montré dans le point précédent que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |S_n(x) - S(x)| = \left| - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty.$$

Le majorant obtenu ne dépend pas de x , donc, par définition de la borne supérieure,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|S_n(x) - S(x)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty.$$

Or, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (reste d'une série convergente).

Par théorème de comparaison, $\|S_n(x) - S(x)\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I . Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

3. Soit $x \in I$ fixé.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x) - S(x)| \leq \|S_n(x) - S(x)\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par théorème de comparaison, $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x)$. Ceci est vrai pour tout $x \in I$, donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur I . □

💡 Exemple 13.3 – Suite de l'exemple précédent

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(n \times x)}{n^2 + 1}$.

La série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

📋 Méthode 13.3 – Rédaction : montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions

1. **Pour étudier la convergence uniforme sur I d'une série de fonctions (f_n) , on commence par étudier sa convergence simple.**

Pour cela, on fixe $x \in I$ et on étudie la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$.

Dans le cas où, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge, il y a convergence simple et on note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la limite simple de la série de fonctions (f_n) . C'est uniquement à ce moment qu'on se pose la question de la convergence uniforme.

2. Deux méthodes généralement utilisées :

- On commence par étudier la convergence normale sur I (où sur tout segment inclus dans I) de la série de fonctions $\sum f_n$.
- Le cas échéant, on peut aussi utiliser le critère spécial des séries alternées pour montrer directement la convergence uniforme

🗨 Remarque 13.2 – Les réciproques du théorème 13.2 sont fausses !

La convergence simple n'implique pas la convergence uniforme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = e^{-n \times x}$.

Soit $x > 0$, on a : pour tout $x \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (e^{-x})^n$.

Or, $x > 0$ donc $e^{-x} \in]0, 1[$, puis la série géométrique $\sum f_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$.

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et la somme de la série est la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{1 - e^{-x}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : pour tout $x > 0$,

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)}_{=S(x)} - \underbrace{\sum_{k=0}^n f_k(x)}_{=S_n(x)} = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}.$$

De plus, on a : $\sup_{x \in]0, +\infty[} |S_n(x) - S(x)| \geq \left| S_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - S\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| \geq \frac{e^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n+1}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

D'où, la suite $\left(\sup_{x \in]0, +\infty[} |S_n(x) - S(x)| \right)$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

La convergence uniforme n'implique pas la convergence normale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $u_n = \frac{1}{n + x^2}$:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \geq 0$.
- La suite u_n est décroissante.
- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S la somme de la série et (S_n) la suite des sommes partielles.

Par le critère spécial des séries alternées, on a aussi : $|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_{n+1}(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$.

Ce majorant ne dépend pas de x . Donc, par définition du sup, $0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par théorème d'encadrement $\sup_{x \in \mathbb{R}} |S(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(0)| = \frac{1}{n}$.

Or, la série harmonique diverge, donc la série $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge.

Ainsi, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

II. Régularité de la somme d'une série de fonctions

II.1. Continuité de la somme d'une série de fonctions

Théorème 13.3 – Continuité de la somme d'une série de fonctions

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

Si,

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ,
- (ii) la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

Alors, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I .

Démonstration

L'hypothèse (ii) se réécrit : la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S .

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur I comme somme de fonctions continues (hypothèse (i)).

Par théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, S est continue sur I . □

Remarque 13.3 – La continuité est une notion locale

L'hypothèse (ii) peut-être remplacée par : la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$,

Exemple 13.4 – Suite de l'exemple précédent

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(n \times x)}{n^2 + 1}$.

On a montré que la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

De plus, les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 13.5

Montrons que la fonction ζ de Riemann est continue sur $]1, +\infty[$.

On note, pour tous $n \geq 1$ et $x > 1$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

- La fonction f_n est continue sur $]1, +\infty[$ (composition de fonctions continues).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x > 1$, on a $|f_n(x)| = f_n(x)$

Soit un segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$. La fonction $|f_n|$ est décroissante sur $[a, b]$, donc, $\|f_n\|_{[a,b]}^\infty = \frac{1}{n^a}$.

Comme $a > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc, uniformément sur $[a, b]$.

Par théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, ζ est continue sur $[a, b]$.

Ceci est vrai pour tout $[a, b] \subset]1, +\infty[$.

Donc, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Remarque 13.4 – Montrer la non convergence uniforme

Par contraposée, on peut utiliser ce résultat pour montrer que la convergence d'une série de fonctions n'est pas uniforme.

II.2. Théorème de la double limite**Théorème 13.4 – Théorème de la limite double**

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

On considère a un point ou une extrémité de I (éventuellement $-\infty$ ou $+\infty$).

Si,

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n possède une limite finie notée ℓ_n en a ,
- (ii) la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

Alors, la série numérique $\sum \ell_n$ converge et la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ en a .

Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Démonstration

Admis

Exemple 13.6

Déterminons la limite de la fonction ζ de Riemann en $+\infty$.

On note, pour tous $n \geq 1$ et $x > 1$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

- On a :

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x > 1$, on a $|f_n(x)| = f_n(x)$

La fonction $|f_n|$ est décroissante sur $[2, +\infty[$, donc, $\|f_n\|_{[2, +\infty[}^\infty = \frac{1}{n^2}$.

Comme $2 > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc, uniformément sur $[2, +\infty[$.

Par théorème de la limite double

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

**Exercice 13.4**

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 \times x}$.

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Résolution

Intuition : on remarque que $\frac{1}{1+n^2 \times x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 \times x}$. À une constante multiplicative près, chaque terme de la somme de la série semble

avoir le même comportement asymptotique que $\frac{1}{x}$ **MAIS** on ne somme pas les équivalents ! Cependant, on peut s'intéresser à la limite

$$\text{de } \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = x \times f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+x \times n^2}.$$

Début de la rédaction.

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2 \times x}$.

On a $g_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$.

De plus, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \times n^2 > 0$, donc,

$$|g_n(x)| = \frac{x}{1+x \times n^2} \leq \frac{x}{x \times n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La majoration trouvée ne dépend pas de x , donc,

$$\|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$).

Donc, par théorème comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|g_n\|_\infty$ converge.

On en déduit que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $]0, +\infty[$.

Donc, par le théorème de la double limite,

$$x \times f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \times \frac{\pi^2}{6}.$$

II.3. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème 13.5 – Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Soient $a < b$ deux réels et (f_n) une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$.

Si,

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,

(ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[a, b]$, la série numérique $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge et :

$$\int_a^b S(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Démonstration

L'hypothèse (ii) se réécrit : la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers S .

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est continue comme somme de fonctions continues (hypothèse (i)), donc, $\int_a^b S_n(t) dt$ existe

Par théorème d'interversion limite-intégrale, $\int_a^b S_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S(t) dt$.

De plus, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(t) dt$.

On en déduit que la série $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge et que sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt$ □

💡 Exemple 13.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on a : $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$), donc par théorème de comparaison des séries à positifs, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$.

De plus, les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$.

Ainsi, par le théorème d'intégration terme à terme, la série $\sum \int_0^1 f_n(t) dt$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{n^2 + t^2} dt = \frac{1}{n} \times \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi,

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \times \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right).$$

🔍 Remarque 13.5

Ce théorème est à mettre en parallèle avec les résultats du chapitre INTÉGRALES À PARAMÈTRES.

II.4. Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

🔗 Théorème 13.6 – Dérivation terme à terme d'une série de fonctions

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

Si,

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- (ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ,
- (iii) la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur I .

Alors, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Autrement dit, pour tout $x \in I$,

$$\frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right).$$

Démonstration

L'hypothèse (ii) se réécrit : la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I vers S .

Par opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction S_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (hypothèse (i)) et $S'_n = \sum_{k=0}^n f'_k$.

L'hypothèse (iii) se réécrit : la suite de fonctions (S'_n) converge uniformément sur I vers $g : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$.

Ainsi, en utilisant le théorème de dérivation de la somme d'une suite de fonctions, la fonction S' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

□

Remarque 13.6 – La dérivabilité est une notion locale

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par : la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers g .

En effet, par le théorème, on peut conclure que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans I donc sur I .

Exemple 13.8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \times \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Montrons que la somme de la série de fonction $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, 1[$.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, 1[$ (fonction polynomiale) et, pour tout $x \in] - 1, 1[$, $f'_n(x) = (-1)^n \times x^n$.

► Soit $x \in] - 1, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq |f'_n(x)| \leq |x|^n$.

Or, $|x| \in]0, 1[$, donc la série géométrique $\sum |x|^n$ converge.

Par théorème de comparaison, la série $\sum f'_n(x)$ converge absolument, donc converge. Ceci est vrai pour tout $x \in] - 1, 1[$.

Donc, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $] - 1, 1[$.

► Soit $a \in [0, 1[$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on a $|f'_n(x)| \leq a^n$.

Donc, par définition de la borne supérieure, $\sup_{x \in [-a, a]} |f'_n(x)| \leq a^n$.

Or, $a \in [0, 1[$, donc la série géométrique $\sum a^n$ converge. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \sup_{x \in [-a, a]} |f'_n(x)|$ converge.

D'où, la série $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$. Ceci est vrai pour tout $a \in [0, 1[$.

Donc, la série $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $] - 1, 1[$.

Ainsi, par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, 1[$, et

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Allons plus loin :

On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in] - 1, 1[$, $S(x) = \ln(1+x) + C$.

Or, $S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{0^{n+1}}{n+1} = 0$. Donc, $C = 0$, puis

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad S(x) = \ln(1+x).$$

Théorème 13.7 – Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

Si,

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,

(ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$,

(iii) pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ,

(iv) la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Alors, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\forall x \in I, \quad S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x).$$

Démonstration

Appliquer à la suite des sommes partielles (S_n) l'extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ du théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions. $\square$

Théorème 13.8 – Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

Si,

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ,
- (ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$,
- (iii) pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction $g_j : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Alors, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in I, \quad S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x).$$

Démonstration

Conséquence immédiate du corollaire précédent. $\square$

Exemple 13.9 – Classique : la fonction ζ de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

On a montré que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (fonction ζ de Riemann).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

Soit $k \geq 1$. Soit $a > 1$ quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$.

De plus, par croissances comparées, en prenant $b \in]1, a[$ (par exemple $b = \frac{1+a}{2}$), on a : $\frac{(\ln(n))^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^b}\right)$.

Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^b}$ converge (car $b > 1$), donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \left(\sup_{[a, +\infty[} |f_n^{(k)}| \right)$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Ceci est vrai pour tout $a > 1$.
D'où, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $]1, +\infty[$.
Ainsi, par le théorème de dérivation, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.