

CHAPITRE 12

ENSEMBLES DÉNOMBRABLES, FAMILLES SOMMABLES

I	Ensembles finis	3
I.1	Applications injectives, surjectives, bijectives	3
I.2	Généralités sur les ensembles finis	4
I.3	Opérations sur les cardinaux	5
I.4	Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre	9
I.5	Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini	9
II	Ensembles dénombrables	11
III	Introduction aux familles sommables	16
IV	Dénombrement	23
IV.1	Liste de longueur p	23
IV.2	Arrangement de longueur p	24
IV.3	Combinaison de longueur p	25

Extrait du programme

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.

Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\sum_{i \in I} x_i \in [0, +\infty]$, et que pour tout découpage en paquets

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ de } I, \quad \sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right).$$

La famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i \in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille $(x_i)_{i \in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i \in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leq y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i \in I}$ implique celle de $(x_i)_{i \in I}$.

En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

I. Ensembles finis

I.1. Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 12.1 – Application injective, surjective et bijective

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application.

- On dit que f est **injective** sur E , ou que f est une injection sur E lorsque : pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$,

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- On dit que f est **surjective** de E sur F , ou que f est une surjection de E sur F lorsque :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

Autrement dit, $f(E) = F$.

- On dit que f est **bijective** de E sur F (ou que f est une bijection de E sur F) lorsque f est injective sur E et f est surjective de E sur F .

Théorème 12.1 – Caractérisations

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est **injective** sur E .
2. tout élément de F possède **au plus un antécédent** par f .
3. pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, possède **au plus une solution dans E** .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est **surjective** de E sur F
2. tout élément de F possède **au moins un antécédent** par f .
3. pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, possède **au moins une solution dans E** .
4. $f(E) = F$. Autrement dit, l'image de f est F .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est **bijective** de E sur F
2. tout élément de F possède **exactement un antécédent** par f .
3. pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$, possède **exactement une solution dans E** .
4. $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

Définition 12.2 – Bijection réciproque

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une bijection de E sur F .

La **(bijection) réciproque** de f est l'application notée $f^{-1} \in \mathcal{F}(F, E)$ et définie par

$$\begin{aligned} F &\rightarrow E \\ y &\mapsto \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f. \end{aligned}$$

 Théorème 12.2

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

L'application f est une bijection de E sur F si, et seulement si, il existe une application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

De plus, lorsque f est bijection, alors g est unique et $g = f^{-1}$.

I.2. Généralités sur les ensembles finis **Définition 12.3 – Ensemble fini**

- Soit E un ensemble non vide.
On dit que E est **fini** s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E . Dans ce cas, l'entier n est appelé le **cardinal de E** et on le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.
- Par convention on dit que l'ensemble vide est fini et que son cardinal vaut 0.
- Un ensemble qui n'est pas fini est dit **infini**.

 Remarque 12.1

1. Un singleton est un ensemble fini de cardinal 1.
2. L'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal nul.
3. Le cardinal d'un ensemble fini est aussi appelé son **nombre d'éléments**.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est fini de cardinal n .
5. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, avec $p \leq q$, l'ensemble $\llbracket p, q \rrbracket$ est fini de cardinal $q - p + 1$.

En effet, l'application : $f : \llbracket 1, q - p + 1 \rrbracket \rightarrow \llbracket p, q \rrbracket$ est une bijection.

$$x \mapsto x + p - 1$$

 Définition 12.4 – Fonction indicatrice

Soient E un ensemble et A une partie de E .

La **fonction indicatrice de A** est la fonction notée $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ et définie, pour tout $x \in E$, par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Cette application caractérise l'appartenance d'un élément à A : $x \in A$ si, et seulement si, $\mathbb{1}_A(x) = 1$.

 Proposition 12.1

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . Alors,

- $\mathbb{1}_E$ est la fonction constante égale à 1 ;
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$;
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$;
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

Théorème 12.3

Soit E un ensemble fini.

- Toute partie A de E est finie et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$.
- Soit $A \subset E$. On a :

$$E = A \iff \text{Card}(E) = \text{Card}(A).$$

Exemple 12.1 – L'ensemble $\mathbb{N}$ est infini

Par l'absurde, supposons $\mathbb{N}$ de cardinal fini n . On sait que $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \subset \mathbb{N}$. Par la proposition précédente,

$$n+1 = \text{Card}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) \leq \text{Card}(\mathbb{N}) = n.$$

Contradiction.

Remarque 12.2

La contraposée de la proposition précédente donne : si $A \subset E$ et A est infini, alors E est infini.

Remarque 12.3

Soit E un ensemble fini. Si A est une partie E , alors

$$\text{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x).$$

Théorème 12.4

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

- Si f est bijective et l'un des ensembles E ou F est fini, alors l'autre est fini et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.
- Si f est injective et F est fini, alors E est fini et $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
- Si f est surjective et E est fini, alors F est fini et $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.

Théorème 12.5 – Ensembles finis et applications

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \rightarrow F$ une application.

L'application f est bijective si, et seulement si, f est injective si, et seulement si, f est surjective.

I.3. Opérations sur les cardinaux**Théorème 12.6**

Soient A et B deux ensembles finis. Alors, $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Démonstration

On sait que : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$. Donc,

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x).$$

En sommant les égalités pour tous les $x \in E$, on obtient l'égalité voulue. □

Théorème 12.7

Soient A et B deux ensembles finis et **disjoints** ($A \cap B = \emptyset$). Alors, $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Corollaire 12.1

Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ des ensembles finis, deux à deux disjoints. Alors, $\bigcup_{i=1}^p A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$ est fini et

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(A_i).$$

Démonstration

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}_p$: « Si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont des ensembles finis, deux à deux disjoints, alors $\bigcup_{i=1}^p A_i$ est fini et

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(A_i). »$$

Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_1$ est claire et on a déjà montré $\mathcal{H}_2$ (On aura besoin de $\mathcal{H}_2$ pour l'hérédité).

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_p$ et on montre $\mathcal{H}_{p+1}$.

Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ et A_{p+1} des ensembles finis, deux à deux disjoints.

Par hypothèse de récurrence, l'ensemble $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$ est fini. De plus, les ensembles $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$ et A_{p+1} sont disjoints.

Donc, en utilisant $\mathcal{H}_2$, l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i$ est fini et :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right) = \text{Card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \cup A_{p+1}\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) + \text{Card}(A_{p+1}).$$

Puis, par hypothèse de récurrence,

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(A_i) + \text{Card}(A_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \text{Card}(A_i).$$

Ce qui achève la récurrence. □

Théorème 12.8

Soit A une partie d'un ensemble fini E . On note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E . Alors

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

Démonstration

Les ensembles A et $\bar{A}$ sont disjoints et $E = A \cup \bar{A}$. □

Théorème 12.9

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E . Alors

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B).$$

De plus, si $B \subset A$, alors,

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B).$$

Démonstration

Les ensembles $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont disjoints et $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
De plus, lorsque $B \subset A$, alors $A \cap B = B$.

□

**Exercice 12.1**

1. Soient A, B et C trois ensembles finis. Montrer que :

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$

2. Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ des ensembles finis. Montrer que $\bigcup_{i=1}^p A_i$ est fini et :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \text{Card}(A_i).$$

Résolution

1. On sait que les ensembles A et B sont finis, donc l'ensemble $A \cup B$ est fini. Puis, comme C est fini, $A \cup B \cup C$ est fini. De plus,

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}((A \cup B) \cup C) \\ &= \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cup B) \cap C). \end{aligned}$$

Or,

$$\text{Card}((A \cup B) \cap C) = \text{Card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap C \cap B \cap C).$$

Or, $A \cap C \cap B \cap C = A \cap B \cap C$. Ainsi,

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}_p$: « Si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont des ensembles finis, alors $\bigcup_{i=1}^p A_i$ est fini et $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \text{Card}(A_i)$. »

Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_1$ est claire.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_p$ et on montre $\mathcal{H}_{p+1}$. Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ et A_{p+1} des ensembles finis. Par hypothèse de récurrence, l'ensemble $\bigcup_{i=1}^p A_i$ est fini et on a :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) + \text{Card}(A_{p+1}) - \text{Card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \cap A_{p+1}\right) \leq \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) + \text{Card}(A_{p+1}).$$

Puis, par hypothèse de récurrence,

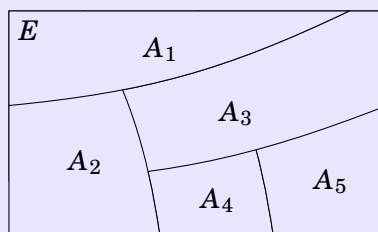
$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p+1} \text{Card}(A_i).$$

Ce qui achève la récurrence.

**Définition 12.5 – Partition**

Soit E un ensemble. Une **partition de E** est une famille $(A_1, \dots, A_p)$ de parties de E telle que :

1. pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $A_i \neq \emptyset$;
2. pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$;
3. et $E = \bigcup_{i=1}^p A_i$.



 Proposition 12.2

Soient E un ensemble fini et $(A_1, \dots, A_p)$ une partition de E . Alors,

$$\text{Card}(E) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(A_i).$$

 Théorème 12.10

Soient E et F deux ensembles finis. Alors, $E \times F$ est fini et,

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

 Remarque 12.4 – Dénombrement

On retrouve ce résultat par un argument de dénombrement. Les éléments de $E \times F$ sont les éléments de la forme (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.

Il y a alors $\text{Card}(E)$ choix pour a , et pour chaque choix de a , il y a $\text{Card}(F)$ choix pour b .

Au total, il y a $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ couples formés d'un élément de E et d'un élément de F .

Corollaire 12.2

Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$ des ensembles finis. Alors, $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est fini et,

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_p).$$

Corollaire 12.3

Soit E un ensemble fini. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, E^p est fini et,

$$\text{Card}(E^p) = (\text{Card}(E))^p,$$

où $E^p = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}.$

I.4. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre

Théorème 12.11

Soient E et F deux ensembles finis. L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$, des applications de E dans F , est fini et

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}.$$

Démonstration

On note p le cardinal de E et $x_1, \dots, x_p$ les éléments de E . On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}(E, F) &\rightarrow F^p \\ f &\mapsto (f(x_1), \dots, f(x_p)). \end{aligned}$$

Une application $f : E \rightarrow F$ est déterminée de manière unique par son action sur les éléments de E . Donc, l'application φ est une bijection de $\mathcal{F}(E, F)$ sur F^p . Or F est fini, donc F^p est fini.

D'où, par théorème, $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et :

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F^p) = (\text{Card}(F))^p = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}.$$

□

Remarque 12.5

Le théorème précédent justifie la notation : $\mathcal{F}(E, F) = F^E$.

Remarque 12.6 – Dénombrement

On retrouve ce résultat par un argument de dénombrement. Les éléments de $\mathcal{F}(E, F)$ sont les fonctions $f : E \rightarrow F$. Pour définir une telle fonction, il suffit de préciser l'image qu'elle donne à tout élément de E .

Pour chaque élément x de E , il y a $\text{Card}(F)$ images $f(x)$ possibles.

Donc, il y a

$$\underbrace{\text{Card}(F) \times \dots \times \text{Card}(F)}_{\text{Card}(E) \text{ fois}} = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$$

fonctions de E dans F

I.5. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Définition 12.6 – Parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E :

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}.$$

Exemple 12.2

Si $E = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Théorème 12.12

Soit E un ensemble fini. Alors,

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

Remarque 12.7 – Dénombrement

On retrouve ce résultat par un argument de dénombrement. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont les parties de E .

Pour définir une telle partie, il suffit de préciser si un élément de E appartient ou non à la partie.

Pour chaque élément x de E , il y a 2 possibilités : $x \in E$ ou $x \notin E$.

Donc, il y a

$$\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{\text{Card}(E) \text{ fois}} = 2^{\text{Card}(E)}$$

parties de E .

II. Ensembles dénombrables



Définition 12.7 – Ensemble dénombrable

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur E .

Remarque 12.8

- Soit E un ensemble dénombrable et φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \varphi(n)$.
On peut alors écrire $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Autrement dit,

un ensemble dénombrable est un ensemble dont on peut numéroter (étiqueter) chacun de ses éléments à l'aide des entiers naturels.

- Un ensemble dénombrable est infini.
- Si E et F sont en bijection et E est dénombrable, alors F est dénombrable.

Exemple 12.3

L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable. En effet $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$


Exercice 12.2

Montrer que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Résolution

Considérons l'application : $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

- Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, alors $n_1 + 1 = n_2 + 1$, donc $n_1 = n_2$.
D'où, φ est injective.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n - 1 \in \mathbb{N}$ et $\varphi(n - 1) = n$.
D'où, φ est surjective.
- Donc, φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$. Ainsi, $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.



Exercice 12.3

Montrer que $2\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers pairs, est dénombrable.

Résolution

Considérons l'application : $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

- Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, alors $2n_1 = 2n_2$, donc $n_1 = n_2$.
D'où, φ est injective.
- Pour tout $n \in 2\mathbb{N}$, $m = \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ et $\varphi(m) = 2m = n$.
D'où, φ est surjective.
- Donc, φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N}$. Ainsi, $2\mathbb{N}$ est dénombrable.

**Exercice 12.4**

Soient E un ensemble dénombrable et F un ensemble. On suppose que E et F sont en bijection. Montrer que F est dénombrable.

Résolution

Comme E est dénombrable, on sait qu'il existe φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur E .

De plus, E et F sont en bijection, donc il existe ψ une bijection de E sur F .

Or, la composée de deux bijections est une bijection, donc $\psi \circ \varphi$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur F .

Ainsi, F est dénombrable.

**Définition 12.8 – Ensemble au plus dénombrable**

On dit qu'un ensemble est **au plus dénombrable** lorsqu'il est fini ou dénombrable.

**Théorème 12.13**

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration

On considère l'application : $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$n \rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

► Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On procède par disjonction de cas :

- Cas 1 : n est pair, alors $\varphi(n) = \frac{n}{2} \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Cas 2 : n est impair, alors $n+1$ est pair et $\varphi(n) = -\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}_{-}^{*} \subset \mathbb{Z}$.

Dans tous les cas $\varphi(n) \in \mathbb{Z}$. Donc, φ est bien définie.

► Montrons que φ est injective sur $\mathbb{N}$.

Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$. On procède par disjonction de cas :

- Cas 1 : $\varphi(n_1) \geq 0$. D'après la définition de φ ceci ne peut se produire que si n_1 est pair. Donc $\varphi(n_1) = \frac{n_1}{2}$. De plus, comme $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, on en déduit de même que $\varphi(n_2) \geq 0$ et $\varphi(n_2) = \frac{n_2}{2}$. D'où, $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$ implique $n_1 = n_2$.
- Cas 2 : $\varphi(n_1) < 0$. D'après la définition de φ ceci ne peut se produire que si n_1 est impair. Donc $\varphi(n_1) = -\frac{n_1+1}{2}$. De plus, comme $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, on en déduit de même que $\varphi(n_2) < 0$ et $\varphi(n_2) = -\frac{n_2+1}{2}$. D'où, $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$ implique $n_1 = n_2$.

Dans les deux cas, si $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$ alors $n_1 = n_2$.

D'où, φ est injective sur $\mathbb{N}$.

► Montrons que φ est surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(N) = n$. On procède par disjonction de cas :

- Cas 1 : $n \geq 0$. On a : $\varphi(2n) = n$. Donc $N = 2n \in \mathbb{N}$ convient.
- Cas 2 : $n < 0$. On a : $\varphi(-2n-1) = n$. De plus, $N \in \mathbb{N}$ car $n < 0$. Donc $N = -2n-1 \in \mathbb{N}$ convient.

Dans tous les cas, on a trouvé un entier naturel N tel que $\varphi(N) = n$.

D'où, φ est surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Donc, la fonction φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\mathbb{Z}$ est dénombrable. □

Lemme 12.1

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Démonstration

On considère l'application $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$

$$(p, q) \rightarrow 2^p \times (2q + 1).$$

► Montrons que g est injective.

Soient $(p_1, q_1) \in \mathbb{N}^2$ et $(p_2, q_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $g(p_1, q_1) = g(p_2, q_2)$. Quitte à renommer les couples, on peut supposer $p_1 \geq p_2$. On a alors

$$2^{p_1-p_2} \times (2q_1 + 1) = 2q_2 + 1.$$

D'où, l'entier $2^{p_1-p_2} \times (2q_1 + 1)$ est impair. Donc $p_1 = p_2$ (sinon $p_1 > p_2$ et l'entier $2^{p_1-p_2} \times (2q_1 + 1)$ est pair). Il vient alors $2q_1 + 1 = 2q_2 + 1$, donc $q_1 = q_2$. D'où $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$.

Donc, g est injective sur $\mathbb{N}^2$.

► Montrons que g est surjective. Pour cela, on montre par récurrence forte que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p \times (2q + 1)$.

On note $\mathcal{H}_n$: « il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p \times (2q + 1)$ ».

Initialisation. Si $n = 1$ alors le couple $(p, q) = (0, 0)$ convient.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{H}_n$ et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

On procède par disjonction de cas.

Cas 1 : si n est impair alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2N + 1$ et le couple $(0, N)$ convient.

Cas 2 : si n est pair alors $\frac{n}{2}$ est un entier strictement inférieur à n . On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

tel que $\frac{n}{2} = 2^p \times (2q + 1)$. Donc, $n = 2^{p+1} \times (2q + 1)$ et le couple $(p + 1, q)$ convient.

Donc, $\mathcal{H}_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p \times (2q + 1) = g(p, q)$.

Donc, g est surjective.

Ainsi, g est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

Comme $\mathbb{N}^*$ est dénombrable, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. □

Remarque 12.9

On peut aussi montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{N}^* \\ (p, q) & \rightarrow & \frac{(p+q) \times (p+q+1)}{2} + q. \end{array}$ est une bijection. L'« étiquetage » des éléments de $\mathbb{N}^2$ est alors :

Théorème 12.14

Soient E_1 et E_2 deux ensembles dénombrables, alors $E_1 \times E_2$ est dénombrable.

Démonstration

On sait que E_1 et E_2 sont dénombrables donc il existe φ_1 et φ_2 des bijections de E_1 sur $\mathbb{N}$ et de E_2 sur $\mathbb{N}$ respectivement.

On considère les applications $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & E_1 \times E_2 \\ (p, q) & \mapsto & (\varphi_1(p), \varphi_2(q)). \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (\varphi_1^{-1}(x), \varphi_2^{-1}(y)). \end{array}$.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\psi \circ \varphi(p, q) = \psi(\varphi_1(p), \varphi_2(q)) = (\varphi_1^{-1}(\varphi_1(p)), \varphi_2^{-1}(\varphi_2(q))) = (p, q).$$

De même, pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$,

$$\varphi \circ \psi(x, y) = \varphi(\varphi_1^{-1}(x), \varphi_2^{-1}(y)) = (\varphi_1(\varphi_1^{-1}(x)), \varphi_2(\varphi_2^{-1}(y))) = (x, y).$$

Donc, $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{N}^2}$ et $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{E_1 \times E_2}$.

Ainsi, φ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $E_1 \times E_2$. De plus, par le lemme précédent, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$. Or, une composée d'applications bijectives est bijective, donc il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E_1 \times E_2$. Ainsi, $E_1 \times E_2$ est dénombrable. □

Remarque 12.10

En appliquant par récurrence la proposition précédente, on montre que le produit cartésien de $n \in \mathbb{N}^*$ ensembles dénombrables est dénombrable.

Exemple 12.4

- Les ensembles $\mathbb{N}^n$ et $\mathbb{Z}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont dénombrables.
- L'ensemble E des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}^{n^2}$. Donc, E est dénombrable.

Théorème 12.15

Soit I un ensemble au plus dénombrables et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dénombrables. Alors, l'union $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Démonstration

Cas 1 : $I = [1, p]$ est fini.

On peut numéroter les éléments de $\bigcup_{i \in I} A_i$ de la manière suivante : on commence par un élément de A_1 , puis de A_2 , ..., puis de A_p ; puis on recommence avec un élément de A_1 , ...

Cas 2 : $I = \mathbb{N}$ est dénombrable.

On peut numéroter les éléments de $\bigcup_{i \in I} A_i$ de la manière suivante :

- on numérote un élément de A_1 ;
- puis, on numérote un élément de A_1 , puis de A_2 ;
- puis, on numérote un élément de A_1 , puis de A_2 , puis de A_3 ;
- ...

Remarque 12.11

- Une union finie d'ensembles finis est finie et, par conséquent, est au plus dénombrable.
- On peut adapter la démonstration précédente au cas où les A_i sont au plus dénombrables.

On dit qu'une union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Théorème 12.16

Soit E un ensemble dénombrable et $A \subset E$ une partie de E . Alors, A est au plus dénombrable.

Remarque 12.12 – Il existe des ensembles non dénombrables

Montrons par l'absurde que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

On suppose que $[0, 1[= \{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit x_n en écriture décimale propre : $x_n = 0, x_n^1 x_n^2 x_n^3 \dots x_n^n \dots$ (les x_n^k ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang). Cette écriture est unique.

Écrivons les nombres x_n les uns en dessous les autres :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, \boxed{x_1^1} x_1^2 x_1^3 \dots x_1^n \dots \\ x_2 & = & 0, x_2^1 \boxed{x_2^2} x_2^3 \dots x_2^n \dots \\ x_3 & = & 0, x_3^1 x_3^2 \boxed{x_3^3} \dots x_3^n \dots \\ & \vdots & \\ x_n & = & 0, x_n^1 x_n^2 x_n^3 \dots \boxed{x_n^n} \dots \\ & \vdots & \end{array}$$

On considère $y = 0, y^1 y^2 y^3 \dots y^n \dots$ où

$$y^i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i^i \neq 0 \\ 1 & \text{si } x_i^i = 0 \end{cases}$$

Par construction $y \in [0, 1[$ et, comme l'écriture décimale propre d'un réel est unique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \neq y$. Contradiction.

On en déduit que :

$\mathbb{R}$ est non dénombrable.

On montre de la même manière que l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de 0 et 1 est non dénombrable.



Histoire des mathématiques

L'idée mise en place dans la démonstration précédente est connue sous le nom de d'argument de la diagonale de CANTOR (Mathématicien allemand, 1845-1918). Cet argument permet de démontrer le théorème de Cantor : pour E un ensemble (fini ou infini), il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$. Ce théorème implique l'existence d'une infinité d'infinis. C'est le début de la théorie des ordinaux.

Deux vidéos sur le sujet :

- <https://www.arte.tv/fr/videos/097454-005-A/voyages-au-pays-des-maths/>
- <https://youtu.be/e6uLDvUUs8A>

III. Introduction aux familles sommables

Remarque 12.13 – Somme d'un réel avec $+\infty$

Pour tout nombre réel a , on pose $a + (+\infty) = +\infty$. Dans la suite, on note $[0, +\infty]$ l'ensemble $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Définition 12.9 – Famille de réels positifs ou nuls sommable

Soient I un ensemble au plus dénombrable et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par I .

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** lorsque l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ est majoré.

Dans ce cas, on note

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}.$$

Lorsque $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ n'est pas majoré, la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable. On pose alors

$$\sum_{i \in I} u_i = +\infty.$$

Remarque 12.14

L'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ est constitué de toutes les sommes pouvant être obtenues en ajoutant des éléments de la famille $(u_i)_{i \in I}$.

Lorsque qu'un des u_i est égal à $+\infty$, alors $+\infty \in \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ et la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Exemple 12.5

1. Considérons la famille finie $(u_i)_{i \in [1,3]}$ où $u_1 = 1$, $u_2 = 5$ et $u_3 = 9$.

Alors, l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset [1,3] \text{ et } J \text{ est fini} \right\} = \{0, 1, 5, 9, 6, 10, 14, 15\}$$

est majoré.

Donc, la famille $(u_i)_{i \in [1,3]}$ est sommable et $\sum_{i \in I} u_i = 15$.

2. Considérons la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ où $u_i = \frac{1}{i}$.

Alors, l'ensemble

$$A = \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset \mathbb{N}^* \text{ et } J \text{ est fini} \right\} = \left\{ 0, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

n'est pas majoré. En effet, en prenant $J = [1, n]$, on remarque la somme $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ appartient à A et on a montré dans le chapitre sur les séries numériques que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (série harmonique).

Donc, la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable et $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

3. Considérons la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où $u_i = \begin{cases} \frac{1}{i^2} & \text{si } i \neq 0 \\ 0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$.

Montrons que la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est sommable. Pour cela, on montre que l'ensemble

$$A = \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset \mathbb{Z} \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$$

est majoré.

Soit $J \subset \mathbb{Z}$. Notons $N = \max_{j \in J} (|j|)$. Comme les u_i sont positifs ou nuls,

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i=-N}^N u_i \leq \sum_{i=-N}^N \frac{1}{i^2}.$$

Or,

$$\sum_{i=-N}^N \frac{1}{i^2} = \sum_{i=-N}^{-1} \frac{1}{i^2} + 0 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2}$$

Le changement d'indice $p = -i$ dans la première somme donne :

$$\sum_{i=-N}^N \frac{1}{i^2} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(-p)^2} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{p^2} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2}.$$

Or, la série à termes positifs $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) et sa somme est égale à $\frac{\pi^2}{6}$ donc,

$$2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} \leq 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \leq \frac{\pi^2}{3}.$$

Donc,

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \frac{\pi^2}{3}$$

et l'ensemble A est majoré par $\frac{\pi^2}{3}$.

On en déduit que la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i \leq \frac{\pi^2}{3}.$$

Montrons (pour la beauté du geste) que l'inégalité précédente est une égalité.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{i \in [-N, N]} u_i \in A$, donc, comme $\sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i$ est un majorant de A (en effet, c'est sa borne supérieure),

$$\sum_{i \in [-N, N]} u_i \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i. \quad (1)$$

Or, on a montré que :

$$\sum_{i \in [-N, N]} u_i = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{3}.$$

Donc, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans (1),

$$\frac{\pi^2}{3} \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i.$$

Ainsi,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i = \frac{\pi^2}{3}$$

Remarque 12.15 – Lien avec les séries

On suppose ici que $I = \mathbb{N}$ et on considère $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille sommable de réels positifs ou nuls.

Montrons que la série de terme général u_n converge.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\llbracket 0, N \rrbracket$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, donc,

$$\sum_{i=0}^N u_i \in \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset \mathbb{N} \text{ et } J \text{ est fini} \right\}.$$

Donc, la suite $\left(\sum_{i=0}^N u_i \right)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée par $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i$.

De plus, comme les u_i sont positifs, la suite $\left(\sum_{i=0}^N u_i \right)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, la suite $\left(\sum_{i=0}^N u_i \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge.

Autrement dit, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et de plus,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i.$$

Montrons que l'égalité précédente est une égalité.

Soit $J \subset \mathbb{N}$ fini, en notant $N = \max J$. Comme les u_i sont positifs ou nuls, on a :

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i=0}^N u_i.$$

Or, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, donc,

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i=0}^N u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Donc, $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ est un majorant de l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset \mathbb{N} \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$.

Donc, par définition de la borne supérieure,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset \mathbb{N} \text{ et } J \text{ est fini} \right\} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Donc,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

La notion de famille sommable généralise la notion de série.

Théorème 12.17 – Découpage en paquets

Soient I un ensemble au plus dénombrable et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par I .
Pour toute famille $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, on a :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Démonstration

Admis.

Définition 12.10 – Famille de réels ou complexes sommable

Soient I un ensemble au plus dénombrable et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes indexée par I .

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable. Autrement dit, lorsque l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} |u_i| \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ est majoré.

En cas de sommabilité,

- si les u_n sont réels, on pose :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-,$$

où $u_i^+ = \max(0, u_i)$ et $u_i^- = \min(0, -u_i)$.

- si les u_n sont complexes, on pose :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i).$$

Remarque 12.16

Lorsque I est fini, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est clairement sommable. En effet, pour tout $J \subset I$ fini,

$$\sum_{i \in J} |u_i| \leq \sum_{i \in I} |u_i|,$$

et $\sum_{i \in I} |u_i| \in \mathbb{R}$ comme somme finie de réels.

Exemple 12.6

Considérons la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ où $u_i = \frac{(-1)^i}{i}$.

Alors, l'ensemble

$$A = \left\{ \sum_{i \in J} |u_i| \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\} = \left\{ 0, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

n'est pas majoré (voir l'exemple précédent pour la justification).

Donc, la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

🔗 Théorème 12.18

Soient I un ensemble, $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes indexée par I et $(v_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs ou nuls indexée par I .

Si, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$ et la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Démonstration

Pour tout ensemble $J \subset I$ fini, $\sum_{i \in J} |u_i| \leq \sum_{i \in J} v_i$.

Or, la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable donc, l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} v_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ est majoré. Notons M un majorant.

On a alors, $\sum_{i \in J} |u_i| \leq M$.

Donc, l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} |u_i| \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ est majoré.

Ainsi, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. □

🔗 Théorème 12.19 – Lien avec les séries ($I = \mathbb{N}$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ou complexes.

La famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge absolument.

En cas de sommabilité,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration

► On commence par montrer l'équivalence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n |u_k|$.

($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

L'ensemble $\left\{ \sum_{n \in J} |u_n| \mid J \subset \mathbb{N} \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ est majoré. Notons M un majorant de cet ensemble.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[0, N]$ est fini, donc, $S_N = \sum_{n=0}^N |u_n| = \sum_{n \in [0, N]} |u_n| \leq M$.

La suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est majorée. De plus, comme les $|u_n|$ sont positifs, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge.

Donc, $\sum |u_n|$ converge. Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument.

($\Leftarrow$) On suppose que la série $\sum u_n$ converge absolument.

Soit $J \subset \mathbb{N}$ fini. On note $N = \max J$.

Comme les $|u_n|$ sont positifs, $\sum_{n \in J} |u_n| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|$.

Comme la suite des sommes partielles $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente, on en déduit qu'elle est majorée. Notons M un de ses majorants.

On a alors, $\sum_{n \in J} |u_n| \leq \sum_{n=0}^N |u_n| \leq M$.

Donc, l'ensemble $\left\{ \sum_{n \in J} |u_n| \mid J \subset \mathbb{N} \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$ est majoré.

Ainsi, la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

► On suppose la famille sommable. Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Cas 1 : les u_n sont positifs ou nuls.

Soit $J \subset \mathbb{N}$ fini. En notant $N = \max J$, comme les u_i sont positifs, $\sum_{n \in J} u_n \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Donc, $\sum_{i=0}^{+\infty} u_n$ est un majorant de $\sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ est fini} \right\}$.

On en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

D'autre part, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[0, N]$ est fini, donc, $\sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

En faisant tendre N vers ∞ , on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Cas 2 : les u_n sont réels.

Par définition : $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^+ - \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^-$.

Or, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.

Donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent absolument. Donc, par le point précédent,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Cas 3 : les u_n sont complexes.

Par définition : $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Im}(u_n)$.

Or, $0 \leq |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $0 \leq |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$.

Donc, par théorème de comparaison, $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent absolument. Donc, par le point précédent,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

□

Théorème 12.20 – Opérations sur les familles sommables

Soient I un ensemble et $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles sommables de réels ou complexes indexées par I .

Positivité (les u_i sont réels).

Si, pour tout $i \in I$, $u_i \geq 0$, alors $\sum_{i \in I} u_i \geq 0$.

De plus, $\sum_{i \in I} u_i = 0$ si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $u_i = 0$.

Croissance (les u_i et v_i sont réels).

Si, pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$, alors $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.

Linéarité.

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i.$$

Sommation par paquets.

Pour toute famille $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, on a :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Inégalité triangulaire.

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|.$$

Démonstration

Admis.

Théorème 12.21 – Produit

Soient I et J deux ensembles et $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_j)_{j \in J}$ deux familles sommables de réels ou complexes. Alors, la famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ indexée par $I \times J$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \left(\sum_{i \in I} u_i \right) \left(\sum_{j \in J} v_j \right) = \left(\sum_{j \in J} v_j \right) \left(\sum_{i \in I} u_i \right).$$

Démonstration

Admis.

Théorème 12.22 – Théorème de Fubini

Soient I et J deux ensembles et $(u_{i,j})_{i \in I \times J}$ une famille de réels ou complexes indexées par $I \times J$.

► Si, pour tout $(i,j) \in I \times J$, $u_{i,j} \geq 0$, alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right),$$

les sommes pouvant éventuellement être égales à $+\infty$.

► Si $(u_{i,j})_{i \in I \times J}$ est sommable, alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right).$$

Démonstration

Admis.

IV. Dénombrement

IV.1. Liste de longueur p

Définition 12.11 – p -liste

Soient E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$.

Une p -liste, ou liste de longueur p , de E est le choix **ordonné** d'éléments de E avec répétition possible.

On identifie p -liste et p -uplet (=élément du produit cartésien E^p).

Théorème 12.23

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Le nombre de p -listes de E est $\text{Card}(E^p) = n^p$.

Remarque 12.17 – En pratique

Une p -liste de E peut être interprétée comme un tirage successif de p éléments de E et avec remise.

Exercice 12.5

Avec notre alphabet de 26 lettres, combien de mots de 5 lettres peut-on former? (Les mots n'ont pas nécessairement de sens)

Résolution

Il y a 26 choix pour chaque lettre, donc au total, on peut former 26^5 mots de 5 lettres.

Exercice 12.6

Avec notre alphabet de 26 lettres, combien de mots de 6 lettres contenant dans l'ordre une consonne, trois voyelles et deux consonnes peut-on former? (Les mots n'ont pas nécessairement de sens)

Résolution

Il y a 6 choix pour les voyelles et 20 pour les consonnes, donc au total, on peut former $20 \times 6^3 \times 20^2 = 20^3 \times 6^3$ mots de 5 lettres contenant dans l'ordre une consonne, trois voyelles et deux consonnes.

Exercice 12.7

Une urne contient $n \geq 1$ jetons numérotés de 1 à n . On tire successivement et avec remise deux jetons.

- Combien de tirages sont possibles?
- Combien de tirages dont le second jeton à un numéro supérieur ou égal au premier sont possibles?

Résolution

- Pour chaque tirage, il y a n choix. Donc au total, n^2 tirages sont possibles.
- Soit $k \in [1, n]$. Si lors du premier tirage le jeton k est tiré, alors il y a $n - k + 1$ choix pour le second tirage (les jetons $k, k + 1, \dots, n$).
Au total, il y a

$$\sum_{k=1}^n (n - k + 1) = n^2 - \sum_{k=1}^n k + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

tirages possibles.

IV.2. Arrangement de longueur p



Définition 12.12 – Arrangement

Soient E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$.

Un p -arrangement, ou arrangement de longueur p , de E est le choix **ordonné** d'éléments deux à deux distincts de E .

Autrement dit, un p -arrangement est une p -liste de E dont les éléments sont deux à deux distincts.

Remarque 12.18 – En pratique

Un p -arrangement de E peut être interprété comme un tirage successif de p éléments de E et sans remise.



Théorème 12.24

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p -arrangements de E est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Par convention, on pose $A_n^0 = 1$.

Démonstration

Pour construire un p -arrangement $(x_1, \dots, x_p)$, on a :

- ▶ n choix pour $x_1 \in E$,
- ▶ $n-1$ choix pour $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$.
- ▶ $\vdots$
- ▶ $n-(p-1) = n-p+1$ choix pour $x_p \in E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$.

Au total, il y a $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ arrangements de longueur p . □



Exercice 12.8

Une urne contient $n \geq 1$ jetons numérotés de 1 à n . On tire successivement et sans remise deux jetons.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. Combien de tirages dont le second jeton à un numéro supérieur au premier sont possibles ?

Résolution

1. Le nombre de tirages possibles correspond au nombre de 2-arrangements de l'ensemble des jetons. Au total, il y a $n \times (n-1)$ tirages possibles.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si lors du premier tirage le jeton k est tiré, comme l'expérience est sans remise, alors il y a $n-k$ choix pour le second tirage (les jetons $k+1, k+2, \dots, n$). Au total, il y a

$$\sum_{k=1}^n (n-k) = n^2 - \sum_{k=1}^n k = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

tirages possibles.

 Théorème 12.25

Soient E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble de cardinal n .

Le nombre d'injections de E dans F est A_n^p .

Démonstration

On note $x_1, \dots, x_p$ les éléments de E . On sait que l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{F}(E, F) &\rightarrow F^p \\ f &\mapsto (f(x_1), \dots, f(x_p)) \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathcal{F}(E, F)$ sur F^p .

De plus, une application $f: E \rightarrow F$ est une injection si, et seulement, $\varphi(f)$ est un p -arrangement de E .

On peut alors restreindre φ en une bijection de l'ensemble des applications injectives de E dans F sur l'ensemble des p -arrangements de F .

On en déduit que ces deux ensembles ont le même cardinal : il y a A_n^p injections de E dans F . □

Corollaire 12.4

Soient E et F deux ensembles finis de cardinal n . Le nombre de bijections de E sur F est $n!$.

Démonstration

Les ensembles E et F ont le même cardinal. Par théorème une application est injective si et seulement elle est bijective.

Par le théorème précédent, le nombre de bijections de E sur F est $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$. □

 Définition 12.13 – Permutation

Soit E un ensemble. On appelle **permutation de E** , toute bijection de E sur E .

On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E .

 Remarque 12.19

Lorsque que $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathfrak{S}(E) = \mathfrak{S}_n$.

 Théorème 12.26

Soit E un ensemble fini. Alors,

$$\text{Card}(\mathfrak{S}(E)) = (\text{Card}(E))!.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\text{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$.

Démonstration

Utiliser le corollaire précédent avec $E = F$. □

IV.3. Combinaison de longueur p **Définition 12.14 – Combinaison**

Soient E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$.

Une p -combinaison, ou combinaison de longueur p , de E est le choix **non ordonné** d'éléments deux à deux distincts de E .

Autrement dit, une p -combinaison est une partie à p éléments de E .

Remarque 12.20 – En pratique

Une p -combinaison de E peut être interprétée comme un tirage simultané de p éléments de E et sans remise.

Théorème 12.27

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Le nombre de combinaisons de longueur p de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}.$$

Par convention si $p < 0$ ou $p > n$, on pose $\binom{n}{p} = 0$.

Démonstration

On note C_n^p le nombre de partie à p éléments de E . Pour construire un p -arrangement de E , on a :

- C_n^p choix pour l'ensemble des p éléments de E ;
- $p!$ choix pour l'ordre de ces p éléments.

On en déduit que :

$$A_n^p = C_n^p \times p!.$$

Ainsi,

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

□

Exercice 12.9

Une urne contient $n \geq 1$ jetons numérotés de 1 à n . On tire simultanément deux jetons.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. Combien de tirages dont la somme des valeurs des jetons vaut n sont possibles ?

Résolution

1. Le nombre de tirages correspond au nombre de 2-combinaisons de l'ensemble des jetons. Au total, il y a $\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$ tirages possibles.
2. Un tel tirage est une paire $\{k, l\}$ avec $k + l = n$ et $k \neq l$. La connaissance d'un des deux membres de la paire suffit à connaître le second. Quitte à échanger les rôles de k et l , on peut supposer $k < l$. On a alors $1 \leq k < \frac{n}{2}$.
 - Si n est pair, le nombre de tirages cherché est $\frac{n}{2} - 1$.
 - Si n est impair, le nombre de tirages cherché est $\frac{n-1}{2}$.

Exercice 12.10

1. Trouver le nombre d'anagrammes du mot « physique » .
2. Trouver le nombre d'anagrammes du mot « abracadabra » .
3. Plus généralement, on considère un mot m de longueur n et composé de r lettres distincts. La i -ème lettre apparaît p_i fois dans m . Trouver le nombre d'anagrammes du mot m .

Résolution

1. Une anagramme de « physique » correspond à une permutation des lettres de ce mot. Comme les 8 lettres de ce mot sont différentes, chaque permutation est une anagramme différente. Donc, au total, il y a 8! anagrammes possibles.
2. La situation est différente ici : il y a 5 « a », 2 « b » et 2 « r ». Une permutation des lettres « a » ne crée pas de nouvelle anagramme par exemple.

Méthode 1 : on voit un mot comme une 11-liste des lettres disponibles. On commence par placer les « a » : ceci revient à choisir 5 emplacement parmi les 11 disponibles, soit $\binom{11}{5}$ possibilités. Ensuite, de la même manière, il y a $\binom{11-5}{2} = \binom{6}{2}$ possibilités de placer les « b », puis $\binom{4}{2}$ possibilités de placer les « r ». Il reste ensuite 2 possibilités pour le « c » et une dernière possibilité pour le « d ». Au total, il y a :

$$\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2 \times 1 = \frac{11! \times 6! \times 4! \times 2}{5! \times 6! \times 2! \times 4! \times 2! \times 2!} = \frac{11!}{5! \times 2! \times 2!}.$$

anagrammes du mot « abracadabra ».

Méthode 2 : Si toutes les lettres étaient différentes, il y aurait 11! anagrammes. Or, pour chaque anagramme, on compte 5! permutations des *a* donnant le même mot, 2! permutations des *b* donnant le même mot et 2! permutations des *r* donnant le même mot. Donc, il y a :

$$\frac{11!}{5! \times 2! \times 2!}$$

anagrammes du mot « abracadabra ».

3. On procède comme précédemment :

Méthode 1 : on voit un mot comme un *n*-listes des lettres disponibles.

- Il y a $\binom{n}{p_1}$ possibilités pour placer la première lettre.
- Il y a $\binom{n-p_1}{p_2}$ possibilités pour placer la deuxième lettre.
- ⋮
- Il y a $\binom{n-p_1-p_2-\dots-p_{i-1}}{p_i}$ possibilités pour placer la *i*-ème lettre.
- ⋮
- Il y a $\binom{n-p_1-p_2-\dots-p_{r-1}}{p_r}$ possibilités pour placer la dernière lettre. Comme les mots contiennent *n* lettres, $p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} + p_r = n$, on a : $\binom{n-p_1-p_2-\dots-p_{r-1}}{p_r} = 1$.

Au total, il y a :

$$\binom{n}{p_1} \times \binom{n-p_1}{p_2} \times \dots \times \binom{n-p_1-p_2-\dots-p_{r-1}}{p_r} = \frac{n!}{p_1! \times p_2! \times \dots \times p_r!}$$

anagrammes du mot *m*.

Méthode 2 : Si toutes les lettres étaient différentes, il y aurait *n* anagrammes. Or, pour chaque anagramme, on compte *p*₁! permutations de la première lettre donnant le même mot, *p*₂! permutations de la deuxième lettre donnant le même mot, ..., *p*_{*r*}! permutations de la dernière lettre donnant le même mot. Donc, il y a :

$$\frac{n!}{p_1! \times p_2! \times \dots \times p_r!}.$$

anagrammes du mot *m*.

**Exercice 12.11**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer par des arguments de dénombrement $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Résolution

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de partie à k éléments d'un ensemble à n éléments. La somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ correspond donc au nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Donc,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$



Exercice 12.12

Soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ avec $p \leq m + n$. Montrer par des arguments de dénombrement que :

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \times \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p} \quad (\text{formule de Vandermonde})$$

Résolution

Le nombre $\binom{m+n}{p}$ correspond au nombre de parties à p éléments d'un ensemble E à $m+n$ éléments.

On partitionne E en $F \cup G$ où F contient m éléments et G contient n éléments et $F \cap G = \emptyset$.

Une partie à p éléments d'un ensemble E est composée de k éléments de F et de $p-k$ éléments de G où $0 \leq k \leq p$ est un entier. On obtient alors une partition de l'ensemble des parties de E à p éléments en regroupant celles qui possèdent le même nombre d'éléments dans F .

Donc,

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p a_k$$

où a_k est le nombre de parties à p éléments de E composées de k éléments de F et de $p-k$ éléments de G .

Soit $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ fixé, il existe $\binom{m}{k} \times \binom{n}{p-k}$ parties à p éléments de E composées de k éléments de F et de $p-k$ éléments de G . Ainsi,

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \times \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$



Théorème 12.28

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration

Soit E un ensemble de cardinal n .

Choisir p éléments parmi n revient à choisir les $n-p$ autres. □



Théorème 12.29 – Formule de Pascal

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Démonstration

Soit E un ensemble de cardinal n . On particularise x un élément de E .

Choisir p éléments parmi n revient à :

- ou bien, à choisir $p-1$ éléments parmi $n-1$, si x fait parti des p éléments choisis.

► ou bien, à choisir p éléments parmi $n - 1$, si x ne fait pas parti des p éléments choisis.
Les deux cas ne peuvent pas avoir lieu simultanément. Donc,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

□

Théorème 12.30 – Formule du binôme de Newton

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times a^k \times b^{n-k}.$$

Démonstration

On a :

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \times (a + b) \times \cdots \times (a + b)}_{n \text{ facteurs}}.$$

Pour développer le produit précédent, on choisit a ou b dans chaque facteur. Soit $k \in [0, n]$.

Si a est choisi dans k facteurs, alors on a choisi b dans les $n - k$ autres facteurs. On obtient alors le terme $a^k \times b^{n-k}$. Il reste à déterminer le nombre de fois où ce terme apparaît.

Ce terme apparaît chaque fois que a est choisi dans k parmi les n facteurs présents dans le produit $(a + b)^n$. Il y a donc $\binom{n}{k}$ possibilités.

Donc,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times a^k \times b^{n-k}.$$

□

Exercice 12.13 – Formule du multinôme

Soient $a_1, \dots, a_r$ des complexes et $n \in \mathbb{N}$. Développer $(a_1 + \cdots + a_r)^n$.

Indication : s'inspirer de la démonstration de la formule de binôme et utiliser l'exercice avec les anagrammes.

Résolution

On a :

$$(a_1 + \cdots + a_r)^n = \underbrace{(a_1 + \cdots + a_r) \times (a_1 + \cdots + a_r) \times \cdots \times (a_1 + \cdots + a_r)}_{n \text{ facteurs}}.$$

En développement les n facteurs, on peut choisir p_1 fois a_1 , p_2 fois a_2 , ..., p_r fois a_r où $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont des entiers vérifiant $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = n$.

On obtient alors une anagramme écrite avec les lettres a_1 (p_1 fois), a_2 (p_2 fois), ..., a_r (p_r fois). En regroupant les facteurs entre eux, le terme obtenu est de la forme $a_1^{p_1} \times a_2^{p_2} \times \cdots \times a_r^{p_r}$.

Le nombre de termes de cette forme est alors le nombre d'anagrammes d'un mot de longueur n formé des lettres a_1 (p_1 fois), a_2 (p_2 fois), ..., a_r (p_r fois). Dans un exercice précédent, on a vu que ce nombre est égal à :

$$\frac{n!}{p_1! \times p_2! \times \cdots \times p_r!}$$

Donc,

$$(a_1 + \cdots + a_r)^n = \sum_{\substack{(p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{N}^r \\ p_1 + \cdots + p_r = n}} \frac{n!}{p_1! \times p_2! \times \cdots \times p_r!} \times a_1^{p_1} \times a_2^{p_2} \times \cdots \times a_r^{p_r} \quad (\text{formule du multinôme}).$$

Remarque : on note $\binom{n}{p_1, p_2, \dots, p_r} = \frac{n!}{p_1! \times p_2! \times \cdots \times p_r!}$ et on dit que ce nombre est un coefficient multinomial.

 Proposition 12.3

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq n$. On a :

$$p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration

On peut montrer cette formule en utilisant l'expression des coefficients binomiaux avec les factorielles.

On peut aussi utiliser un argument combinatoire.

Soit E un ensemble à n éléments. Considérons les couples de la forme (A, x) où A est une partie à p éléments de E et x un élément de A . Comptons le nombre de couples possibles de deux manières différentes.

- Il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles pour A et, pour chaque possibilité de A , il y a p choix possibles pour x . Au total, il y a $p \times \binom{n}{p}$ couples possibles.
- Il y a n choix possibles pour x . Une fois x fixé, comme x appartient à la partie A et A contient p éléments, il y a $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités pour choisir les éléments restants de A . Au total, il y a $n \times \binom{n-1}{p-1}$ couples possibles.

Donc,

$$p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}.$$

□

 Exercice 12.14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 \times \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \times \binom{n}{k}.$$

Résolution

► On a : $\sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \times \binom{n}{k}.$

Pour appliquer la proposition précédente, on doit avoir $n \geq 1$. On traitera le cas $n = 0$ ensuite. On a :

$$\sum_{k=1}^n k \times \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \times \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}.$$

Donc, par le formule du binôme de Newton (avec $a = b = 1$), on a :

$$\sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}.$$

Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} = 0 \times \binom{0}{0} = 0$ et la formule trouvée précédemment est encore vraie.

► De même, en supposant $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n (k-1) \times n \times \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=2}^n n \times (n-1) \times \binom{n-2}{k-2} = n \times (n-1) \times 2^{n-2}.$$

On vérifie que la formule trouvée est encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$:

- $\sum_{k=0}^0 k \times (k-1) \times \binom{0}{k} = 0 \times (0-1) \times \binom{0}{0} = 0.$
- $\sum_{k=0}^1 k \times (k-1) \times \binom{1}{k} = 0 \times (0-1) \times \binom{1}{0} + 1 \times (1-1) \times \binom{1}{1} = 0.$

► On remarque que $k^2 = k^2 - k + k = k \times (k-1) + k$. Donc, on a :

$$\sum_{k=0}^n k^2 \times \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (k \times (k-1) + k) \times \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} = n \times (n-1) \times 2^{n-2} + n \times 2^{n-1}.$$

► En utilisant la proposition précédente, on a : $(k+1) \times \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \times \binom{n}{k}$, donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \times \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \times \binom{n+1}{k+1}.$$

Puis le changement d'indice $j = k+1$ et la formule du binôme de Newton (attention la somme ne commence pas à 0, on ajoute donc le terme d'indice $j = 0$) donnent :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \times \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} - 1 \right) = \frac{1}{n+1} \times (2^{n+1} - 1).$$