

Corrigé du Concours Blanc 1

Exercice 1

1)a) La fonction $h : x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise **une bijection** de $\mathbb{R}$ vers $h(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[= \mathbb{R}$.

b) La fonction $k : x \mapsto x^4$ **ne réalise pas** une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Elle n'est pas injective car $k(-1) = k(1) = 1$ et elle n'est pas surjective car $k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Remarque : La fonction *racine quatrième* n'est donc pas définie sur $] -\infty; 0[$

2)a) On sait que $4^3 = 64$ donc $\boxed{\sqrt[3]{64} = 4}$

b) $x^3 + 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-27} = \boxed{-3}$

c)i) La formule est une formule de cours mais l'énoncé demande ici de la redémontrer.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de la racine cubique : $(\sqrt[3]{x \cdot y})^3 = xy$ et $(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x})^3 (\sqrt[3]{y})^3 = x \cdot y$

Comme $h : x \mapsto x^3$ est bijective, cela montre que : $\boxed{\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}}$

ii) On peut donc écrire $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \times 4} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{4}$ donc $\boxed{\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}}$

3)a) Le polynôme $X^3 + 3X - 4$ a pour racine évidente 1 car $1+3-4=0$. Il est donc divisible par $X-1$.

Remarque : L'indication du b) est donc aussi une indication pour le a)...

En posant la division ou en procédant par identification, on constate que $X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2 + X + 4)$

Le discriminant du trinôme $X^2 + X + 4$ est $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ donc ce trinôme n'a pas de racine.

Donc $\boxed{x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1}$

Autre méthode : On peut aussi vérifier que la fonction $x \mapsto x^3 + 3x - 4$ est strictement croissante et donc qu'elle ne s'annule qu'une seule fois (en 1 qui est racine évidente)

b) Le polynôme $X^3 - 2X^2 + 1$ a pour racine évidente 1 car $1-2+1=0$. Il est donc divisible par $X-1$.

En posant la division ou en procédant par identification, on constate que $X^3 - 2X^2 + 1 = (X-1)(X^2 - X - 1)$

Le discriminant du trinôme $X^2 - X - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$

Donc ce trinôme possède deux racines : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

4)a) $4^2 = 16 < 22 < 25 = 5^2$.

Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\boxed{4 < \sqrt{22} < 5}$

b) La fonction polynomiale f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 8x - 2$.

$\Delta = 64 - 4 \times 3 \times (-2) = 88 > 0$ Les 2 racines sont $x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{88}}{2 \times 3} = \frac{8 - 2\sqrt{22}}{6} = \frac{4 - \sqrt{22}}{3}$ et $x_2 = \frac{4 + \sqrt{22}}{3}$

On sait que $f'(x)$ est négative entre les racines et positives à l'extérieur des racines.

D'après le a), $x_1 < 0$ et $x_2 > \frac{8}{3} > 2$. Donc $\forall x \in [0; 2], f'(x) < 0$

La fonction $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0; 2]}$ (et on a vu qu'elle est continue)

c) Le théorème de la bijection monotone prouve donc que f réalise une bijection de $[0; 2]$ vers $[f(2); f(0)] = [-4; 8]$.
Comme $0 \in [-4; 8]$, l'équation $f(x) = 0$ possède **une unique solution** β dans l'intervalle $[0; 2]$.

d) def f(x) : # On tape la définition de f(x) en langage Python
On utilise ** pour les puissances
return $x^{**3} - 4*x^{**2} - 2*x + 8$

e) def valeur_approchee(epsilon) :
a=0 # On cherche une racine entre 0 et 2
b=2
while b - a > epsilon : # Tant que l'intervalle est plus grand que la marge d'erreur fixée
if f((a+b)/2) * f(a) < 0 : # Ce produit est négatif si l'image de la borne de gauche et du milieu ont des
b = (a+b)/2 # signes contraires et donc si β est du côté gauche. On remplace alors la borne
else : # droite par le milieu de l'intervalle.
a = (a+b)/2 # Sinon on remplace la borne de gauche par le milieu de l'intervalle
return (a+b)/2 # Le milieu est la meilleure valeur à renvoyer mais on peut aussi prendre a ou b.

f) On reconnaît les premières décimales de $\sqrt{2}$. On peut donc conjecturer que $\beta = \sqrt{2}$

g) $\sqrt{2}^3 - 4\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 8 = 2\sqrt{2} - 8 - 2\sqrt{2} + 8 = 0$ donc $\sqrt{2}$ est une solution de l'équation $x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0$

h) Le polynôme $X^3 - 4X^2 - 2X + 8$ peut donc s'écrire $(X - \sqrt{2})(aX^2 + bX + c)$.

$$(X - \sqrt{2})(aX^2 + bX + c) = aX^3 + bX^2 + cX - a\sqrt{2}X^2 - b\sqrt{2}X - c\sqrt{2}$$

En procédant par identification, on trouve : $a = 1$ et $-c\sqrt{2} = 8$ donc $c = -4\sqrt{2}$ (ces 2 valeurs étaient « visibles »)

Enfin $b - a\sqrt{2} = -4$ donc $b = -4 + \sqrt{2}$

Remarque : Il est inutile de vérifier la 4^{ème} relation car on sait que la factorisation existe.

Le discriminant du trinôme est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4 + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-4\sqrt{2}) = 16 - 8\sqrt{2} + 2 + 16\sqrt{2} = 16 + 8\sqrt{2} + 2 = (4 + \sqrt{2})^2$$

Donc ce trinôme possède deux racines : $\frac{-(-4 + \sqrt{2}) - (4 + \sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2}$ et $\frac{-(-4 + \sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2})}{2} = 4$

Conclusion : $x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Remarque : Pour les plus observateurs, on peut aussi voir que 4 est racine « évidente »

5)a) La limite du polynôme g en $-\infty$ et en $+\infty$ est celle du terme de plus haut degré ax^3 . Donc :

Si $a > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Si $a < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

b) On constate que la fonction continue g change toujours de signe. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois. De plus, un polynôme de degré 3 possède au plus 3 racines.

On en déduit que l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ possède **forcément 1, 2 ou 3 solutions**.

6) D'après l'énoncé, l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$ possède une seule solution (car $27 \times (-4)^2 + 4 \times 3^3 > 0$).

On a vu au 3)a) que cette solution unique vaut 1 et la formule de l'énoncé permet de l'écrire

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27(-4)^2 + 4 \times 3^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27(-4)^2 + 4 \times 3^3}{27}}} = \sqrt[3]{2 - \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4}} + \sqrt[3]{2 + \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4}}$$

On a donc bien montré que : $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = 1$ (car $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$)

7)a) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$, on peut passer à la limite dans la définition $u_{n+1} = \sqrt[3]{2u_n^2 - 1}$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{2x^2 - 1}$ est continue) et on obtient $L = \sqrt[3]{2L^2 - 1}$ puis $L^3 = 2L^2 - 1$ et $L^3 - 2L^2 + 1 = 0$

D'après 3)b), cette équation n'a que 3 solutions : $1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : L'énoncé de cette question 7) confirme la valeur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ trouvée par le calcul au 3)b)

b) La fonction $\varphi = BoA$ est la composée des deux fonctions: $A: x \mapsto 2x^2 - 1$ et $B: y \mapsto \sqrt[3]{y}$
On sait que la fonction A est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction racine cubique est croissante sur $\mathbb{R}$ (car $x \leq y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} \leq \sqrt[3]{y^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{y}$)

On en déduit que $\varphi: x \mapsto \sqrt[3]{2x^2 - 1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Si $1 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq y$, alors $\varphi(1) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq \varphi(y)$ car φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a vu au 7)a) que 1 et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont des points fixes pour la fonction φ donc on a $1 \leq \varphi(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \varphi(y)$

Les intervalles $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ sont donc stables pour la fonction φ .

d) En s'inspirant du calcul du 7), on voit que : $\sqrt[3]{2x^2 - 1} \leq x \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \leq x^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 1 \geq 0$

La fonction $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$ s'annule en $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 1 et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. En regardant ses limites et ses variations, il est clair

qu'elle est négative sur $\left]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et qu'elle est positive sur $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 1\right]$ et sur $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

Si $u_0 \in \left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, on peut donc dire que $u_0^3 - 2u_0^2 + 1 \leq 0$ et que $u_1 = \sqrt[3]{2u_0^2 - 1} \geq u_0$

Si $u_0 \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$, on peut dire que $u_0^3 - 2u_0^2 + 1 \geq 0$ et que $u_1 = \sqrt[3]{2u_0^2 - 1} \leq u_0$

e) Supposons que $u_0 \in \left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Soit P(n) le prédicat : $1 < u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ »

Initialisation : P(0) est vrai d'après c) et d)

Hérédité : Supposons P(n) vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Comme φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et grâce au c) : $1 < \varphi(u_n) \leq \varphi(u_{n+1}) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc P(n+1) est vrai.

Conclusion : Le prédicat est vrai au rang 0 et héréditaire donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc elle converge, d'après le théorème de convergence

monotone. Sa limite est forcément $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ car elle ne peut pas être 1 ou $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Si $u_0 \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$, une récurrence analogue montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(u_n) \geq \varphi(u_{n+1}) \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (seule l'initialisation

change d'après les calculs du d)).

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc elle converge, d'après le théorème de convergence monotone. Sa limite est forcément $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ car elle ne peut pas être 1 ou $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Conclusion : Pour tout $u_0 > 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 2

1) Dans le pire des cas, on peut faire $2n-2$ lancers sans avoir d'élu, si les 2 candidats obtiennent $n-1$ voix chacun.

Après $2n-1$ lancers, on est alors certain d'avoir un vainqueur.

2) $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ car le candidat battu a nécessairement obtenu entre 0 et $n-1$ voix.

3) $X_1(\Omega) = \{0\}$ donc X_1 suit la loi certaine de valeur 0 et $E(X_1) = V(X_1) = 0$

Il y a eu 1 seul vote. Le candidat qui obtient cette unique voix est élu (car $n=1$) et l'autre n'a eu aucune voix !

4a) $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$ et $(X_2 = 0) = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$ Si la pièce tombe 2 fois sur Pile ou 2 fois sur Face, un candidat est élu avec $n=2$ voix et l'autre n'a aucune voix.

$(X_2 = 1) = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$ Si les 2 premiers lancers donnent 1 Pile et 1 Face, quelqu'un sera élu au 3^{ème} lancer (quel qu'il soit) et le battu aura eu 1 voix

b) On en déduit, car ces unions sont disjointes et les 2 lancers sont indépendants que :

$$P(X_2 = 0) = P(A_1)P(A_2) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \quad \text{donc} \quad P(X_2 = 0) = p^2 + q^2$$

$$P(X_2 = 1) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) \quad \text{donc} \quad P(X_2 = 1) = 2pq$$

On reconnaît une loi de Bernoulli de paramètre $2pq$

On sait donc que : $E(X_2) = 2pq$ et $V(X_2) = 2pq(1-2pq)$

c) Notons C l'événement « le candidat A est élu »

$$i) C = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \quad (\text{union disjointe})$$

Donc la probabilité que le candidat A soit élu est : $P(C) = p^2 + p^2q + p^2q = p^2(1+2q)$

Remarque : Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si on suppose qu'on fait quoi qu'il arrive 3 lancers. Sinon, on peut parler de probabilités conditionnelles.

$$ii) \text{ On veut calculer } P_{A_1}(C) = \frac{P(C \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3))}{P(A_1)} = \frac{p^2 + p^2q}{p} = p + pq$$

$$iii) \text{ On veut calculer } P_C(A_1) = \frac{P(C \cap A_1)}{P(C)} = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3))}{P(C)} = \frac{p^2 + p^2q}{p^2(1+2q)} = \frac{1+q}{1+2q}$$

5a) A chaque lancer, il y a 2 résultats possibles : obtenir Pile (avec une probabilité p) ou Face.

On répète les lancers $n-1+k$ dans des conditions identiques.

Soit C la variable aléatoire qui compte le nombre de Piles.

Alors C suit la loi binomiale $B(n-1+k; p)$

$$\text{Donc } P(T_{n,k}) = P(C = n-1) = \binom{n-1+k}{n-1} p^{n-1} q^k \quad \text{et} \quad P(U_{n,k}) = P(C = k) = \binom{n-1+k}{k} p^k q^{n-1}$$

b) Pour que le candidat battu ait exactement k voix, il faut et il suffit qu'il ait eu k voix après $n-1+k$ votes et que son adversaire ait eu $n-1$ voix après $n-1+k$ votes puis ait obtenu la $n^{\text{ème}}$ voix pour se faire élire lors du $(n+k)^{\text{ème}}$ lancer.

On a donc
$$(X_n = k) = (T_{n,k} \cap A_{n+k}) \cup (U_{n,k} \cap \overline{A_{n+k}})$$

On en déduit par incompatibilité et indépendance que :

$$P(X_n = k) = P(T_{n,k})P(A_{n+k}) + P(U_{n,k})P(\overline{A_{n+k}}) = \binom{n-1+k}{n-1} p^{n-1} q^k p + \binom{n-1+k}{k} p^k q^{n-1} q$$

Donc
$$P(X_n = k) = \binom{n-1+k}{k} [p^n q^k + p^k q^n]$$
 grâce à la symétrie des coefficients binomiaux.

6)a Si $p = \frac{1}{2}$, la formule devient
$$P(X_n = k) = \binom{n-1+k}{k} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = \binom{n-1+k}{k} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$$

Donc
$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{2^{n-1+k}} \binom{n-1+k}{k}$$

b) On connaît la formule de factorisation : $\binom{n+k}{k+1} = \frac{n+k}{k+1} \binom{n+k-1}{k+1}$ donc $(k+1) \binom{n+k}{k+1} = (n+k) \binom{n-1+k}{k+1}$

Alors
$$\begin{aligned} (k+1)P(X_n = k+1) &= (k+1) \frac{1}{2^{n-1+k+1}} \binom{n-1+k+1}{k+1} = \frac{1}{2^{n+k}} (k+1) \binom{n+k}{k+1} = \frac{1}{2^{n+k}} (n+k) \binom{n-1+k}{k} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1+k}} (n+k) \binom{n-1+k}{k} = \frac{1}{2} (n+k) P(X_n = k) \end{aligned}$$

c) définition (k = i - 1) (d'après b)) (linéarité)

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) P(X_n = k+1) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2} (n+k) P(X_n = k) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} k \cdot P(X_n = k) \\ &= \frac{n}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) - P(X_n = n-1) \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot P(X_n = k) - (n-1) P(X_n = n-1) \right] \quad (\text{Chasles}) \\ &= \frac{n}{2} [1 - P(X_n = n-1)] + \frac{1}{2} [E(X_n) - (n-1) P(X_n = n-1)] = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} E(X_n) - \frac{2n-1}{2} P(X_n = n-1) \end{aligned}$$

En multipliant par 2 et en regroupant les termes $E(X_n)$, on trouve bien que :
$$E(X_n) = n - (2n-1) P(X_n = n-1)$$

7)a
$$\prod_{k=1}^{n-1} (2k) = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \times \prod_{k=1}^{n-1} k = 2^{n-1} (n-1)!$$

On remarque que
$$\prod_{k=1}^{n-1} (2k) \times \prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \prod_{\substack{p=2 \\ \text{pair}}}^{2n-2} p \times \prod_{\substack{p=3 \\ \text{impair}}}^{2n-1} p = \prod_{p=1}^{2n-1} p = (2n-1)!$$

Donc
$$\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n-1)!}{\prod_{k=1}^{n-1} (2k)} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} (n-1)!}$$

b) D'après 6)c) et 6)a) :

$$n - E(X_n) = (2n-1) P(X_n = n-1) = (2n-1) \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{2^{2n-2}} \frac{(2n-1)(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} (n-1)!} \frac{1}{2^{n-1} (n-1)!}$$

On en déduit d'après 7) que
$$n - E(X_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^{n-1} (2k)} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k} \right)$$

c) def esperanceX(n):

p=1

for k in range(1,n):

p=p*(1+1/(2*k))

return n-p

on initialise le produit puis on multiplie par tous les facteurs

k varie de 1 à n-1 comme prévu

on a vu au 6)c) que $E(X_n)$ vaut n – le produit du 7)b).

8)a) La fonction $d : x \mapsto e^x - (1+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, d'(x) = e^x - 1$.

Donc $\forall x \leq 0, d'(x) \leq 0$ et $\forall x \geq 0, d'(x) \geq 0$

La fonction d est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle a pour minimum $d(0) = 1 - 1 = 0$.

Elle est donc toujours positive, ce qui prouve que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x}$

Remarque : Nous verrons d'autres méthodes pour prouver ce résultat ultra classique plus tard dans l'année.

b) Soit $k \geq 2$. D'après le a), en posant $x = -\frac{1}{k}$: $\exp\left(-\frac{1}{k}\right) \geq 1 - \frac{1}{k}$

Donc $\boxed{\forall k \geq 2, -\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln\frac{k-1}{k} = \ln(k-1) - \ln(k)}$

c) Soit $n \geq 3$. D'après le a) : $\forall k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket, 1 + \frac{1}{2k} \leq e^{\frac{1}{2k}}$

Multiplions toutes ces inégalités où les termes sont tous positifs :

$$\prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \leq \prod_{k=2}^{n-1} e^{\frac{1}{2k}} = e^{\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}}$$

Sommons les inégalités du b) k allant de 2 à n-1 : $\sum_{k=2}^{n-1} -\frac{1}{k} \geq \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k-1) - \ln(k)$

On reconnait une somme télescopique : $\sum_{k=2}^{n-1} -\frac{1}{k} \geq \ln 1 - \ln(n-1)$

On multiplie par $-\frac{1}{2}$ qui est négatif en faisant attention à l'ordre : $\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \ln(n-1) \leq \frac{1}{2} \ln n$

Enfin $\exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \ln n\right) = \exp(\ln \sqrt{n})$ donc $\boxed{e^{\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}} \leq \sqrt{n}}$

d) Soit $n \geq 3$. On vient de montrer que $0 \leq \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \leq \sqrt{n}$.

Multiplions encore ce produit par le terme où k=1 qui vaut $\frac{3}{2}$: $0 \leq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = n - E(X_n) \leq \frac{3}{2} \sqrt{n}$

On a donc $n - \frac{3}{2} \sqrt{n} \leq E(X_n) \leq n$ et $1 - \frac{3}{2\sqrt{n}} \leq \frac{E(X_n)}{n} \leq 1$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{2\sqrt{n}} = 1$, le théorème d'encadrement prouve que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X_n)}{n} = 1}$

Remarque : On dira plus tard que $E(X_n)$ est équivalent à n quand n tend vers $+\infty$.

9)a) Soit $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$. D'après le 6)b) :

$$(k+1)^2 P(X_n = k+1) = (k+1) \frac{1}{2} (n+k) P(X_n = k) = \frac{1}{2} (k^2 + nk + k + n) P(X_n = k)$$

$$\boxed{(k+1)^2 P(X_n = k+1) = \frac{1}{2} k^2 P(X_n = k) + \frac{n+1}{2} k P(X_n = k) + \frac{n}{2} P(X_n = k)}$$

b) (th. de transfert) (k = i - 1) (d'après a) et par linéarité)

$$\begin{aligned}
 E(X_n^2) &= \sum_{i=0}^{n-1} i^2 P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)^2 P(X_n = k+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} k^2 P(X_n = k) + \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} k P(X_n = k) + \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} P(X_n = k) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} k^2 P(X_n = k) - (n-1)^2 P(X_n = n-1) \right] + \frac{n+1}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} k P(X_n = k) - (n-1) P(X_n = n-1) \right] \\
 &\quad + \frac{n}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) - P(X_n = n-1) \right] \quad (\text{Chasles})
 \end{aligned}$$

Donc $2E(X_n^2) = E(X_n^2) - (n-1)^2 P(X_n = n-1) + (n+1)[E(X_n) - (n-1)P(X_n = n-1)] + n[1 - P(X_n = n-1)]$

et $E(X_n^2) = (n+1)E(X_n) + n - P(X_n = n-1)[n^2 - 2n + 1 + (n^2 - 1) + n] = (n+1)E(X_n) + n - (2n^2 - n)P(X_n = n-1)$

Comme on a montré au 6)c) que $(2n-1)P(X_n = n-1) = n - E(X_n)$, on peut simplifier !

$$E(X_n^2) = (n+1)E(X_n) + n - n[n - E(X_n)] = (n+1)E(X_n) + n - n^2 + nE(X_n)$$

Et on trouve (enfin...) que $E(X_n^2) = (2n+1)E(X_n) - n(n-1)$

c) D'après la formule de Koenig-Huyghens : $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$

On déduit donc du c) que $V(X_n) = (2n+1)E(X_n) - n(n-1) - E(X_n)^2$

Il reste à vérifier que la formule donnée par l'énoncé est bien égale :

$$\begin{aligned}
 2n + \frac{1}{4} - \left(E(X_n) - n - \frac{1}{2} \right)^2 &= 2n + \frac{1}{4} - \left(E(X_n)^2 - 2 \left(n + \frac{1}{2} \right) E(X_n) + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \\
 &= -E(X_n)^2 + (2n+1)E(X_n) + 2n + \frac{1}{4} - \left(n^2 + n + \frac{1}{4} \right) = (2n+1)E(X_n) - E(X_n)^2 - n^2 + n
 \end{aligned}$$

On retrouve bien la valeur de $V(X_n)$ donc $V(X_n) = 2n + \frac{1}{4} - \left(E(X_n) - n - \frac{1}{2} \right)^2$

d) Il suffit d'utiliser le résultat précédent et la fonction du 7)c).

def varianceX(n):

 e=esperanceX(n)

 return 2*n+1/4-(e-n-1/2)**2